


Cours



КУРСЪ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ

Профессоръ С.-Петербургскаго Университета.

II.

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

МЕХАНИКА МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ И СИСТЕМЪ, ИЗЪ НИХЪ СОСТАВЛЕННЫХЪ.

1881 — 1883.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Императорской Академіи Наукъ.

(Вас. Остр., 9 лин., № 12.)

1883.

Alex. Ziwet.
gt.
9-6-1922

ОГЛАВЛЕНІЕ

Части кинетической.

*

§§ Стр.

ГЛАВА V. Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ.

§§ Стр.

ГЛАВА VI. Объ интегралахъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

ГЛАВА VII. Законъ движенія центра инерціи.

ГЛАВА VIII. Законъ площадей.

§§ Стр.

ГЛАВА XII. О составлении дифференціальныхъ уравненій движенія гибкихъ и деформируемыхъ сплошныхъ тѣлъ. Гибкая нить.

ГЛАВА XIII. О положеніяхъ равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, твердыхъ тѣлъ и гибкихъ нитей.

ОШИБКИ, ЗАМѢЧЕННЫЯ ВО ВТОРОМЪ ТОМѢ.

Стр.	*Строка св.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
39	9	координатъ:	координатъ
—	11	ио	но
50	предпослѣдняя	$y_0' + hy_0$	$y_0' + ky_0$
51	4 снизу	$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dx}{dt}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}$
53	15	ψ_3, ψ_1, ψ_2'	ψ_3, ψ_1', ψ_2'
71	послѣдняя	$\sqrt{g - kx'}$	$\sqrt{g} - kx'$
78	послѣдняя	$2kx$	$2kx'$
91	17	площади	удвоенной площади
101	предпослѣдняя	годографъ количества движенія	годографъ момента количества движенія
127	10	сн-	си-
128	15	(192)	(193)
130	10	$t\sqrt{2\mu}$	$dt\sqrt{2\mu}$
134	21	$y'' -$	$y'' =$
165	15	$3Gu_0 \sin\alpha$	$\frac{3u_0 \sin\alpha}{G}$
166	8	$- 2(\mathfrak{x}' \sin\Lambda +$	$+ 2(\mathfrak{x}' \sin\Lambda +$
169	10	Положеніе	Положенія
171	7	$U_e + \delta^2 U$	$U_e + \frac{1}{2}\delta^2 U$
172	15	$\frac{v_0^2}{2}$	$\frac{m\,v_0^2}{2}$

Стр.	*Строка св.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
175	10	**(295 bis)**	**(259 bis)**
188	7	$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)$	$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2$
192	2	$\cos(\ddot{u}, N)$	й $\cos(\ddot{u}, N)$
196	19	$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$
202	7	привизны	кривизны
205	17	$\mu\,(r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$	$\mu^2\,(r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$
215	1 и 2	часть проэкціи траэкторіи на горизонтальную плоскость;	проэкція на горизонтальную плоскость траэкторіи, описываемой точкою въ одномъ изъ такихъ движеній;
233	6	η^2	μ^2
—	8	$-\,m^2\mu$	$-\,m\mu^2 s$
237	14	(380)	(389)
243	18	Буква D на чертежѣ 23 не	помѣщена по ошибкѣ
246	23	точки	тяжелой точки
270	5	силъ.	силъ, когда матерьяльная точка находится въ покоѣ.
272	12	ттлько	только
301	4	Еслн	Если
315	21	отъ 8 равна	отъ 8 по t равна
345	10	$Q =$	$Q_1 =$
—	11	$K =$	$K_1 =$
371	23	$-\,\rho_c^2(\theta'_c)^2$	$-\,\rho_c(\theta_c')^2$
389	8	составленны,	составленныя
434	7	точки A	точки D
—	8	точки C_1	точки B_1
441	5	CD_1 и CD_1	CD_1 и CD
466	2	(а именно — λ_c)	(а именно: λ_c)
485	9	$\frac{B_k - \mathfrak{B}_k}{M}$	$\frac{B_k - \mathfrak{A}_k}{M}$
—	9	$\frac{C_k - \mathfrak{C}_k}{M}$	$\frac{C_k - \mathfrak{A}_k}{M}$
527	10	равна:	равна корню квадратному изъ:
540		По ошибкѣ означена страницею 550-ю.	
544		Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (762) вмѣсто $(Л_ю)_\xi$, $(Л_ю)_\eta$, $(Л_ю)_\zeta$ должны быть $(Л_c)_\xi$, $(Л_c)_\eta$, $(Л_c)_\zeta$.	

Стр.	*Строка св.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
544	9	$\mathfrak{A}_c - \mathfrak{C}_c$	$\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c$
548		Въ первой части уравненія (567, E) по ошибкѣ пропущены слѣдующіе члены: $-\frac{d(\text{лю})_\xi}{dt}\theta_\xi - \frac{d(\text{лю})_\eta}{dt}\theta_\eta - \frac{d(\text{лю})_\zeta}{dt}\theta_\zeta$	
552	послѣдняя	$\frac{2h}{G}$	$\frac{2h}{G^2}$
562	»	$-qp')\nu$	$-qp')\nu_z$
564	4	$(\Omega^2 - \omega_2^2)$	$(\Omega^2 - \omega_3^2)$
594	12	$\sqrt{1 + \cos\beta\cos\alpha + \cos^2\beta}$	$\sqrt{1 + 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\beta}$
609	3 снизу	$\frac{\partial\vartheta}{\partial y_{\text{ю}}}$	$\frac{\partial\vartheta}{\partial z_{\text{ю}}}$
611	2	$(Л_{\text{ю}})_\xi$	$(Л_{\text{ю}})_\zeta$
623	14	$x_{\text{ю}} \sin \phi_4 \cos ж_4$	$z_{\text{ю}} \sin \phi_4 \cos ж_4$
—	—	$-z_{\text{ю}} \cos \phi_4$	$-x_{\text{ю}} \cos \phi_4$
624	3 снизу	$x_c - \varkappa\nu_x$	$z_c - \varkappa\nu_z$
—	предпослѣдняя	$z_c - \varkappa\nu_z$	$x_c - \varkappa\nu_x$
625	6	уголъ произволенъ	уголъ ϑ произволенъ
631	4 и 9	$-Mg($	$-2Mg($
639	18	возростаетъ	возростаютъ
—	предпослѣдняя	$(y_\mu - b)\, t \operatorname{tg}\varphi_0$	$(y_\mu - b) \operatorname{tg}\varphi_0$
645	17	$\mathfrak{C}_c^2\omega^2$	$L^3\, \mathfrak{C}_c^2\omega^2$
647	8	$\cos^3\beta$	$\cos^2\beta$
652	7 снизу	кругъ G	грузъ G
660	1 снизу	$\cos\psi$	$\cos\varphi$
688	18	Направленіе	Направленія
—	—	опредѣляется	опредѣляются
696	10	$\frac{5}{7} R \cos\varphi$	$\frac{5}{7} R_1 \cos\varphi$
748	13	противоположна	противоположно
754	11 и 12	Вся вторая часть этого равенства должна быть со знакомъ минусъ	
783	12	$\partial q_{\text{н}}$	$q_{\text{н}}$
—	13	$q_{\text{н}}$	$\delta q_{\text{н}}$
784	11	$U_{12} U_{12}$	$U_{12} U_{13}$
—	12	$\frac{B_{23}^2}{Q_2}$	$B_{23}^2\, Q_2$

Стр.	*Строка св.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
—	14	$-\frac{B_{2n}^2}{Q_2}-\frac{C_{2n}^2}{Q_3}$	$-B_{2n}^2 Q_2 - C_{2n}^2 Q_3$
786	послѣдняя	D	D_1
763	12	DN	AN
—	16	CNB	CND.
826	7 снизу	$-k\Lambda\Delta f$	$k\Lambda\Delta f$
—	—	$\Lambda\Delta f$	$-\Lambda\Delta f$

Кинетика *) имѣетъ цѣлью изученіе зависимости между кинематическимъ состояніемъ матеріи, обладающей предполагаемыми свойствами, и причинами, обусловливающими это состояніе.

Подъ словами: «кинематическое состояніе матеріи» мы здѣсь подразумѣваемъ видъ движенія матеріи движущейся, или положеніе и строеніе матеріи покоющейся.

Предположенія о свойствахъ, которыя мы представляемъ себѣ присущими матеріи, рождаются въ насъ путемъ наведенія, изъ знанія явленій природы, почерпаемыхъ изъ наблюденій и опытовъ.

Тѣмъ же путемъ и изъ тѣхъ же источниковъ мы составляемъ себѣ представленіе о свойствахъ причинъ такихъ кинематическихъ состояній матеріи, которыя не объясняются единственно только допущенными уже свойствами ея; такія причины мы называемъ дѣятелями или силами.

Составленныя предположенія о свойствахъ матеріи и дѣятелей называются гипотезами; основываясь на нихъ, кинетика, путемъ математической дедукціи, показываетъ, въ какомъ кинематическомъ состояніи будутъ находиться данныя матерьяльныя тѣла при дѣйствіи на нихъ данныхъ дѣятелей, или обратно, опредѣляетъ, при дѣйствіи какихъ дѣятелей данныя тѣла могутъ находиться въ данномъ кинематическомъ состояніи.

---

*) Терминъ „кинетика" происходитъ отъ слова κίνησις, означающаго произведеніе движенія, между тѣмъ какъ терминъ „кинематика" производится отъ слова κίνημα, означающаго состояніе движенія.

Цѣль этихъ выводовъ кинетики есть объясненіе наблюденныхъ фактовъ на основаніи сдѣланныхъ гипотезъ, и предсказаніе фактовъ незамѣченныхъ или не наблюдавшихся.

Каждая удача въ объясненіи или въ предсказаніи фактовъ увеличиваетъ вѣроятность одной или нѣсколькихъ изъ сдѣланныхъ гипотезъ.

Тѣ изъ гипотезъ кинетики, которыя относятся ко всякой матеріи или ко всякимъ дѣятелямъ и въ несомнѣнности которыхъ мы убѣждаемся по мѣрѣ бо́льшаго ознакомленія съ явленіями, принимаются за основныя истины природы, которымъ подчинены всѣ явленія физическаго міра; эти гипотезы называются *основными началами или основными принципами механики*.

Изложеніе сущности тѣхъ основныхъ началъ и опредѣленій, на которыхъ основывается механика свободнаго тѣла, движущагося поступательно, составляетъ содержаніе первой главы.

ГЛАВА I.

Основные принципы механики и опредѣленія, относящіяся къ свободному матерьяльному тѣлу, движущемуся поступательно и къ которому силы приложены однородно.

§ 1. Начало инерціи матеріи. Силы.

Инерція есть свойство матеріи, всегда и неотъемлемо присущее ей.

Существованіе этого свойства въ матеріи мы принимаемъ, какъ одинъ изъ основныхъ принциповъ механики, который мы формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Основное начало *A*: Всякая точка матерьяльнаго тѣла имѣетъ стремленіе сохранить безъ измѣненія величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія.

Всякое состояніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ ни одна изъ точекъ его не измѣняетъ своей скорости ни по величинѣ, ни по направленію, возможно по свойству инерціи матеріи и объясняется этимъ свойствомъ; слѣдовательно:

по свойству инерціи тѣло можетъ находиться въ абсолютномъ покоѣ;

по свойству инерціи оно можетъ совершать абсолютное поступательное движеніе, при которомъ всѣ точки его движутся равномѣрно и прямолинейно;

кромѣ того, мыслимо еще безчисленное множество другихъ движеній матерьяльнаго тѣла, при которыхъ ни одна точка тѣла не измѣняетъ ни величины, ни направленія абсолютной скорости (то есть не имѣетъ ускоренія), скорости же различныхъ точекъ различны и различно направлены; всѣ такія движенія матерьяльнаго тѣла, хотя и возможны по свойству инерціи матеріи, но необходимо сопровождаются деформаціями его; мы же, въ настоящей главѣ, будемъ говорить только о такихъ состояніяхъ матерьяльнаго тѣла, при которыхъ оно не деформируется, а потому въ разсмотрѣніе движеній, сопровождающихся деформаціями, не войдемъ.

Всякое такое движеніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ хотя одна точка тѣла имѣетъ ускореніе, или измѣняетъ свою скорость, не можетъ быть объяснено свойствомъ инерціи матеріи; измѣненіе скорости или появленіе ускоренія мы приписываемъ особымъ причинамъ, которыя мы называемъ *силами*.

Что такое силы, въ чемъ заключается сущность ихъ — мы не знаемъ; мы можетъ знать только дѣйствія, ими производимыя и состоящія въ томъ, что онѣ сообщаютъ абсолютныя ускоренія точкамъ матеріи и измѣняютъ величины и направленія ихъ скоростей; если мы замѣчаемъ, что какая-либо точка матеріи получаетъ абсолютное ускореніе, или измѣняетъ свою абсолютную скорость, то заключаемъ, что на эту точку дѣйствуютъ нѣкоторыя силы.

Ни одна точка матерьяльнаго тѣла не можетъ получить абсолютнаго ускоренія и не можетъ измѣнить своей скорости, пока на нее не станетъ дѣйствовать какая-либо сила.

Стремленіе точекъ матеріи сохранить имѣющіяся скорости сказывается и во время дѣйствія на нихъ силъ; каждая точка матеріи измѣняетъ свою скорость не вдругъ, но постепенно, даже при такихъ силахъ, которыя производятъ наиболѣе быстрое измѣненіе скоростей.

По прекращеніи дѣйствія силы, точка матеріи сохраняетъ ту скорость, которую она имѣла въ моментъ прекращенія дѣйствія силы.

Изъ сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что *матерьяльное тѣло, ни на одну точку* которагo *не дѣйствуютъ никакія силы, если не деформируется, то пребываетъ по инер-*

ціи либо въ абсолютномъ покоѣ, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномѣрно и прямолинейно.

Мы будемъ называть матерьяльное тѣло *свободнымъ*, если оно можетъ двигаться поступательно по инерціи по всевозможнымъ направленіямъ и съ какими бы то ни было скоростями.

Матерьяльное тѣло можетъ быть свободно во всемъ неограниченномъ пространствѣ, или внутри нѣкоторой части его, на предѣлахъ которой оно встрѣчаетъ другія матерьяльныя тѣла или вообще какія-либо препятствія, мѣшающія его поступательному движенію по инерціи въ нѣкоторыхъ направленіяхъ.

§ 2. Мѣсто приложенія силы. Силы, однородно-приложенныя къ тѣлу; ихъ величины и направленія.

Всякая сила, дѣйствующая на какое-либо матерьяльное тѣло, имѣетъ въ немъ нѣкоторое *мѣсто приложенія;* подъ этимъ именемъ мы подразумѣваемъ тѣ части объема тѣла, всѣ точки которыхъ получаютъ ускоренія непосредственно отъ той силы, о которой идетъ рѣчь.

Ускоренія, получаемыя разными точками мѣста приложенія силы, могутъ быть неодинаковы; это можетъ зависѣть, какъ отъ свойствъ силы, такъ и отъ тѣхъ обстоятельствъ, въ которыхъ находится матерьяльное тѣло.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о такихъ силахъ, каждая изъ которыхъ прилагается сразу ко всѣмъ точкамъ свободнаго матерьяльнаго тѣла и притомъ *сообщаетъ имъ всѣмъ одинаковыя и параллельныя ускоренія;* всякую такую силу мы будемъ называть *однородно-приложенною къ тѣлу* или просто *однородною силою.*

Примѣромъ однородныхъ силъ можетъ служить сила тяжести всякаго тѣла, сообщающая, какъ извѣстно, всѣмъ точкамъ тѣла равныя и параллельныя между собою ускоренія.

Такую однородную силу, которая сообщаетъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла ускоренія всегда одной и той же величины и всегда параллельно неизмѣнному направленію въ пространствѣ, мы будемъ называть *постоянною однородною силою;* различныя по-

стоянныя однородныя силы, прилагаемыя къ одному и тому же матерьяльному тѣлу, могутъ различаться величинами и направленіями сообщаемыхъ ими ускореній.

Непостоянными **или** ***перемѣнными однородными силами*** **мы будемъ называть такія, которыя, хотя и сообщаютъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла взаимно-равныя и параллельныя ускоренія, но величины этихъ ускореній и направленія ихъ измѣняются съ теченіемъ времени.**

Всякая постоянная или непостоянная однородная сила, будучи приложена къ свободному матерьяльному тѣлу, находившемуся въ абсолютномъ покоѣ, или въ абсолютномъ поступательномъ движеніи по инерціи, необходимо сообщитъ этому тѣлу нѣкоторое поступательное движеніе *).

---

*) Весьма легко доказать, что, при сказанныхъ условіяхъ, линія, соединяющая каждыя двѣ точки тѣла, сохранитъ свою длину и направленіе во все время движенія тѣла.

Пусть $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$, суть координаты двухъ какихъ-либо точекъ тѣла въ моментъ t, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$—координаты ихъ въ моментъ t_0, въ который начала дѣйствовать на тѣло однородная сила.

Такъ какъ, въ каждый моментъ дѣйствія однородной силы, ускоренія всѣхъ точекъ тѣла равны и параллельны, то:

$$\frac{d^2\mathfrak{x}_2}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{x}_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2\mathfrak{y}_2}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2\mathfrak{z}_2}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}_1}{dt^2}.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t, мы получимъ:

$$\mathfrak{x}'_2 - \mathfrak{x}'_1 = (\mathfrak{x}'_2)_0 - (\mathfrak{x}'_1)_0; \quad \mathfrak{y}'_2 - \mathfrak{y}'_1 = (\mathfrak{y}'_2)_0 - (\mathfrak{y}'_1)_0; \quad \mathfrak{z}'_2 - \mathfrak{z}'_1 = (\mathfrak{z}'_2)_0 - (\mathfrak{z}'_1)_0;$$

гдѣ $(\mathfrak{x}'_2)_0$, $(\mathfrak{y}'_2)_0$, $(\mathfrak{z}'_2)_0$, $(\mathfrak{x}'_1)_0$, $(\mathfrak{y}'_1)_0$, $(\mathfrak{z}'_1)_0$ означаютъ проэкціи на оси координатъ скоростей обѣихъ точекъ въ моментъ t_0; такъ какъ въ этотъ моментъ всѣ точки тѣла, по предположенію, имѣютъ скорости равныя и параллельныя, то:

$$\mathfrak{x}'_2 = \mathfrak{x}'_1; \quad \mathfrak{y}'_2 = \mathfrak{y}'_1; \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}'_1.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t, мы получимъ:

$$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1; \quad \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_1; \quad \mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{c}_1.$$

Эти равенства и выражаютъ, что линія, соединяющая обѣ точки, сохраняетъ свою длину и направленіе; а это можетъ быть только при поступательномъ движеніи тѣла.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ матерьяльныя тѣла, подверженныя дѣйствію однородныхъ силъ, находятся въ покоѣ или въ поступательномъ движеніи; говоря здѣсь объ ускореніи или о скорости одной изъ точекъ тѣла, мы можемъ подразумѣвать произвольную точку его, такъ какъ всѣ точки тѣла, движущагося поступательно, имѣютъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени одинаковыя ускоренія и одинаковыя скорости; въ виду этого, для сокращенія рѣчи, вмѣсто того, чтобы говорить: «скорость и ускореніе нѣкоторой точки тѣла, движущагося поступательно», мы будемъ выражаться короче: «скорость и ускореніе тѣла».

Положимъ, что въ нашемъ распоряженіи имѣется нѣсколько однородныхъ силъ:

№ 1-й, № 2-й, № 3-й, ...

которыя, по нашей волѣ, могутъ быть приложены къ одному и тому же свободному матерьяльному тѣлу A, находящемуся, до приложенія къ нему силъ, въ покоѣ, или въ поступательномъ движеніи по инерціи. Предполагается, что можемъ приложить каждую изъ этихъ силъ порознь, отдѣльно отъ прочихъ, и что можемъ также, если понадобится, приложить нѣсколько изъ этихъ силъ одновременно къ тому же тѣлу A.

Прилагая къ тѣлу A каждую изъ этихъ силъ отдѣльно отъ прочихъ и наблюдая поступательное движеніе, совершаемое этимъ тѣломъ, мы можемъ, по виду движенія которой-либо изъ точекъ его, опредѣлить во всякій моментъ движенія величину и направленіе ускоренія, сообщаемаго этою однородною силою всѣмъ точкамъ тѣла.

Изъ такихъ наблюденій, положимъ, окажется, что силы № 1-й, № 2-й, № 3-й, ... сообщаютъ тѣлу A ускоренія неодинаковой величины и неодинаковаго направленія; притомъ въ числѣ этихъ силъ могутъ оказаться какъ постоянныя, такъ и перемѣнныя однородныя силы.

Видя такое различіе въ количественномъ отношеніи между дѣйствіями этихъ силъ на одно и то же тѣло, мы вправѣ заключить, что существуетъ нѣкоторое количественное различіе и въ самыхъ силахъ.

Такъ какъ мы не знаемъ существа силъ, а только ихъ дѣйствія, то намъ приходится составлять себѣ количественное представленіе о силахъ по производимымъ ими дѣйствіямъ, то есть по тѣмъ ускореніямъ, которыя онѣ сообщаютъ свободному матерьяльному тѣлу.

Мы представляемъ себѣ, что однородно-приложенныя ко всякому тѣлу силы имѣютъ, подобно ускореніямъ, *величины* и *направленія*.

Значенія этихъ понятій мы выразимъ слѣдующими опредѣленіями.

Опредѣленіе *a*: Подъ направленіемъ силы, однородно-приложенной къ какому-либо тѣлу, мы подразумѣваемъ то направленіе, по которому она сообщаетъ ускоренія всѣмъ точкамъ этого тѣла, когда оно свободно. Постоянная сила имѣетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

Опредѣленіе *b*: Силамъ, однородно-приложеннымъ къ одному и тому же тѣлу, мы приписываемъ величины, пропорціональныя величинамъ тѣхъ ускореній, которыя онѣ порознь сообщаютъ этому тѣлу, когда оно свободно. Постоянной силѣ, однородно-приложенной къ тѣлу, мы приписываемъ постоянную величину.

По 2-му опредѣленію *b* численное отношеніе между величинами двухъ постоянныхъ или непостоянныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу, равняется численному отношенію между величинами ускореній, сообщаемыхъ ими этому тѣлу, когда оно свободно.

Пусть силы № 1-й и № 2-й суть силы постоянныя; первая сообщаетъ тѣлу A ускореніе $\dot{v}_1$ по опредѣленному направленію, вторая — ускореніе $\dot{v}_2$ по иному направленію; на основаніи вышесказаннаго мы заключимъ, что:

$$\frac{(\text{Величина силы № 2})}{(\text{Величина силы № 1})} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$(\text{Величина силы № 2}) = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}\,(\text{Велич. силы № 1}) \ldots \quad (2)$$

Относительно непостоянныхъ однородныхъ силъ намъ придется

заключить, что онѣ имѣютъ величины и направленія, измѣняющіяся съ теченіемъ времени; но, въ каждый опредѣленный моментъ времени, всякая однородно-прилагаемая къ тѣлу *A* сила имѣетъ опредѣленное направленіе, совпадающее съ направленіемъ ускореній, сообщаемыхъ ею въ этотъ моментъ всѣмъ точкамъ этого свободнаго тѣла, и опредѣленную величину, численное отношеніе которой къ величинѣ силы № 1 равно:

$$\frac{\dot{v}}{\dot{v}_1},$$

гдѣ $\dot{v}$ есть величина ускоренія, сообщаемаго сказанною силою тѣлу *A* въ разсматриваемый моментъ времени.

Такимъ образомъ мы составляемъ себѣ представленіе объ относительной величинѣ различныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу; мы можемъ сказать, что измѣряемъ величины этихъ силъ величиною одной изъ нихъ, подобно тому, какъ мы измѣряемъ длины—единицею длины, скорости—единицею скорости и ускоренія—единицею ускоренія.

Величина каждой однородной силы, прилагаемой къ тѣлу *A*, выразится у насъ именованнымъ числомъ въ величинѣ той изъ нихъ, которую мы примемъ за единицу этихъ силъ; такъ, напримѣръ, именованныя числа:

$$\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й)}; \quad \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й)}$$

выражаютъ величины силъ № 2-й и № 3-й въ величинѣ силы № 1-й; знакъ:—(Велич. силы № 1-й) есть символъ, означающій величину силы однородно-приложенной къ тѣлу *A* и сообщающей ему ускореніе $\dot{v}_1$, отношенія же:

$$\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}, \quad \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1}$$

суть отвлеченныя числа.

Для болѣе краткаго обозначенія величинъ и направленій различныхъ силъ мы примемъ буквенныя обозначенія; а именно, величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу *A* мы обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$F1_A$ будетъ означать величину силы № 1-й сообщ. тѣлу A уск. $\dot{v}_1$,
$F2_A$ „ „ „ „ № 2-й „ „ A „ $\dot{v}_2$,
$F3_A$ „ „ „ „ № 3-й „ „ A „ $\dot{v}_3$,
. . . .

Надо имѣть въ виду, что эти символы означаютъ именованныя числа, единицею наименованія которыхъ служитъ величина, изображаемая однимъ изъ этихъ же символовъ, численныя же отношенія между величинами, изображаемыми этими символами, суть отвлеченныя числа или дроби:

$$\frac{F2_A}{F1_A}=\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1};\ \frac{F3_A}{F1_A}=\frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1};\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Направленія силъ условимся обозначать тѣми же самыми знаками, какъ и величины силъ, подобно тому, какъ мы обозначаемъ одною и тою же буквою величину и направленіе ускоренія; поэтому:

$$\cos(F1_A, X),\ \cos(F1_A, Y),\ \cos(F1_A, Z)$$

будутъ означать косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ силы № 1, однородно-приложенной къ тѣлу A.

Величины однородныхъ силъ: №№ n, $(n+1)$, $(n+2)$, . . . , прилагающихся къ другому тѣлу B и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_n$, $\dot{v}_{(n+1)}$, $\dot{v}_{(n+2)}$, ... выражаются, на основаніи опредѣленія b, въ величинѣ одной изъ этихъ же силъ. Означимъ величины и направленія ихъ символами: Fn_B, $F(n+1)_B$, $(Fn+2)_B$, ... ; каждый изъ этихъ символовъ, когда онъ есть знакъ величины силы, представляетъ нѣкоторое именованное число, единицею наименованія котораго служитъ величина, изображаемая однимъ изъ этихъ же символовъ (напримѣръ, Fn_B=велич. силы № n); численныя же отношенія между величинами этихъ силъ суть отвлеченныя дроби:

$$\frac{F(n+1)_B}{Fn_B}=\frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_n};\ \frac{F(n+2)_B}{Fn_B}=\frac{\dot{v}_{(n+2)}}{\dot{v}_n};\ \ldots\ldots \quad (3\ \text{bis})$$

§ 3. Начало параллелограмма силъ, однородно-приложенныхъ къ тѣлу. Силы составляющія и равнодѣйствующая. Равновѣсіе силъ.

Въ предъидущемъ параграфѣ, говоря о дѣйствіи на свободное тѣло силъ однородно-приложенныхъ къ нему, мы предполагали, что каждая изъ нихъ можетъ быть приложена къ тѣлу или отнята отъ него по нашему желанію; при такомъ условіи мы можемъ подвергать тѣло дѣйствію каждой изъ однородныхъ силъ въ отдѣльности. Однако встрѣчаются такія однородныя силы какъ напримѣръ силы тяжести, которыя постоянно приложены къ тѣлу и отъ вліянія которыхъ мы не въ состояніи освободить тѣло; въ такихъ случаяхъ придется нерѣдко разсматривать движеніе тѣла при дѣйствіи двухъ или нѣсколькихъ однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ тѣлу.

Одновременное дѣйствіе нѣсколькихъ одновременно-приложенныхъ къ тѣлу силъ опредѣляется слѣдующимъ основнымъ принципомъ механики:

Основное начало *B:* Ускореніе, сообщаемое каждой точкѣ свободнаго тѣла нѣсколькими одновременно-приложенными къ нему однородными силами, есть геометрическая сумма *), составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя къ тѣлу порознь.

Иначе говоря, это начало утверждаетъ, что каждая изъ одновременно-приложенныхъ однородныхъ силъ сообщаетъ тѣлу ускореніе той же величины и того же направленія, какъ бы она дѣйствовала отдѣльно, и что всѣ такія ускоренія, сообщаемыя одновременно одному тѣлу, слагаются геометрически въ одно уско-

---

*) Въ § 32 кинематической части этой книги объяснено было значеніе геометрическаго сложенія; кромѣ того въ той части намъ случалось неоднократно говорить объ этомъ дѣйствіи, какъ въ примѣненіи къ скоростямъ, такъ и въ примѣненіи къ ускореніямъ; поэтому мы здѣсь предполагаемъ, что смыслъ этого термина совершенно понятенъ читателю.

реніе, дѣйствительно принимаемое свободнымъ тѣломъ; конечно, всѣ точки тѣла получаютъ равныя и параллельныя геометрически-сложныя ускоренія, такъ какъ всѣ приложенныя къ тѣлу силы предполагаются однородными.

Ускореніе, сообщаемое свободному тѣлу нѣсколькими однородными силами, приложенными къ нему одновременно, можетъ быть сообщено ему одною однородною силою, которая называется *равнодѣйствующею* этихъ силъ; эти же силы, по отношенію къ ихъ равнодѣйствующей, называются *составляющими силами.*

Основываясь на началѣ *B*, мы можемъ выработать правило для опредѣленія величины и направленія равнодѣйствующей по величинамъ и направленіямъ составляющихъ силъ.

Предположимъ, что къ тѣлу *A* одновременно приложены однородныя силы:

№ 2, № 3, ... № *k*,

о величинахъ и направленіяхъ которыхъ мы говорили въ предъидущемъ параграфѣ; если тѣло *A* свободно, то, по началу *B*, оно получитъ такое ускореніе $\dot{v}$, проэкціи котораго на оси координатъ будутъ равны проэкціямъ на нихъ ускореній $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$, ... $\dot{v}_k$; то есть:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}X) &= \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2X)+\dot{v}_3\cos(\dot{v}_3X)+\ldots+\dot{v}_k\cos(\dot{v}_kX) \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Y) &= \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2Y)+\dot{v}_3\cos(\dot{v}_3Y)+\ldots+\dot{v}_k\cos(\dot{v}_kY) \\ \dot{v}\cos(\dot{v}Z) &= \dot{v}_2\cos(\dot{v}_2Z)+\dot{v}_3\cos(\dot{v}_3Z)+\ldots+\dot{v}_k\cos(\dot{v}_kZ) \end{aligned}\right\}\ldots\ (4)$$

Ускоренія $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$, ... $\dot{v}_k$ суть тѣ самыя, которыя сообщаются свободному дѣлу *A* силами № 2, № 3, ... № *k* въ отдѣльности; поэтому:

$$\dot{v}_2=\frac{F2_A}{F1_A}\dot{v}_1,\quad \dot{v}_3=\frac{F3_A}{F1_A}\dot{v}_1,\ \ldots\ldots\ldots\ \dot{v}_k=\frac{Fk_A}{F1_A}\dot{v}_1,\ \ldots.\ (5)$$

направленія ихъ совпадаютъ съ направленіями этихъ силъ.

$$\left.\begin{aligned} \cos(\dot{v}_2X)&=\cos(F2_A,X),\ \cos(\dot{v}_3X)=\cos(F3_A,X), \\ \cos(\dot{v}_2Y)&=\cos(F2_A,Y),\ \cos(\dot{v}_3Y)=\cos(F3_A,Y), \\ \cos(\dot{v}_2Z)&=\cos(F2_A,Z),\ \cos(\dot{v}_3Z)=\cos(F3_A,Z), \end{aligned}\right\};\ \ldots\ (6)$$

слѣдовательно, можно представить равенства (4) слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \dot v\cos(\dot vX) &= \frac{\dot v_1}{F1_A}\left(F2_A\cos(F2_A,X)+\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,X)\right) \\ \dot v\cos(\dot vУ) &= \frac{\dot v_1}{F1_A}\left(F2_A\cos(F2_A,У)+\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,У)\right) \\ \dot v\cos(\dot vZ) &= \frac{\dot v_1}{F1_A}\left(F2_A\cos(F2_A,Z)+\ldots+Fk_A\cos(Fk_A,Z)\right) \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Ускореніе $\dot v$ можетъ быть сообщено свободному тѣлу A одною однородно-приложенною къ нему силою, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ $\dot v$ и величина которой равна:

$$F_A = \frac{\dot v}{\dot v_1} F1_A; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

эта сила F_A и есть равнодѣйствующая составляющихъ однородныхъ силъ: $F2_A$, $F3_A, \ldots Fk_A$.

Такъ какъ, по нашему знакоположенію, знакъ F_A служитъ для обозначенія не только величины силы, но еще и ея направленія, то:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\dot vX) &= \cos(F_A,X) \\ \cos(\dot vУ) &= \cos(F_A,У) \\ \cos(\dot vZ) &= \cos(F_A,Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

На основаніи (8) и (9), изъ равенствъ (7) слѣдуютъ равенства.

$$\left.\begin{aligned} F_A\cos(F_AX) &= F2_A\cos(F2_A,X)+F3_A\cos(F3_A,X)+\ldots \\ &\qquad \ldots+Fk_A\cos(Fk_A,X) \\ F_A\cos(F_AУ) &= F2_A\cos(F2_A,У)+F3_A\cos(F3_A,У)+\ldots \\ &\qquad \ldots+Fk_A\cos(Fk_A,У) \\ F_A\cos(F_AZ) &= F2_A\cos(F2_A,Z)+F3_A\cos(F3_A,Z)+\ldots \\ &\qquad \ldots+Fk_A\cos(Fk,_AZ) \end{aligned}\right\}, . (10)$$

выражающія величину и направленіе равнодѣйствующей въ величинахъ и направленіяхъ составляющихъ силъ.

Величины и направленія силъ, однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу, можно изображать длинами, откладываемыми по направленіямъ силъ отъ какой-либо одной и той же точки тѣла; каждая длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ величина изображаемой ею силы болѣе величины той силы, которую мы приняли за единицу силъ, прилагаемыхъ къ этому тѣлу.

Изображая силы длинами, мы можемъ поступать съ ними какъ съ ускореніями, то есть проэктировать ихъ на направленія или на плоскости и производить надъ ними геометрическія сложенія и вычитанія.

Проэкціею силы F_A на ось X мы называемъ силу, имѣющую величину: $F_A \cos (F_A X)$, и направленную параллельно положительной или отрицательной оси X, смотря потому, имѣетъ ли cos положительную или отрицательную величину.

Проэкція силы F_A на ось X изображается проэкціею на ту же ось длины, представляющей эту силу.

Каждое изъ равенствъ (10) выражаетъ, что проэкція на одну изъ осей координатъ равнодѣйствующей F_A равна суммѣ проекцій составляющихъ силъ: $F2_A$, $F3_A$, ... Fk_A.

Изъ этого слѣдуетъ, что длины, изображающія силы F_A, $F2_A$, $F3_A$,.. .. Fk_A имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый многоугольникъ.

Слѣдовательно, *длина, изображающая равнодѣйствующую* F_A, *есть геометрическая сумма длинъ, изображающихъ составляющія силы:* $F2_A$, $F3_A$ . . . . . Fk_A.

Если къ тѣлу одновременно приложены только двѣ однородныя силы, то равнодѣйствующая ихъ изобразится діагональю параллелограмма, стороны котораго изображаютъ величины и направленія приложенныхъ къ тѣлу силъ.

Построеніе длины, изображающей равнодѣйствующую нѣсколькихъ силъ, можно сдѣлать послѣдовательнымъ образомъ: сначала построить, по правилу параллелограмма, равнодѣйствующую двухъ изъ приложенныхъ къ тѣлу силъ, затѣмъ, на полученной длинѣ и на длинѣ, изображающей третью силу, построить новый параллелограммъ, діагональ котораго изобразитъ равнодѣйствующую трехъ силъ, и т. д.; такимъ образомъ опредѣленіе величины и направленія равнодѣйствующей нѣсколькихъ однородно-приложенныхъ къ тѣлу силъ сводится на послѣдовательное примѣненіе правила параллелограмма; вслѣдствіе этого основное начало B называютъ *началомъ параллелограмма силъ.*

Если равнодѣйствующая однородныхъ силъ, одновременно приложенныхъ къ одному и тому же тѣлу, равна нулю, то тогда тѣло не получаетъ отъ совокупнаго дѣйствія ихъ никакого ускоренія; въ такихъ случаяхъ говорятъ, что *силы взаимно-уравновѣшиваются* или *находятся въ равновѣсіи.*

Свободное матерьяльное тѣло, къ которому одновременно приложено нѣсколько однородныхъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ, если не деформируется, то пребываетъ по инерціи либо въ абсолютномъ покоѣ, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномѣрно и прямолинейно.

Равновѣсіе однородныхъ силъ: $F1_A$, $F2_A$, . . . Fp_A, одновременно приложенныхъ къ тѣлу A, выражается аналитически равенствами:

$$\left.\begin{aligned} F1\cos(F1_A,X)+F2_A\cos(F2_A,X)+\ldots+Fp_A\cos(Fp_A,X)=0\\ F1\cos(F1_A,Y)+F2_A\cos(F2_A,Y)+\ldots+Fp_A\cos(Fp_A,Y)=0\\ F1\cos(F1_A,Z)+F2_A\cos(F2_A,Z)+\ldots+Fp_A\cos(Fp_A,Z)=0 \end{aligned}\right\}(11)$$

которыя могутъ быть замѣнены символическимъ равенствомъ:

$$\overline{F1}_A+\overline{F2}_A+\overline{F3}_A+\ldots+\overline{Fp}_A=0,\ \ldots\ldots\ (12)$$

выражающимъ, что геометрическая сумма длинъ, изображающихъ уравновѣшивающіяся силы, равна нулю.

Точно также равновѣсіе однородныхъ силъ № n, № r, № s, . . . № q, одновременно приложенныхъ къ свободному тѣлу B, выражается слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\overline{Fn}_B+\overline{Fr}_B+\overline{Fs}_B+\ldots+\overline{Fq}_B=0\ \ldots\ldots\ (13)$$

§ 4. Силы взаимнодѣйствія. Начало равенства однородныхъ и противоположныхъ силъ взаимнодѣйствія. Отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ.

На основаніи началъ и опредѣленій, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы измѣряемъ численныя отношенія между величинами однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу.

Теперь мы приведемъ начало, на основаніи котораго мы измѣряемъ отношенія между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ разнымъ тѣламъ; это начало относится къ силамъ взаимнодѣйствія между тѣлами и опредѣляетъ понятіе о равныхъ однородныхъ силахъ, приложенныхъ къ двумъ разнымъ тѣламъ.

Изученіе свойствъ тѣхъ силъ, дѣйствіемъ которыхъ объясняются явленія природы, показало, что величина и направленіе всякой силы, приложенной къ какому-либо матерьяльному тѣлу A, находятся въ опредѣленной зависимости отъ положенія, занимаемаго по отношенію къ тѣлу A нѣкоторымъ тѣломъ B, въ которомъ какъ будто бы заключается источникъ силы, приложенной къ A; одновременно съ силою, приложенною къ A и имѣющею своимъ источникомъ тѣло B, наблюдается сила, приложенная къ B и имѣющая своимъ источникомъ тѣло A.

Эти одновременныя силы, дѣйствующія между тѣлами, называются *силами взаимнодѣйствія* между ними.

Всѣ силы природы суть силы взаимнодѣйствія между тѣлами.

Между тѣлами конечныхъ размѣровъ, находящимися въ конечныхъ разстояніяхъ одно отъ другого, силы взаимнодѣйствія бываютъ по большей части силами неоднородно-приложенными къ тѣламъ; чѣмъ меньше размѣры тѣлъ и чѣмъ больше разстоянія между ними, тѣмъ ближе подходятъ эти силы къ однородности.

Представимъ себѣ, что имѣемъ такія тѣла, между которыми взаимнодѣйствія суть силы однородныя, такъ что къ тѣлу A приложена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ отъ относительнаго положенія тѣла B по отношенію къ тѣлу A, и въ то же время къ тѣлу B приложена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ отъ положенія тѣла A по отношенію къ тѣлу B.

Такія силы взаимнодѣйствія между двумя тѣлами мы предполагаемъ *равными* между собою, если направленія ихъ прямо-противоположны; это предположеніе составляетъ сущность одного *изъ началъ механики*, которое мы выразимъ такъ:

Основное начало C. **Если взаимнодѣйствія между двумя тѣлами суть силы однородно-приложенныя къ нимъ и прямопротивоположныя одна другой, то эти силы равны по величинѣ.**

Принявъ это начало, мы можемъ опредѣлить численныя отношенія между величинами какихъ-либо однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ A и B, если взаимнодѣйствія между этими тѣлами суть силы однородныя и прямопротивоположныя хотя бы при нѣкоторомъ одномъ только опредѣленномъ относительномъ положеніи ихъ.

Положимъ, что эти силы взаимнодѣйствія сообщаютъ: тѣлу A ускореніе $\dot{v}B_A$ и тѣлу B ускореніе $\dot{v}A_B$.

Пусть $F1_A$, $F2_A$..... означаютъ, по прежнему, величины однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ тѣлу A и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$,.....; величины этихъ силъ могутъ быть сравнены, на основаніи опредѣленія b, съ величиною силы, сообщающей тѣлу A ускореніе $\dot{v}B_A$; означимъ черезъ $\mathfrak{f}B_A$ величину этой силы; будемъ имѣть равенства:

$$\frac{\mathfrak{f}B_A}{F1_A}=\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}_1};\ \frac{\mathfrak{f}B_A}{F2_A}=\frac{\dot{v}B_A}{\dot{v}_2};\ \ldots\ldots\ldots\ (14)$$

Пусть, далѣе, Fn_B, $F(n+1)_B$,..... означаютъ величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу B и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_n$, $\dot{v}_{(n+1)}$,.....; означимъ черезъ $\mathfrak{f}A_B$ величину силы, сообщающей тому же тѣлу ускореніе $\dot{v}A_B$; подобно тому, какъ и для тѣла A, будемъ имѣть равенства:

$$\frac{\mathfrak{f}A_B}{Fn_B}=\frac{\dot{v}A_B}{\dot{v}_n};\ \frac{\mathfrak{f}A_B}{F(n+1)_B}=\frac{\dot{v}A_B}{\dot{v}_{(n+1)}};\ \ldots\ldots\ldots\ (15)$$

Изъ рядовъ равенствъ (14) и (15), принявъ во вниманіе, что, на основаніи начала C:

$$\mathfrak{f}B_A=\mathfrak{f}A_B,$$

мы получимъ слѣдующія выраженія численныхъ отношеній между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{Fn_B}{F1_A}=\frac{\dot{v}_n}{\dot{v}_1}\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}\right);\ \frac{Fn_B}{F2_A}=\frac{\dot{v}_n}{\dot{v}_2}\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}\right);\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{F(n+1)_B}{F1_A}=\frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_1}\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}\right);\ \frac{F(n+1)_B}{F2_A}=\frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_2}\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}\right);\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots (16)$$

Отсюда видно, что *численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу B, а другая къ тѣлу A, получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на постоянную для этой пары тѣлъ дробь:*

$$\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

которая представляетъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ A и B силами взаимнодѣйствія между ними, однородными и противоположными, а потому и равными между собою.

§ 5. Равныя однородныя силы и силы, сообщающія равныя ускоренія различнымъ тѣламъ.

Двѣ однородныя силы, приложенныя къ одному и тому же тѣлу, имѣютъ равныя величины, если равны ускоренія, сообщаемыя ими этому тѣлу.

Двѣ же однородныя силы, приложенныя къ разнымъ тѣламъ и сообщающія имъ одинаковыя ускоренія, вообще говоря, не равны между собою; изъ равенствъ (16) видно, что отношеніе между величинами G_B и G_A силъ, сообщающихъ тѣламъ B и A ускореніе $\dot{v}$, равно дроби (17).

$$\frac{G_B}{G_A}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Для того, чтобы величина Φ_B однородной силы, приложенной къ тѣлу B и сообщающей ему ускореніе $\dot{V}_B$, равнялась величинѣ Φ_A однородной силы, приложенной къ тѣлу A и сообщающей ему уско-

реніе V_A, необходимо, чтобы величина Φ_B была во столько разъ болѣе величины $\mathfrak{f}A_B$, во сколько разъ Φ_A болѣе $\mathfrak{f}B_A$; для этого ускоренія $\dot{V}_A$, и $\dot{V}_B$ должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\frac{\dot{V}_B}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}=\frac{\dot{V}_A}{\dot{\mathfrak{v}}B_A},$$

которое можно представить такъ:

$$\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Слѣдовательно: *двѣ силы, одна изъ которыхъ однородно-приложена къ тѣлу A, а другая къ тѣлу B, имѣютъ равныя величины, если отношеніе между ускореніями, сообщаемыми ими тѣламъ A и B, равняется дроби (17).*

Кромѣ того замѣтимъ, что дробь (17), которую мы означимъ черезъ $\mu(BA)$, можетъ быть представлена: 1) какъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ A и B какими-либо равными между собою однородными силами, приложенными къ этимъ тѣламъ, 2) какъ отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ равныя ускоренія.

$$\mu(BA)^{*)}=\frac{\dot{\mathfrak{v}}B_A}{\dot{\mathfrak{v}}A_B}=\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B}=\frac{G_B}{G_A} \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

§ 6. Величина силы однородно-приложенной къ тѣлу, равна суммѣ величинъ однородныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ частямъ тѣла.

Пусть имѣемъ нѣкоторое тѣло K.

Положимъ, что для сообщенія ему ускоренія $\dot{v}$ надо приложить къ нему однородную силу, имѣющую величину G_K.

---

*) Порядокъ размѣщенія буквъ B и A въ символѣ $\mu(BA)$ слѣдующій: сначала поставленъ знакъ того тѣла, ускореніе котораго находится въ знаменателѣ; здѣсь это—тѣло B, ускореніе котораго: $\dot{\mathfrak{v}}A_B$ или $\dot{V}_B$.

Если отдѣлимъ отъ тѣла нѣкоторую часть a, то, для сообщенія этой части ускоренія той же величины $\dot{v}$, надо будетъ однородно приложить къ ней силу, имѣющую величину G_a, меньшую G_K.

Раздѣлимъ тѣло K на части: $a, b, c, \ldots\ldots h$ и опредѣлимъ величины $G_a, G_b, G_c, \ldots\ldots G_h$ однородныхъ силъ, сообщающихъ этимъ частямъ ускореніе той же величины $\dot{v}$.

Естественно допустить, что когда всѣ части $a, b, c, \ldots\ldots h$ собраны вмѣстѣ, образуя тѣло K, которое подвержено силѣ G_K, сообщающей ему ускореніе $\dot{v}$, то тогда къ части a однородно приложена по тому же направленію сила G_a, къ части b—сила G_b, къ части c—сила $G_c, \ldots\ldots$ къ части h—сила G_h и что величина силы G_K равняется суммѣ величинъ силъ, приложенныхъ къ частямъ $a, b, c, \ldots h$.

Какъ ни естественно это допущеніе, но оно не вытекаетъ изъ приведенныхъ выше началъ и опредѣленій; а потому мы должны поставить себѣ на видъ, что, дѣлая его, мы вводимъ слѣдующее начало:

Основное начало D. Величина однородной силы, сообщающей тѣлу какое-либо ускореніе, равняется суммѣ величинъ однородныхъ силъ того же направленія, сообщающихъ то же самое ускореніе частямъ тѣла, взятымъ въ отдѣльности.

На основаніи этого начала:

$$G_K = G_a + G_b + G_c + \ldots + G_h, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

гдѣ $G_K, G_a, G_b, G_c, \ldots\ldots G_h$ суть величины однородныхъ силъ одного и того же направленія, сообщающихъ тѣлу K и частямъ его: $a, b, c, \ldots\ldots h$, взятымъ въ отдѣльности, ускореніе $\dot{v}$.

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\mu(KA) = \mu(aA) + \mu(bA) + \mu(cA) + \ldots + \mu(hA), \ldots\ldots \quad (22)$$

потому что

$$\mu(KA) = \frac{G_K}{G_A}; \quad \mu(aA) = \frac{G_a}{G_A}; \ldots\ldots; \quad \mu(hA) = \frac{G_h}{G_A},$$

гдѣ G_A есть величина однородной силы, сообщающей тѣлу A ускореніе $\dot{v}$.

§ 7. Масса тѣла.

Если для двухъ какихъ-либо тѣлъ A и B отношеніе $\mu(BA)$ не равно единицѣ, то это означаетъ, что способность этихъ тѣлъ къ воспринятію дѣйствія однородныхъ силъ неодинакова; равныя силы сообщаютъ имъ не равныя ускоренія и для сообщенія имъ равныхъ ускореній должно приложить къ нимъ неодинаковыя силы.

Съ другой стороны мы знаемъ, что матерьяльное тѣло, находящееся въ поступательномъ движеніи, имѣетъ, по свойству инерціи, *стремленіе* сохранять величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія; такое стремленіе мы будемъ называть *инертностью* тѣла.

Инертность тѣла есть свойство противоположное способности его воспринимать дѣйствіе однородныхъ силъ: чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ меньше вышеупомянутая способность, и обратно.

Слѣдовательно, инертность двухъ тѣлъ A и B неодинакова, если $\mu(BA)$ не равно единицѣ; большею инертностью обладаетъ то изъ этихъ двухъ тѣлъ, которое получаетъ меньшее ускореніе при той же величинѣ приложенной силы и которое требуетъ большей силы для сообщенія ему ускоренія, одинаковаго съ другимъ тѣломъ.

Поэтому, отношеніе между величинами инертностей тѣлъ B и A полагаютъ равнымъ дроби $\mu(BA)$, то есть равнымъ отношенію величинъ G_B и G_A однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ, или отношенію величинъ $\dot{V}_A$ и $\dot{V}_B$ ускореній, сообщаемыхъ тѣламъ A и B однородными силами, равными между собою.

Чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ больше въ немъ того, что обладаетъ свойствомъ инерціи, то есть матеріи; поэтому, по величинѣ инертности тѣла судятъ о количествѣ заключающейся въ немъ матеріи, полагая, что $\mu(BA)$ есть отношеніе количества матеріи тѣла B къ количеству матеріи тѣла A.

Количество матеріи тѣла называется *массою* его.

Опредѣленіе с. Отношеніе массъ двухъ тѣлъ обратно пропорціонально отношенію ускореній, сообщаемыхъ этимъ тѣламъ однородными и прямопротивоположными силами взаимнодѣйствія между ними, или вообще какими бы то ни было равными между собою силами, однородно-приложенными къ этимъ тѣламъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе массъ двухъ тѣлъ равно отношенію величинъ однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ.

$$\frac{m_B}{m_A}=\mu(BA)=\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B}=\frac{G_B}{G_A}, \qquad (23)$$

гдѣ m_B и m_A означаютъ массы тѣлъ B и A.

Означимъ черезъ m_K, m_a, m_b, m_c,..... m_h массы тѣла K и частей его: $a, b, c, \ldots h$; на основаніи послѣдняго опредѣленія, равенство (22) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{m_K}{m_A}=\frac{m_a}{m_A}+\frac{m_b}{m_A}+\frac{m_c}{m_A}+\ldots+\frac{m_h}{m_A}$$

и отсюда слѣдуетъ:

$$m_K=m_a+m_b+m_c+\ldots+m_h, \qquad (24)$$

то есть: *масса тѣла равна суммѣ массъ всѣхъ частей его; это даетъ намъ право говорить, что масса тѣла, понятіе о которой составляется, на основаніи опредѣленія с, по величинѣ инертности тѣла, есть количество матеріи, заключающейся въ тѣлѣ.*

Послѣ сказаннаго въ послѣднихъ параграфахъ, численное отношеніе между величинами F_B и F_A однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ ускоренія $\dot{v}_B$ и $\dot{v}_A$, выразится такъ:

$$\frac{F_B}{F_A}=\frac{m_B\,\dot{v}_B}{m_A\,\dot{v}_A}, \qquad (25)$$

то есть: *численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу B, а*

другая къ тѣлу A, получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на численное отношеніе массъ тѣлъ.

§ 8. Единица массы. Единица величины силы.

Изъ формулы (25) видно, что для измѣренія величинъ силъ надо измѣрять ускоренія и массы.

Измѣреніе массы какого либо тѣла имѣетъ цѣлью опредѣлить, въ какомъ численномъ отношеніи находится масса тѣла къ единицѣ массы.

Въ научныхъ изслѣдованіяхъ чаще всего употребляются французскія единицы массы: килограммъ, граммъ, миллиграммъ. Килограммъ есть масса, равная массѣ платиноваго цилиндра, хранящагося въ государственномъ архивѣ Франціи и извѣстнаго подъ именемъ: le kilogramme prototype en platine des Archives; при изготовленіи его имѣлось въ виду сдѣлать массу его равною массѣ кубическаго дециметра чистой воды, имѣющей температуру 4^0 Цельзія и находящейся подъ нормальнымъ *) атмосфернымъ давленіемъ; но, по наблюденіямъ Купфера и изслѣдованіямъ W. H. Miller'a, масса кубическаго дециметра воды при вышесказанныхъ температурѣ и давленіи равна 1000013 миллиграммовъ, то есть на 13 миллиграммовъ болѣе массы килограмма.

Русскій фунтъ есть масса 25,01893 кубическихъ дюймовъ воды, имѣющей температуру $13{,}5^0$ Реомюра; русскій фунтъ = 409,497 граммовъ и килограммъ = 2,442022 фунта.

Англійскій new **) standard pound, заключающій 7000 грановъ = 453,59265 граммовъ и килограммъ = 2,2046212 n. st. pound = 15432,34874 грановъ.

Измѣреніе массъ дѣлается при помощи приборовъ, назначеніе которыхъ состоитъ въ томъ, чтобы убѣдиться въ равенствѣ массъ

---

*) Подъ нормальнымъ атмосфернымъ давленіемъ подразумѣвается здѣсь давленіе, производимое атмосферою на широтѣ Парижа и на уровнѣ моря, когда барометръ стоитъ на 760 миллиметрахъ ртутнаго столба, приведеннаго къ 0° Цельзія.

**) Съ 1855 года.

двухъ тѣлъ по равенству величинъ силъ тяжести, приложенныхъ къ этимъ тѣламъ; употребительнѣйшій и точнѣйшій приборъ этого рода—рычажные равноплечные вѣсы.

Слѣдуетъ замѣтить, что теорія всѣхъ такихъ приборовъ основывается, между прочимъ, на началѣ равенства и противоположности силъ взаимнодѣйствія между малѣйшими частицами тѣлъ.

Кромѣ вѣсовъ надо имѣть еще и разновѣсъ, изъ гирь котораго можно составить массу какой угодно величины, заключающейся въ предѣлахъ прочности и чувствительности вѣсовъ.

Самое измѣреніе данной массы заключается въ опредѣленіи суммы массъ гирь, уравновѣшивающихъ эту массу на вѣсахъ.

Такимъ образомъ мы опредѣляемъ численное отношеніе между данною массою m и единицею массы; поэтому m выражается именованнымъ числомъ, напримѣръ:
масса кубическ. сантиметра ртути, имѣющей температуру 0^0 по Цельзію$=$

$$13{,}59618.(\text{грамм.})=0{,}01359618\ (\text{килогр.});$$

масса земли$=6{,}14\,.\,10^{27}.(\text{грамм.})=6{,}14\,.\,10^{24}.(\text{килогр.})$

За единицу величинъ силъ принимается величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, масса котораго равна единицѣ массы, и сообщающей ему ускореніе, равное единицѣ ускореній.

Положивъ въ равенствѣ (25): $m_A=$(ед. масс.), $\dot{v}_A=$(ед. ускор.), мы получимъ:

$$\frac{F_B}{(\text{ед. силы})}=\frac{m_B}{(\text{ед. массы})}\,\frac{\dot{v}_B}{(\text{ед. ускорен.})}, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(26)}$$

то есть: отвлеченное число, показывающее, во сколько разъ величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу B и сообщающей ему ускореніе $\dot{v}_B$, болѣе единицы силы, равняется произведенію двухъ другихъ отвлеченныхъ чиселъ, одно изъ которыхъ выражаетъ отношеніе между массою тѣла и единицею массы, а другое есть отношеніе ускоренія $\dot{v}_B$ къ единицѣ ускоренія.

Если же мы примемъ, что единица силы *равна* произведенію изъ единицы массы на единицу ускоренія:

$$(\text{ед. силы}) = (\text{ед. массы}).(\text{ед. ускорен.}), \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

то тогда, вмѣсто равенства (26), будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$F_B = m_B \dot{v}_B, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

которое имѣетъ тотъ же самый смыслъ, что и равенство (26), но выражаетъ величину силы именованнымъ числомъ въ величинѣ единицы силы.

Единица силы, или, вѣрнѣе, единица величинъ силъ, есть единица сложная, величина которой опредѣляется величинами единицъ длины, времени и массы; символъ ея величины—слѣдующій:

$$(\text{ед. силы}) = \frac{(\text{ед. массы})\ (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})^2} \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

По предложенію образовавшейся при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ особой коммиссіи для выбора и наименованія единицъ величинъ, встрѣчающихся въ математической физикѣ *), принята система сложныхъ единицъ, основанная на слѣдующихъ простыхъ единицахъ:

величина единицы длины: сантиметръ,
величина единицы времени: секунда средняго времени,
величина единицы массы: граммъ.

Единицу силы, основанную на этихъ единицахъ длины, времени и массы, предложено называть: dynamy (отъ греческаго слова: δύναμις), или, сокращенно: dyne; мы будемъ называть ее диною.

Дина есть величина силы, которая, будучи однородно приложена къ покоющемуся грамму, заставляетъ каждую точку его пройти 0,5 сантиметра въ первую секунду.

$$\text{Дина} = \frac{(\text{граммъ}).(\text{сантиметръ})}{(\text{секунда})^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

---

*) Comittee for the Selection and Nomenclature of Dynamical and Electrical Units; эта коммиссія образовалась въ 1874 году изъ слѣдующихъ лицъ: W. Thomson, Profess. Foster, J. C. Maxwell, G. J. Stoney, Fleeming Jenkin, Dr. Siemens, Mr. F. Bramwell, Profess. Everett.

Въ житейской практикѣ выражаютъ величины силъ въ килограммахъ, пудахъ, фунтахъ и проч., причемъ подъ этими именами понимаютъ вѣса этихъ массъ; конечно, выражаясь такимъ образомъ, не даютъ точнаго понятія о величинѣ силъ, такъ какъ вѣсъ одной и той же массы различенъ въ разныхъ мѣстахъ земли; такъ, вѣсъ одного килограмма подъ широтою λ и на высотѣ h сантиметровъ надъ уровнемъ океана равенъ:

$$1000.(\text{граммъ.}).g^{*})=$$

$$=(980{,}6056-2{,}5028\cos 2\lambda-0{,}000003h).1000.(\text{динам.})$$

Дина есть сила довольно малой величины (такъ что, напр., вѣсъ одного килограмма на экваторѣ равняется 980605 динамъ слишкомъ), поэтому комиссія предложила употребленіе придаточныхъ словъ:

	deca	hecto	kilo	mega	
для обозначенія:	10	100	1000	1000000	единицъ;

напримѣръ, килодина и мегадина суть тысяча и милліонъ динъ; вѣсъ килограмма на экваторѣ почти равенъ одной мегадинѣ.

Для выраженія долей единицы:

0,1	0,01	0,001	0,000001

предложены термины:

deci	centi	milli	micro.

Вѣсъ русскаго фунта въ С.-Петербургѣ (гдѣ $g=981{,}85$):

$$4{,}02\ .\ 10^5\,(\text{дин.}).$$

Вѣсъ англійскаго новаго фунта (полагая $g=981\frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2}$):

$$4{,}45\ .\ 10^5\,(\text{дин.}).$$

§ 9. Средняя плотность тѣла. Плотность вещества въ какой-либо точкѣ тѣла.

Величина отношенія между массою тѣла и величиною его объема называется *среднею плотностью тѣла.*

---

*) Величина g приведена на стр. 236 кинематич. части, въ выноскѣ.

Величина единицы плотности выражается слѣдующимъ символомъ:

$$(\text{единица плотности}) = \frac{(\text{ед. массы})}{(\text{ед. длины})^3}.$$

Средняя плотность тѣла равна единицѣ плотности, если масса его во столько разъ болѣе единицы массы, во сколько разъ объемъ его болѣе единицы объема.

Если всякая, даже самая мельчайшая, часть тѣла имѣетъ ту же самую среднюю плотность, какъ и цѣлое тѣло, то такое тѣло называется *тѣломъ однородной плотности;* величину средней плотности такого тѣла называютъ *плотностью* его.

$$\text{Плотность воды при } 4^0C = 1{,}000013\frac{(\text{граммъ.})}{(\text{сантиметр.})^3}.$$

Когда плотность σ однороднаго вещества извѣстна, то масса объема V этого вещества опредѣлится чрезъ умноженіе V на σ.

Для вещества неоднородной плотности, средняя плотность части тѣла будетъ имѣть различную величину, смотря по величинѣ взятой части.

Положимъ, что мы беремъ все болѣе и болѣе уменьшающіяся части тѣла, заключающія въ себѣ одну и ту же точку его: $\mathfrak{m}$; пусть Δm есть масса, ΔO—объемъ нѣкоторой такой части.

По мѣрѣ уменьшенія Δm, средняя плотность:

$$\frac{\Delta m}{\Delta O}$$

приближается къ нѣкоторому предѣлу, который называется *плотностью вещества въ точкѣ* $\mathfrak{m}$.

Слѣдовательно, *плотность матеріи въ точкѣ* $\mathfrak{m}$ *тѣла есть средняя плотность безконечно малаго объема* dO, *заключающаго точку* $\mathfrak{m}$ *внутри себя или на своей поверхности:*

$$\sigma = \frac{dm}{dO}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

гдѣ dm есть масса объема dO, а σ плотность матеріи въ точкѣ $\mathfrak{m}$. Для тѣла неоднородной плотности σ есть функція координатъ точки $\mathfrak{m}$.

Масса всего тѣла выразится интеграломъ:

$$M=\int\int\int \varrho dO,$$

взятымъ по всему объему тѣла.

§ 10. Количество движенія тѣла, движущагося поступательно.

Произведеніе изъ скорости тѣла, движущагося поступательно на его массу, называется *количествомъ движенія* (Quantitas motus. Quantité de mouvement. Bewegungsgrösse. The momentum) этого тѣла; оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица колич. движ.})=\frac{(\text{ед. массы})\ (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})}.$$

Подобно однородной силѣ, количество движенія можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ какой-либо точки тѣла по направленію скорости; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія тѣла болѣе единицы количествъ движенія.

Подъ *измѣненіемъ количества движенія* тѣла въ теченіе промежутка времени отъ момента t до другого момента t_1 мы будемъ подразумѣвать геометрическую разность между количествами движенія mv_1 и mv тѣла въ моменты t_1 и t, то есть такое количество движенія, которое нужно геометрически сложить съ mv для того, чтобы получить mv_1.

Тогда формулѣ (28) можно дать слѣдующее толкованіе:

Величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, движущемуся поступательно, измѣряется отношеніемъ измѣненія количества движенія тѣла въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени къ величинѣ самаго промежутка.

§ 11. Основные принципы въ томъ видѣ, въ какомъ они приведены Ньютономъ.

Честь открытія начала инерціи и начала параллелограмма силъ въ примѣненіи къ движенію, производимому силами, приписываютъ Галилею

(1564—1642), который высказалъ эти начала и примѣнилъ ихъ къ объясненію движенія брошенныхъ тяжелыхъ тѣлъ въ своемъ сочиненіи: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, изданномъ впервые въ Лейденѣ въ 1638 году.

Повидимому, можетъ показаться страннымъ, что начало инерціи было открыто сравнительно недавно, между тѣмъ, какъ дошедшія до насъ сочиненія Архимеда*), относящіяся къ ученію о равновѣсіи силъ, свидѣтельствуютъ о высокомъ состояніи статики еще у древнихъ; такая отсталость ученія о движущемъ дѣйствіи силъ объясняется долгимъ преобладаніемъ философіи Аристотеля, по ученію котораго самое совершенное и начальное движеніе есть круговое.

Изложеніе основныхъ началъ механики въ томъ видѣ, въ какомъ они примѣняются и до сихъ поръ, было сдѣлано Исаакомъ Ньютономъ (1642—1727) въ его книгѣ: Philosophiae naturalis principia mathematica, изданной въ первый разъ въ 1687 году, то есть 49 лѣтъ спустя послѣ перваго изданія Discorsi. Ньютонъ высказываетъ основныя начала въ видѣ трехъ „законовъ движенія“ (Axiomata, sive Leges Motus), но предпосылаетъ имъ нѣсколько опредѣленій (Definitiones) и кромѣ того присоединяетъ къ нимъ примѣчанія (Corollaria). Мы приведемъ здѣсь эти „законы движенія“ и нѣкоторыя изъ опредѣленій въ томъ видѣ, какъ они помѣщены въ Principia, но въ иномъ порядкѣ.

Въ первомъ опредѣленіи Ньютонъ даетъ понятіе о количествѣ матеріи тѣла, какъ о произведеніи плотности тѣла на его объемъ; второе опредѣленіе слѣдующее:

Definitio II. Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.

(Количество движенія измѣряется совокупно скоростью и количествомъ матеріи).

Начало инерціи выражается первымъ изъ „законовъ движенія“ совмѣстно съ опредѣленіемъ III-мъ.

Lex. I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi

*) Архимедъ жилъ въ III вѣкѣ до Р. Х. (родился вѣроятно около 287 г., умеръ въ 212 г. до Р. Х.); изъ сочиненій его до насъ дошли слѣдующія:

1) Объ опредѣленіи центровъ инерціи тѣлъ разнаго вида: Ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων.

2) Теорія рычага: de Aequiponderantibus.

3) Гиростатика: de iis quae vehuntur in aqua, возстановленное Commendin'омъ въ 1565 г.

uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

(Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состоянiи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенiя, если дѣйствующiя на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состоянiе).

Въ опредѣленiи III-мъ говорится, что тѣло, предоставленное себѣ, имѣетъ стремленiе къ сохраненiю своего состоянiя покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенiя вслѣдствiе свойства присущаго матерiи и называемаго: inertia materiae.

Силѣ дается слѣдующее опредѣленiе:

Definitio IV. Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

(Приложенная сила есть производимое на тѣло принужденiе къ измѣненiю его состоянiя покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенiя).

Второй „законъ движенiя“ говоритъ о величинѣ дѣйствiя, производимаго силою, причемъ предполагается, что представленiя о величинѣ силы и о направленiи ея понятны сами по себѣ; „законъ“ этотъ выраженъ въ очень сжатой формѣ:

Lex. II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

(Измѣненiе движенiя пропорцiонально приложенной движущей силѣ и происходитъ по той прямой линiи, по которой дѣйствуетъ сила).

Эту фразу слѣдуетъ понимать такъ:

Измѣненiе количества движенiя (см. § 10) пропорцiонально величинѣ приложенной движущей силы и направлено вдоль по ней.

Начало параллелограмма силъ высказано въ слѣдующемъ примѣчанiи:

Corollarium I. Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

(При совокупномъ дѣйствiи двухъ силъ тѣло описываетъ дiагональ параллелограмма въ теченiе того же времени, какъ и стороны параллелограмма при дѣйствiи силъ порознь).

Третiй „законъ“—слѣдующiй:

Lex. III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

(Всякому дѣйствiю соотвѣтствуетъ противодѣйствiе, равное и противоположное; то есть дѣйствiя двухъ тѣлъ одно на другое всегда равны и направлены противоположно).

§ 12. Говоря о матерьяльномъ тѣлѣ, подверженномъ дѣйствію однородно-приложенныхъ къ нему силъ и находящемся, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, либо въ абсолютномъ покоѣ, мы не имѣли надобности упоминать ни о формѣ тѣла, ни объ его размѣрахъ, ни о плотности вещества его; въ разсужденіяхъ, приведенныхъ въ §§ 1—9, говорилось только о движеніи и ускореніи которой-либо изъ точекъ тѣла и объ его массѣ.

Распредѣленіе массы вокругъ той точки поступательно-движущагося тѣла, на движеніе которой мы обращаемъ вниманіе, можетъ быть какое угодно; мы можемъ даже вообразить себѣ, что вся масса тѣла сосредоточена въ этой точкѣ.

Масса, сосредоточенная въ одной геометрической точкѣ, есть воображаемый предметъ, извѣстный подъ именемъ *матерьяльной точки* и имѣющій существенное значеніе въ аналитической механикѣ, какъ будетъ объяснено въ концѣ слѣдующей главы.

ГЛАВА II.

Основныя начала механики свободныхъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 13. Матерьяльная точка.

Матерьяльная точка есть масса, которую мы воображаемъ себѣ сосредоточенною въ одной геометрической подвижной точкѣ.

Матерьяльная точка вполнѣ свободна, если она можетъ имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію и притомъ скорость ея не зависитъ отъ скоростей какихъ-либо другихъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 14. Основныя начала въ примѣненіи къ свободной матерьяльной точкѣ.

Основныя начала, изложенныя въ предыдущей главѣ, примѣняются къ матерьяльной точкѣ въ слѣдующемъ видѣ:

Основное начало 1-е. (Начало инерціи матерьяльной точки)

Всякая матерьяльная точка, по свойству инерціи матеріи, стремится сохранить ту абсолютную скорость, которую она имѣетъ.

Пока на нее не дѣйствуютъ никакія силы, она дѣйствительно сохраняетъ свою абсолютную скорость; если послѣдняя равна нулю, то точка остается въ абсолютномъ покоѣ; если эта скорость не равна нулю, то точка совершаетъ абсолютное движеніе по прямой линіи равномѣрно.

Каждой силѣ, дѣйствующей на матерьяльную точку, мы приписываемъ:

а) *мѣсто приложенія*, которое есть сама матерьяльная точка,

б) *направленіе*,

в) *величину*, измѣряемую въ единицахъ силы (см. § 8, (29)); представленіе о силѣ приложенной къ матерьяльной точкѣ составляется изъ совокупности этихъ трехъ понятій.

Основное начало 2-е. Ускореніе, сообщаемое свободной матерьяльной точкѣ силою, приложенною къ ней, имѣетъ направленіе этой силы и равно величинѣ силы, дѣленной на массу матерьяльной точки.

Основное начало 3-е. (Начало параллелограмма силъ)

Ускореніе, сообщаемое свободной матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно приложенными къ ней силами, есть геометрическая сумма, составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ порознь.

Эти три начала необходимы и достаточны для того, чтобы, основываясь на нихъ, изложить механику свободныхъ матерьяльныхъ точекъ; первое начало опредѣляетъ свойство, которое мы приписываемъ матерьяльной точкѣ; два послѣднія начала опредѣляютъ дѣйствіе, производимое на матерьяльную точку силами, приложенными къ ней.

§ 15. Цѣль введенія понятія о матерьяльной точкѣ въ механику.

Въ концѣ предыдущей главы было высказано, что, разсматривая движеніе матерьяльной точки, мы смотримъ на нее, какъ на представительницу поступательнаго движенія нѣкотораго тѣла, масса котораго, равная массѣ матерьяльной точки, распредѣлена какимъ бы то ни было образомъ вокругъ той точки, движеніе которой мы разсматриваемъ; притомъ силы, которыя мы предполагаемъ приложенными къ матерьяльной точкѣ, должны быть приложены къ тѣлу однородно.

Понятно, что только для этого не стоило бы вводить въ механику понятіе о матерьяльной точкѣ, если бы не имѣлось въ виду дать ей болѣе обширной и существенной роли.

Наиболѣе важныя слѣдствія проистекаютъ изъ того обстоятельства, что матерьяльная точка, подобно геометрической, не имѣетъ размѣровъ.

Поэтому, говоря о матерьяльной точкѣ, мы избѣгаемъ необходимости входить въ какія-либо разсужденія относительно вращательнаго движенія массы, сосредоточенной въ точкѣ; мы даже не можемъ говорить о вращательномъ движеніи точки, то есть того, что не имѣетъ размѣровъ.

По той же причинѣ терминъ: «однородно-приложенная сила» теряетъ значеніе, если рѣчь идетъ о силѣ, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Назначеніе матерьяльной точки въ механикѣ состоитъ въ томъ, чтобы замѣнять собою такія тѣла или части тѣла, размѣрами которыхъ мы пренебрегаемъ сравнительно съ длинами, разсматриваемыми въ вопросѣ.

Такъ, напримѣръ, въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ тѣла разсматриваются какъ собранія частицъ и въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ форму и размѣры частицъ, каждую частицу мы воображаемъ себѣ замѣненною матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ частицы.

Точно также, въ тѣхъ вопросахъ небесной механики, въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ вращательныхъ

движеній свѣтилъ вокругъ ихъ осей и можно пренебречь размѣрами тѣлъ по отношенію ко взаимнымъ разстояніямъ между ними, каждое свѣтило замѣняется матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ свѣтила.

Мы увидимъ далѣе, что даже тогда, когда матерьяльныя тѣла принимаются сплошными, намъ приходится, для рѣшенія какихъ-либо кинетическихъ вопросовъ относительно этихъ тѣлъ, или замѣнять каждое тѣло нѣкоторою системою матерьяльныхъ точекъ, или основываться въ нашихъ разсужденіяхъ на результатахъ, полученныхъ изъ механики системы матерьяльныхъ точекъ.

По этимъ причинамъ мы прежде всего должны изложить механику матерьяльныхъ точекъ и системъ матерьяльныхъ точекъ, что и составляетъ содержаніе этой книги.

ГЛАВА III.

Механика свободной матерьяльной точки.

§ 16. Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ. Силы, взаимно уравновѣшивающіяся.

Механика свободной матерьяльной точки основывается на трехъ основныхъ началахъ, выраженныхъ въ § 14-мъ предыдущей главы.

Все, сказанное въ § 3 первой главы относительно однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ одному и тому же матерьяльному тѣлу, примѣняется къ силамъ, одновременно-приложеннымъ къ одной матерьяльной точкѣ.

Равнодѣйствующею нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, называется такая сила, которая одна сообщаетъ точкѣ то же самое ускореніе (той же величины и того же направленія), какое сообщаютъ ей одновременно-приложенныя силы всѣ вмѣстѣ.

Силы, одновременно-приложенныя къ одной матерьяльной точкѣ, называются *составляющими* силами.

Если ускореніе, сообщаемое матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно-приложенными къ ней силами, равно нулю, то приложенныя силы называютъ *взаимно-уравновѣшивающимися*, или *силами находящимися въ равновѣсіи*.

Если силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, находятся въ равновѣсіи въ теченіе конечнаго промежутка времени, то, въ теченіи этого промежутка, матерьяльная точка будетъ находиться въ покоѣ, или въ равномѣрномъ прямолинейномъ движеніи по инерціи.

Каждую силу, приложенную къ матерьяльной точкѣ, можно изобразить длиною, отложенною по направленію силы отъ точки приложенія ея и заключающею столько единицъ длины, сколько въ изображаемой силѣ заключается единицъ силы.

Длины, изображающія различныя силы, прилагаемыя къ одной и той же матерьяльной точкѣ, будутъ пропорціональны длинамъ, изображающимъ ускоренія, сообщаемыя этими силами этой точкѣ.

Длина, изображающая равнодѣйствующую нѣсколькихъ составляющихъ силъ, будетъ имѣть величину и направленіе геометрической суммы длинъ, изображающихъ составляющія силы.

Пусть F означаетъ величину какой-либо силы, приложенной къ нѣкоторой матерьяльной точкѣ; углы, составляемые направленіемъ ея съ положительными направленіями осей координатъ $X, У, Z$, означимъ черезъ (F,X), $(F,У)$, (F,Z).

Величины:

$$F\cos(F,X),\ F\cos(F,У),\ F\cos(F,Z)$$

называются *проэкціями силы F на оси координатъ* X, $У$, Z; онѣ изображаются проэкціями на тѣ же оси длины, изображающей силу F.

Такъ какъ проэкція на какое-либо направленіе длины, изображающей равнодѣйствующую силу, равняется суммѣ проэкцій длинъ, изображающихъ составляющія силы, то отсюда слѣдуетъ, что *проэкція на какое-либо направленіе равнодѣйствующей нѣсколькихъ*

составляющих сил, приложенных к матерьяльной точкѣ, равна суммѣ проэкцій составляющих сил на то же направленіе.

Пусть $F1$, $F2$, $F3$, ... Fk суть величины составляющих сил, а F—величина их равнодѣйствующей; проэкціи их на оси координат удовлетворяют слѣдующим равенствам:

$$\left.\begin{array}{l} F\cos(F,X)=F1\cos(F1,X)+F2\cos(F2,X)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+Fk\cos(Fk,X) \\ F\cos(F,Y)=F1\cos(F1,Y)+F2\cos(F2,Y)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+Fk\cos(Fk,Y) \\ F\cos(F,Z)=F1\cos(F1,Z)+F2\cos(F2,Z)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+Fk\cos(Fk,Z) \end{array}\right\},\ldots \quad (32)$$

которыя могут быть замѣнены слѣдующим символическим равенством:

$$\overline{F}=\overline{F}1+\overline{F}2+\ldots+\overline{F}k \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Отсюда, напримѣр для случая трех составляющих сил G, H, K, не лежащих в одной плоскости, слѣдует:

$$F^2=G^2+H^2+K^2+2HK\cos(H,K)+2KG\cos(K,G)+ \\ +2GH\cos(G,H),$$

то есть, что равнодѣйствующая представляется діагональю параллелопипеда, построеннаго на сторонах, представляющих составляющія силы.

Если

$$K=0,$$

то:

$$F=\sqrt{G^2+2GH\cos(G,H)+H^2};$$

равнодѣйствующая двух составляющих сил представляется діаго-

налью параллелограмма, построеннаго на сторонахъ, изображающихъ составляющія силы.

Если G направлена по оси X, H—по оси $У$, K—по оси Z, то равнодѣйствующая будетъ представляться діагональю прямоугольнаго параллелопипеда, построеннаго на этихъ составляющихъ силахъ, параллельныхъ осямъ координатъ; изъ чего слѣдуетъ, что проэкціи какой-либо силы на оси прямоугольныхъ координатъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющія этой силы по этимъ осямъ.

Для косоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ проэкціи какой-либо силы на эти оси не равны составляющимъ ея по этимъ осямъ; пусть G есть составляющая силы F по оси X_1, H — составляющая по оси $У_1$, K — составляющая по оси Z_1; проэктируя силу F и составляющія ея на направленія осей X_1, $У_1$, Z_1, получимъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} F\cos(F,X_1)&=G+H\cos(У_1X_1)+K\cos(Z_1X_1)\\ F\cos(F,У_1)&=G\cos(X_1У_1)+H+K\cos(Z_1У_1)\\ F\cos(F,Z_1)&=G\cos(X_1Z_1)+H\cos(У_1Z_1)+K\end{aligned}\right\}\ldots(34)$$

Для равновѣсія силъ $F1$, $F2$, ... Fp, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, необходимо, чтобы сумма проэкцій этихъ силъ на всякое направленіе равнялась нулю; а для этого достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проэкцій ихъ на три какія-либо направленія, не лежащія въ одной плоскости, напримѣръ на оси координатъ.

Символически, эти условія можно изобразить равенствомъ:

$$\overline{F}1+\overline{F}2+\overline{F}3+\ldots+\overline{F}p=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (35)$$

Примѣчаніе. Въ послѣдующихъ параграфахъ очень часто придется пользоваться формулами, заключающими выраженія проэкцій силъ, приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ, на координатныя оси различныхъ координатныхъ системъ.

По большей части приходится пользоваться ортогональными координатными системами, то есть такими, координатныя линіи которыхъ пересѣкаются взаимно-перпендикулярно; таковы: прямо-

линейная система координатъ съ прямоугольными осями, сферическая система и кругово-цилиндрическая система координатъ.

Для краткости формулъ мы условимся обозначать проэкціи силъ на координатныя оси тѣми же буквами, которыми обозначаемъ самыя оси, но съ надлежащими значками; напримѣръ, проэкціи силъ $F1$, $F2, \ldots . Fk$ на оси X, $У$, Z мы будемъ обозначать такъ:

$$X1,\ X2, \ldots . Xk$$

$$У1,\ У2, \ldots . Уk$$

$$Z1,\ Z2, \ldots . Zk,$$

а проэкціи на тѣ же оси равнодѣйствующей F этихъ силъ такъ:

$$X = F\cos(F,X) = X1 + X2 + \ldots . + Xk$$

$$У = F\cos(F,У) = У1 + У2 + \ldots . + Уk$$

$$Z = F\cos(F,Z) = Z1 + Z2 + \ldots . + Zk.$$

Проэкціи какой-либо силы Fk на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, неизмѣнно-связанныя съ какою-либо неизмѣняемою средою, мы будемъ обозначать такъ:

$$\Xi k = Fk\cos(Fk,\Xi)$$

$$\Upsilon k = Fk\cos(Fk,\Upsilon)$$

$$\mathbf{Z}k = Fk\cos(Fk,\mathbf{Z}).$$

Проэкціи той же силы на координатныя оси α, β, γ сферической или кругово-цилиндрической системы координатъ мы будемъ обозначать такъ:

$$Аk = Fk\cos(Fk,\alpha)$$

$$Бk = Fk\cos(Fk,\beta)$$

$$\Gamma k = Fk\cos(Fk,\gamma).$$

Такъ какъ во всякой ортогональной системѣ три координатныя оси всякой точки взаимно-перпендикулярны, то проэкціи силы на эти оси суть вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющія ея по нимъ.

Въ косоугольной прямолинейной системѣ координатъ, также какъ и во всякой криволинейной косоугольной системѣ, подобнаго равенства не существуетъ; означая черезъ X, $У$, Z направленія осей прямолинейной косоугольной системы, мы будемъ тогда подъ знаками: Xk, $Уk$, Zk подразумѣвать *составляющія по этимъ осямъ силы* Fk.

§ 17. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки.

На основаніи приведенныхъ въ § 14 основныхъ началъ, ускореніе свободной матерьяльной точки, масса которой равна m и къ которой приложены силы: $F1$, $F2, \ldots . Fk$, должно быть равно величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ, дѣленной на массу точки, и должно быть направлено по равнодѣйствующей; это выражается слѣдующими равенствами:

a) въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X1 + X2 + \ldots . + Xk \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= У1 + У2 + \ldots . + Уk \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z1 + Z2 + \ldots . + Zk \end{aligned}\right\}, \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

b) въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right) &= \mathrm{A}1 + \mathrm{A}2 + \ldots . + \mathrm{A}k \\ \frac{m}{\rho}\,\frac{d\left(\rho^2\frac{d\Theta}{dt}\right)}{dt} &= \mathrm{B}1 + \mathrm{B}2 + \ldots . + \mathrm{B}k \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Gamma1 + \Gamma2 + \ldots . + \Gamma k \end{aligned}\right\}, \ldots \ldots \quad (37)$$

c) въ сферическихъ координатахъ:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-r\sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right)=\mathrm{A} \\ m\left(\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}-r\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right)=\mathrm{B} \\ \frac{m}{r\sin\varphi}\frac{d\left(r^2\sin^2\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt}=\Gamma \end{array}\right\}\dots\dots\dots(38)$$

Каждое изъ этихъ равенствъ выражаетъ, что проэкція на одну изъ координатныхъ осей равнодѣйствующей F равняется, помноженной на массу, проекціи ускоренія на ту же ось.

d) Въ прямолинейныхъ *косоугольныхъ* координатахъ равенства:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

выражаютъ, что *составляющія* по осямъ координатъ силы F равняются, помноженнымъ на массу, *составляющимъ* ускоренія.

e) Проэкція равнодѣйствующей на бинормаль *) траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою, должна быть равна нулю, проэкціи же ея на направленіе скорости и на направленіе радіуса кривизны траэкторіи должны быть пропорціональны соотвѣтствующимъ проэкціямъ ускоренія; а именно:

$$\left.\begin{array}{r} m\frac{dv}{dt}=F\cos(Fv) \\ m\frac{v^2}{\rho}=F\cos(F\rho) \\ O=F\cos(Fb) \end{array}\right\}\dots\dots\dots\dots\dots(39)$$

Если извѣстно движеніе матерьяльной точки, то, зная массу ея, мы можемъ, пользуясь вышеприведенными совокупностями равенствъ,

---

*) Бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны.

опредѣлить для всякаго момента движенія величину и направленіе равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.

На этомъ основаніи могутъ быть рѣшены, напримѣръ, слѣдующіе вопросы.

Примѣръ 1-й. Тяжелая матерьяльная точка описываетъ окружность радіуса R, находящуюся въ вертикальной плоскости; скорость точки постоянна. Опредѣлить величину и направленіе той силы, которая, слагаясь съ вѣсомъ матерьяльной точки, заставляетъ ее совершать такое движеніе.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось $У$ направимъ вертикально внизъ, ось X — горизонтально въ плоскости круга.

Движеніе точки по окружности радіуса R, съ постоянною скоростью a, выражается въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ, такъ:

$$x = R\cos\left(\frac{a}{R}t\right);\quad y = R\sin\left(\frac{a}{R}t\right);$$

проэкціи силы тяжести на оси X и $У$ суть:

$$X1 = 0;\quad У1 = mg;$$

проэкціи же другой силы опредѣлятся изъ уравненій (36) и окажутся имѣющими слѣдующія величины:

$$X2 = -m\frac{a^2}{R^2}x;\quad У2 = -m\frac{a^2}{R^2}y - mg = -m\frac{a^2}{R^2}\left(y + \frac{gR^2}{a^2}\right).$$

Изъ этихъ выраженій видно, что сила $F2$ постоянно направлена къ точкѣ C, находящейся на отрицательной оси $У$ въ разстояніи $g\frac{R^2}{a^2}$ отъ начала координатъ; величина же этой силы равна:

$$F2 = m\frac{a^2}{R^2}\overline{MC},$$

гдѣ $\overline{MC}$ есть разстояніе между матерьяльною точкою M и точкою C.

Примѣръ 2-й. Матерьяльная точка совершаетъ слѣдующее движеніе:

$$x = ae^{-kt}\cos\omega t,\quad y = be^{-kt}\sin\omega t,$$

находясь подъ вліяніемъ двухъ силъ: $F1$, направленной къ началу координатъ, и $F2$, направленной по касательной къ траэкторіи. Требуется опредѣлить эти силы.

Окажется, что:

$$F1 = m(\omega^2 + k^2)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F2 = 2kmv$$

и что сила $F2$ направлена противоположно скорости.

Слѣдовательно, первая сила есть притяженіе, пропорціональное разстоянію точки отъ начала координатъ, вторая же сила пропорціональна скорости точки и направлена противоположно скорости.

Величина и направленіе силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, могутъ измѣняться:

a) съ измѣненіемъ положенія матерьяльной точки въ пространствѣ,

b) въ той же точкѣ пространства съ теченіемъ времени;

c) кромѣ того, они могутъ зависѣть отъ величины и направленія скорости матерьяльной точки.

(Такъ, напримѣръ, сила притяженія, дѣйствующая по закону тяготѣнія на какую-либо матерьяльную точку со стороны однороднаго шара, имѣетъ величину, обратно пропорціональную квадрату разстоянія точки до центра шара; направлена же эта сила къ центру шара. Если шаръ сохраняетъ неподвижное положеніе въ пространствѣ, то сила притяженія имъ матерьяльной точки будетъ функціею только координатъ точки.

Если же центръ шара будетъ совершать какое-либо движеніе въ пространствѣ, то сила притяженія его въ каждой точкѣ пространства будетъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Примѣрами силъ, зависящихъ отъ скоростей, могутъ служить сопротивленія жидкостей и газовъ движенію погруженныхъ въ нихъ тѣлъ; такія силы называются *сопротивленіями срединъ;* въ примѣненіи къ матерьяльной точкѣ, сопротивленіе среды въ большинствѣ случаевъ принимаютъ противоположнымъ скорости точки и зависящимъ отъ скорости точки и плотности среды).

Вообще говоря, силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

Поэтому вторыя части равенствъ (36) суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ x, y, z и проэкцій скорости на оси координатъ;

а слѣдовательно, эти равенства суть три совокупныя дифференціальныя уравненія второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=\phi_1\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\phi_2\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\phi_3\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (40)$$

(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ)

Эти уравненія называются *дифференціальными уравненіями движенія матерьяльной точки*, *выраженными въ прямоугольныхъ координатахъ*.

Если вторыя части равенствъ (37) будутъ выражены въ функціяхъ времени, кругово-цилиндрическихъ координатъ ρ, θ, z, и ихъ производныхъ по времени: ρ', θ', z', то будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)&=\Theta_1\left(t,\ \rho,\ \theta,\ z,\ \frac{d\rho}{dt},\ \frac{d\theta}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\\ \frac{m}{\rho}\frac{d\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}&=\Theta_2\left(t,\ \rho,\ \theta,\ z,\ \frac{d\rho}{dt},\ \frac{d\theta}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\Theta_3\left(t,\ \rho,\ \theta,\ z,\ \frac{d\rho}{dt},\ \frac{d\theta}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\},\ \ldots (41)$$

гдѣ Θ_1, Θ_2, Θ_3 означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ.

Подобнымъ образомъ будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки въ сферическихъ координатахъ, если вторыя части равенства (38) будутъ выражены функціями сферическихъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Если вторыя части равенствъ (39) будутъ выражены функціями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ

пространствѣ, то эти равенства будутъ представлять собою особый видъ дифференціальныхъ уравненій движенія матерьяльной точки.

Вообще *дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки* могутъ быть представлены подъ весьма различнымъ видомъ, но какъ бы они ни были представлены, они *суть аналитическія выраженія того, что ускореніе матерьяльной точки имѣетъ направленіе и равно дѣленной на массу величинѣ равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ силъ, выражаемыхъ нѣкоторыми функціями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе матерьяльной точки въ пространствѣ.*

§ 18. Интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки; число постоянныхъ произвольныхъ; начальное положеніе и начальная скорость матерьяльной точки.

Если извѣстны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ данной массы, въ функціяхъ времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространствѣ, и требуется опредѣлить движеніе, совершаемое матерьяльною точкою подъ вліяніемъ этихъ силъ, то надо сначала выбрать систему координатъ, наиболѣе удобную для рѣшенія вопроса, и составить дифференціальныя уравненія движенія точки въ этихъ координатахъ.

Напримѣръ:

Примѣръ 3-й. Матерьяльная точка движется въ однородной средѣ, оказывающей сопротивленіе движенію, пропорціональное первой степени скорости; каждая изъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей координатъ притягиваетъ матерьяльную точку съ силою, перпендикулярною къ плоскости и пропорціональною первой степени разстоянія отъ нея. Пусть $2km$, λm, μm, νm суть коэффиціэнты: сопротивленія среды и притяженій перпендикулярныхъ къ плоскостямъ YZ, ZX, XY. Требуется опредѣлить движеніе.

Дифференціальныя уравненія движенія, съ составленія которыхъ начинается процессъ рѣшенія вопроса, мы напишемъ въ этомъ случаѣ въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ.

Сопротивленіе движенію, равное $2kmv$, направлено противоположно скорости, поэтому проэкція его на ось X равна: $-2mkx'$.

Изъ трехъ притяженій одно параллельно оси X и направлено въ отрицательную сторону ея, если $X>0$; два другія притяженія перпендикулярны къ этой оси.

Поэтому одно изъ дифференціальныхъ уравненій движенія будетъ слѣдующее:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x;$$

а два другія:

$$my'' = -2mky' - m\mu y; \quad mz'' = -2mkz' - m\nu z.$$

Для большей опредѣлительности изложенія мы будемъ предполагать, что дифференціальныя уравненія составлены въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ; но все, что будетъ здѣсь сказано, может быть примѣнено съ весьма незначительными измѣненіями ко всякимъ другимъ координатамъ.

Составленныя дифференціальныя уравненія должны послужить для опредѣленія функцій $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, опредѣляющихъ координаты движущейся точки для всякаго момента опредѣляемаго движенія.

Эти функціи должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ для всякаго момента движенія, обращая ихъ въ тождества; то есть функція времени, заключающаяся во второй части каждаго изъ тождествъ:

$$mf_1''(t) = \phi_1\left(t, f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t)\right)$$
$$mf_2''(t) = \phi_2\left(t, f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t)\right)$$
$$mf_3''(t) = \phi_3\left(t, f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t)\right)$$

должна быть тождественна съ функціею времени, заключающеюся въ первой части его.

Для опредѣленія функцій f_1, f_2, f_3 мы можемъ пользоваться составленными дифференціальными уравненіями и всѣми равенствами, изъ нихъ получаемыми.

Дифференціальныя уравненія даютъ намъ только выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ извѣстныхъ намъ функціяхъ прочихъ семи величинъ (времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ).

Взявъ отъ дифференціальныхъ уравненій производныя по времени и замѣнивъ въ полученныхъ равенствахъ вторыя производныя координатъ ихъ выраженіями, мы получимъ выраженія третьихъ производныхъ координатъ въ функціяхъ тѣхъ же семи величинъ: t, x, y, z, x', y', z'.

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, мы выразимъ производныя какого угодно порядка (выше 1-го) отъ координатъ по времени въ извѣстныхъ намъ функціяхъ отъ t, x, y, z, x', y', z'.

Пусть t_0 есть какой-либо моментъ движенія; x_0, y_0, z_0, — координаты матерьяльной точки и x_0', y_0', z_0', — проэкціи на оси координатъ скорости точки въ этотъ моментъ; какъ сейчасъ сказано, производныя второго и высшихъ порядковъ въ этотъ моментъ выразятся нѣкоторыми извѣстными намъ функціями семи величинъ t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'; означимъ величины этихъ производныхъ такъ:

$$x_0'',\ y_0'',\ z_0'',\ x_0''',\ y_0''',\ z_0''',\ \ldots\ x_0^{(n)},\ y_0^{(n)},\ z_0^{(n)},\ \ldots$$

Функціи $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, выражающія непрерывно измѣняющіяся координаты движущейся точки, должны быть непрерывными функціями времени; поэтому мы можемъ примѣнить къ нимъ Тайлорово разложеніе въ рядъ по восходящимъ степенямъ разности $(t-t_0)$; означимъ эту разность черезъ ϑ; ряды будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t)=x_0+x_0'\vartheta+x_0''\frac{\vartheta^2}{1.2}+x_0'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \\ y&=f_2(t)=y_0+y_0'\vartheta+y_0''\frac{\vartheta^2}{1.2}+y_0'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \\ z&=f_3(t)=z_0+z_0'\vartheta+z_0''\frac{\vartheta^2}{1.2}+z_0'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \end{aligned}\right\};\ldots\ (42)$$

но такъ какъ вторыя и высшія производныя: x_0'', y_0'', z_0'', x_0''', ... суть функціи отъ t_0, x_0, y_0, z_0, t_0', x_0', y_0', z_0', то эти ряды представляютъ нѣкоторыя функціи отъ t, t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0':

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0', \\ y&=f_2(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0', \\ z&=f_3(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0', \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (43)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность, исходя изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, получить искомыя функціи въ видѣ рядовъ, заключающихъ кромѣ t, еще t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'.

Примѣнимъ этотъ пріемъ къ слѣдующимъ тремъ примѣрамъ:

Примѣръ 4-й. Сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ постоянную величину и направленіе, такъ что проэкціи ея на оси координатъ равны постояннымъ величинамъ A, B, C.

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ:

$$mx'' = A, \quad my'' = B, \quad mz'' = C.$$

Производныя третьяго и высшихъ порядковъ будутъ равны нулю, а потому:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x_0'(t-t_0) + \frac{A}{m}\frac{(t-t_0)^2}{1.2} \\ y &= y_0 + y_0'(t-t_0) + \frac{B}{m}\frac{(t-t_0)^2}{1.2} \\ z &= z_0 + z_0'(t-t_0) + \frac{C}{m}\frac{(t-t_0)^2}{1.2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (44)$$

Примѣръ 5-й. Силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть притяженія къ плоскостямъ координатъ, такія же, какъ въ примѣрѣ 3-мъ, но коэффиціенты пропорціональности суть: $m\varkappa_1^2$, $m\varkappa_2^2$, $m\varkappa_3^2$.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = -m\varkappa_1^2 x; \quad my'' = -m\varkappa_2^2 y; \quad mz'' = -m\varkappa_3^2 z.$$

Чтобы составить выраженіе для x, мы составляемъ сначала выраженія для производныхъ:

$$x'' = -\varkappa_1^2 x \qquad\qquad x''' = -\varkappa_1^2 x'$$

$$x^{(4)} = -\varkappa_1^2 x'' = \varkappa_1^4 x \qquad\qquad x^{(5)} = -\varkappa_1^2 x''' = \varkappa_1^4 x'$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots;$$

рядъ, выражающій x, будетъ слѣдующій:

$$x = x_0 + x_0'\vartheta - \varkappa_1^2 x_0 \frac{\vartheta^2}{1.2} - \varkappa_1^2 x_0' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \varkappa_1^4 x_0 \frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} + $$
$$+ \varkappa_1^4 x_0' \frac{\vartheta^5}{1.2.3.4.5} - \dots\dots;$$

его можно представить такъ:

$$x=x_0\left(1-\frac{(\varkappa_1\vartheta)^2}{1.2}+\frac{(\varkappa_1\vartheta)^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)+$$

$$+\frac{x_0'}{\varkappa_1}\left(\varkappa_1\vartheta-\frac{(\varkappa_1\vartheta)^3}{1.2.3}+\frac{(\varkappa_1\vartheta)^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right).$$

Легко видѣть, что рядъ, помноженный на x_0, равняется $\cos\varkappa_1\vartheta$, а рядъ, помноженный на $(x_0':\varkappa_1)$, равняется синусу той же дуги, слѣдовательно:

$$x=x_0\cos\varkappa_1\vartheta+\frac{x_0'}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1\vartheta\ \ldots\ldots\ldots\ (45,\ \mathrm{a})$$

Такъ же найдемъ выраженія для y и z:

$$y=y_0\cos\varkappa_2\vartheta+\frac{y_0'}{\varkappa_2}\sin\varkappa_2\vartheta,\ \ldots\ldots\ldots\ (45,\ \mathrm{b})$$

$$z=z_0\cos\varkappa_3\vartheta+\frac{z_0'}{\varkappa_3}\sin\varkappa_3\vartheta\ \ldots\ldots\ldots\ (45,\ \mathrm{c})$$

Чтобы упростить примѣненіе этого пріема къ дифференціальнымъ уравненіямъ примѣра 3-го, мы преобразуемъ ихъ слѣдующимъ образомъ.

Сокративъ m, помножимъ каждое на e^{kt};
означимъ черезъ φ_1, φ_2, φ_3 слѣдующія произведенія:

$$\varphi_1=xe^{kt},\ \ \varphi_2=ye^{kt},\ \ \varphi_3=ze^{kt},$$

а чрезъ $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$, $\varkappa_3^2$ слѣдующія разности

$$\varkappa_1^2=\lambda-k^2,\ \ \varkappa_2^2=\mu-k^2,\ \ \varkappa_3^2=\nu-k^2;$$

тогда дифференціальныя уравненія 3-го примѣра примутъ такой видъ:

$$\varphi_1''=-\varkappa_1^2\varphi_1,\ \ \varphi_2''=-\varkappa_2^2\varphi_2,\ \ \varphi_3''=-\varkappa_3^2\varphi_3,$$

одинаковый съ видомъ уравненій пятаго примѣра; по этому нетрудно получить для x, y, z слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
x&=e^{-k\vartheta}\left(x_0\cos(\vartheta\sqrt{\lambda-k^2})+\frac{x_0'+kx_0}{\sqrt{\lambda-k^2}}\sin(\vartheta\sqrt{\lambda-k^2})\right)\\
y&=e^{-k\vartheta}\left(y_0\cos(\vartheta\sqrt{\mu-k^2})+\frac{y_0'+ky_0}{\sqrt{\mu-k^2}}\sin(\vartheta\sqrt{\mu-k^2})\right)\\
z&=e^{-k\vartheta}\left(z_0\cos(\vartheta\sqrt{\nu-k^2})+\frac{z_0'+kz_0}{\sqrt{\nu-k^2}}\sin(\vartheta\sqrt{\nu-k^2})\right)
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (46)$$

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять функціи f_1, f_2, f_3 путемъ послѣдовательнаго дифференцированія составленныхъ дифференціальныхъ уравненій, мы можемъ идти къ той же цѣли путемъ прямо-противоположнымъ.

Имѣя выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ: времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ, мы можемъ искать выраженія первыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ времени и координатъ; для этого надо данныя дифференціальныя уравненія подвергнуть такимъ преобразованіямъ, чтобы, вмѣсто нихъ, получились три равносильныя *) имъ дифференціальныя уравненія такого вида:

$$\overset{**)}{\frac{d\varphi_1}{dt}}=0,\ \frac{d\varphi_2}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_3}{dt}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

*) Уравненія (47) равносильны дифференціальнымъ уравненіямъ движенія матерьяльной точки въ томъ смыслѣ, что, если мы рѣшимъ первыя относительно x'', y'', z'', то получимъ послѣднія, то есть:

$$x''=\frac{\phi_1}{m},\ y''=\frac{\phi_2}{m},\ z''=\frac{\phi_3}{m};$$

а потому, если въ уравненіяхъ (47) замѣнимъ x'', y'', z'', функціями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, дѣленными на m, то первыя части этихъ уравненій обратятся въ нуль черезъ взаимное сокращеніе всѣхъ членовъ.

**) Знакъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

служитъ для обозначенія полной производной по времени отъ функціи $\varphi(t, x, y, z, x', y', z')$; то есть:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt}.$$

Частныя же производныя функціи φ по входящимъ въ нее перемѣннымъ величинамъ мы будемъ обозначать помощію круглыхъ ∂; напримѣръ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

есть производная по t, явно заключающемуся въ функціи φ.

гдѣ φ_1, φ_2, φ_3 суть нѣкоторыя функціи отъ t, x, y, z, x', y', z'; интегрируя эти уравненія, мы получимъ равенства:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t,\ x,\ y\ \ z,\ x',\ y',\ z')=C_1 \\ \varphi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')=C_2 \\ \varphi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')=C_3 \end{array}\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

которыя должны служить для выраженія x', y', z' въ функціяхъ отъ t, x, y, z, C_1, C_2, C_3.

Величины C_1, C_2, C_3 суть произвольныя постоянныя, введенныя тремя произведенными интегрированіями и незаключающіяся въ дифференціальныхъ уравненіяхъ.

Каждое изъ равенствъ вида (48) называется *первымъ интеграломъ дифференціальныхъ уравненій движенія.*

Если изъ трехъ первыхъ интеграловъ, послѣ какихъ-либо преобразованій, могутъ быть получены три равносильныя имъ уравненія слѣдующаго вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt}=0,\ \frac{d\Phi_2}{dt}=0,\ \frac{d\Phi_3}{dt}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

гдѣ Φ_1, Φ_2, Φ_3 суть функціи отъ t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, то изъ нихъ, послѣ новыхъ интегрированій, получимъ *вторые интегралы* дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_1 \\ \Phi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_2 \\ \Phi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_3 \end{array}\right\}, \ldots\ldots \quad (50)$$

гдѣ Γ_1, Γ_2, Γ_3 суть три постоянныя произвольныя.

Полученные вторые интегралы должны служить для выраженія x, y, z въ функціяхъ времени и шести постоянныхъ произвольныхъ:

$$\left.\begin{array}{l} x=\psi_1(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3) \\ y=\psi_2(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3) \\ z=\psi_3(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3) \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (51)$$

Выраженія для x', y', z' получатся, или непосредственно изъ выраженій (51), взявъ производныя по времени отъ функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$x' = \psi_1'(t),\ y' = \psi_2'(t),\ z' = \psi_3'(t), \dots\dots\dots (52)$$

или изъ первыхъ интеграловъ (48), если рѣшить ихъ относительно x', y', z' и замѣнить x, y, z функціями ψ_1, ψ_2, ψ_3; выраженія, полученныя тѣмъ и другимъ путемъ, должны быть одинаковы, такъ какъ функціи (51) должны тождественно удовлетворять уравненіямъ (49) или равносильнымъ имъ интеграламъ (48).

Выраженія для x'', y'', z'', полученныя чрезъ двукратное дифференцированіе функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3 по времени:

$$x'' = \psi_1''(t),\ y'' = \psi_2''(t),\ z'' = \psi_3''(t), \dots\dots\dots (53)$$

должны быть тождественны съ выраженіями:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{m}\Phi_1(t,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi'_1,\ \psi'_2,\ \psi'_3) \\ \frac{1}{m}\Phi_2(t,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_1',\ \psi_2',\ \psi'_3) \\ \frac{1}{m}\Phi_3(t,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_1',\ \psi_2',\ \psi_3') \end{array}\right\}, \dots\dots\dots (54)$$

потому что функціи (51) должны тождественно удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ движенія.

И такъ далѣе.

Равенства (48) и (51) должны быть справедливы для всякаго момента движенія; примѣняя ихъ къ моменту t_0, въ который координаты точки суть x_0, y_0, z_0, а проэкціи скорости — x_0', y_0', z_0', мы получимъ слѣдующую зависимость между этими постоянными и постоянными произвольными C_1, C_2, ... Γ_3:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0') = C_1 \\ \varphi_2(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0') = C_2 \\ \varphi_3(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0') = C_3 \end{array}\right\} \dots\dots\dots (55)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_1\\ \Phi_2(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_2\\ \Phi_3(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3)=\Gamma_3\end{array}\right\}\ldots\ldots\ (56)$$

Отсюда слѣдуетъ, что x_0, y_0, ... z_0' суть функціи ψ_1, ψ_2, ..., ψ'_3 отъ t_0, C_1, C_2, C_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3:

$$\left.\begin{array}{l}x_0=\psi_1(t_0)\\ y_0=\psi_2(t_0)\\ z_0=\psi_3(t_0)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (57)$$

$$\left.\begin{array}{l}x_0'=\psi_1'(t_0)\\ y_0'=\psi_2'(t_0)\\ z_0'=\psi_3'(t_0)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (58)$$

а такъ какъ t_0 есть произвольно-выбранный моментъ движенія и C_1, C_2, ... Γ_3 суть постоянныя произвольныя, то и x_0, y_0, ... y_0', z_0' суть величины произвольныя.

Слѣдовательно, *функціи времени, выражающія координаты движущейся свободной матерьяльной точки и удовлетворяющія даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, заключаютъ въ себѣ шесть постоянныхъ произвольныхъ, вслѣдствіе чего координаты и проэкціи скорости точки могутъ быть выбраны по произволу въ одинъ изъ моментовъ движенія.*

Функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 даютъ тѣ же самыя величины для координатъ x, y, z въ моментъ t, какія даютъ функціи f_1, f_2, f_3 (43), если только удовлетворены условія (55), (56), или равносильныя имъ (57), (58); въ этомъ можемъ убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Разложимъ функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 въ ряды по возрастающимъ степенямъ разности $(t-t_0)=\vartheta$; получимъ, напримѣръ для ψ_1, слѣдующій рядъ:

$$\psi_1(t)=\psi_1(t_0)+\psi_1'(t_0)\vartheta+\psi_1''(t_0)\frac{\vartheta^2}{1.2}+\psi_1'''(t_0)\frac{\vartheta^3}{1.2.3}+\ldots;$$

но:

$$\psi_1(t_0)=x_0=f_1(t_0),\ \ \psi_1'(t_0)=x_0'=f_1'(t_0),$$

$$\psi_1''(t_0)=\frac{1}{m}\Phi_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0')=f_1''(t_0);$$

также убѣдимся, что $\psi_1'''(t_0)=f_1'''(t_0)$ и такъ далѣе; поэтому предыдущій рядъ есть ни что иное, какъ разложеніе первой изъ функцій (43) по восходящимъ степенямъ разности $(t-t_0)=\theta$, а потому:

$$\psi_1(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3)=f_1(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_0',\ y_0',\ z_0'),$$

то есть функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 обращаются въ функціи f_1, f_2, f_3, если произвольныя постоянныя C_1, C_2, ... Γ_3 будутъ замѣнены величинами t_0, x_0, y_0, ... z_0' при посредствѣ равенствъ (55) (56).

Изъ этого видно, что оба указанные нами пріема даютъ результаты тождественные.

Примѣнимъ второй пріемъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ примѣра 4-го; мы легко найдемъ, что первые интегралы суть:

$$x'-\frac{A}{m}t=C_1,\ \ y'-\frac{B}{m}t=C_2,\ \ z'-\frac{C}{m}t=C_3;$$

вторые интегралы:

$$x-\frac{A}{m}\frac{t^2}{2}-C_1t=\Gamma_1,\ \ y-\frac{B}{m}\frac{t^2}{2}-C_2t=\Gamma_2,\ \ z-\frac{C}{m}\frac{t^2}{2}-C_3t=\Gamma_3.$$

Составивъ равенства (55) (56) и исключивъ произвольныя постоянныя изъ полученныхъ вторыхъ интеграловъ, мы приведемъ послѣдніе къ виду (44).

Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки могутъ быть замѣнены совокупностью шести дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=x',\ \ \frac{dy}{dt}=y',\ \ \frac{dz}{dt}=z'\\&\frac{dx'}{dt}=\frac{\Phi_1}{m},\ \ \frac{dy'}{dt}=\frac{\Phi_2}{m},\ \ \frac{dz'}{dt}=\frac{\Phi_3}{m}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Каждое изъ равенствъ вида:

$$\varphi(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')=C,$$

полная производная первой части котораго:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\ldots\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно, когда вмѣсто производныхъ отъ x, y, z, x', y', z' будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (59), называется интеграломъ этихъ дифференціальныхъ уравненій.

Чтобы найти функціи времени, выражающія x, y, z, x', y', z' и тождественно удовлетворяющія уравненіямъ (59), необходимо имѣть шесть такихъ различныхъ интеграловъ:

$$\varphi_1=C_1,\ \varphi_2=C_2,\ \varphi_3=C_3,\ \varphi_4=C_4,\ \varphi_5=C_5,\ \varphi_6=C_6,\ \ldots\ldots \quad \textbf{(60)}$$

изъ полныхъ производныхъ которыхъ по времени:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_2}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_3}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_4}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_5}{dt}=0,\ \frac{d\varphi_6}{dt}=0\ \ldots\ldots \quad \textbf{(60 bis)}$$

получатся дифференціальныя уравненія (59), если шесть уравненій (60 bis) будутъ рѣшены относительно производныхъ:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ \frac{dx'}{dt},\ \frac{dy'}{dt},\ \frac{dz'}{dt}.$$

Рѣшивъ интегралы (60) относительно x, y, $\ldots\ z'$, мы получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ t и шести произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, $\ldots$ C_6.

Если выраженія для x, y, z суть:

$$x=\psi_1,\ y=\psi_2,\ z=\psi_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(61)}$$

гдѣ вторыя части суть функціи отъ t, C_1, C_2, $\ldots$ C_6, то выраженія для x', y', z' будутъ:

$$x'=\psi_1',\ y'=\psi'_2,\ z'=\psi'_3,\ \ldots\ldots \quad \textbf{(61 bis)}$$

такъ какъ уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z'$$

должны быть удовлетворены тождественно.

Всякое равенство вида:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6)=C \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(62)}$$

есть также интегралъ уравненій (59); въ самомъ дѣлѣ полная производная первой части его:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial \varphi_6}\frac{d\varphi_6}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ отъ $x, y, \ldots z'$ вторыми частями уравненій (59), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя отъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$.

Изъ этого слѣдуетъ, что если совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть независимыхъ интеграловъ, то они имѣютъ еще кромѣ того безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ собою комбинаціи шести первыхъ.

Всякій новый интегралъ:

$$\varphi(t, x, y, z, x', y', z)=C$$

совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (59) можетъ быть представленъ подъ видомъ (62); въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ φ вмѣсто $x, y, \ldots z'$ ихъ выраженія (61) и (61 bis), мы обратимъ φ въ нѣкоторую функцію f отъ $t, C_1, C_2, \ldots C_6$; замѣнимъ $C_1, C_2, \ldots C_6$ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$:

$$\varphi=f(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6);$$

полная производная отъ φ или отъ f по t будетъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \varphi_6}\frac{d\varphi_6}{dt};$$

она должна тождественно обращаться въ нуль, когда производныя отъ $x, y, z, \ldots z'$ будутъ замѣнены вторыми частями уравненій (59); но тогда обращаются въ нуль также и полныя производныя функцій $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_6$; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0;$$

значитъ:

$$\varphi=f(\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_6)=C.$$

Произвольная постоянная C есть такая же функція произвольныхъ постоянныхъ $C_1,\ C_2, \ldots C_6$:

$$C=f(C_1,\ C_2, \ldots C_6).$$

Слѣдовательно, можно сказать, что *совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ съ шестью независимыми произвольными постоянными* и безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ комбинаціи первыхъ; произвольныя постоянныя послѣднихъ суть такія же комбинаціи независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Къ этому надо еще прибавить: что любые шесть интеграловъ могутъ играть роль самостоятельныхъ, если изъ нихъ, путемъ полнаго дифференцированія по времени, могутъ быть получены дифференціальныя уравненія (59), какъ указано относительно интеграловъ (60).

Если найдены будутъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (59), то, исключивъ изъ нихъ x', y', z', мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія.

Напримѣръ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx}{dt}=x',\ \frac{dy}{dt}=y',\ \frac{dz}{dt}=z'$$

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{A}{m},\ \frac{dy'}{dt}=\frac{B}{m},\ \frac{dz'}{dt}=\frac{C}{m}$$

суть три:

$$x'-\frac{A}{m}t=C_1,\ y'-\frac{B}{m}t=C_2,\ z'-\frac{C}{m}t=C_3, \ldots \ldots \quad (63)$$

полученные выше, и три новые:

$$(x')^2 - 2\frac{A}{m}x = C_4,\ (y')_2 - 2\frac{B}{m}y = C_5,\ (z')_2 - 2\frac{C}{m}z = C_6 \ldots \quad (64)$$

По исключеніи x', y', z' изъ (63) и (64), мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій примѣра 4-го подъ слѣдующимъ видомъ.

$$x = \frac{A}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 t + \frac{C_1^2 - C_4}{2A}m,\quad y = \frac{B}{m}\frac{t^2}{2} + C_2 t + \frac{C_2^2 - C_5}{2B}m,$$

$$z = \frac{C}{m}\frac{t^2}{2} = C_3 t + \frac{C_3^2 - C_6}{2C}m.$$

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ можно получить всѣ шесть самостоятельныхъ интеграловъ, но трудно исключить изъ нихъ x', y', z', тогда совокупность шести первыхъ интеграловъ представляетъ собою рѣшеніе вопроса.

Во всякомъ случаѣ полное рѣшеніе какого-либо вопроса о движеніи свободной матерьяльной точки заключаетъ въ себѣ шесть независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ или величины t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'.

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ; величины x_0, y_0, z_0 называются координатами *начальнаго положенія* матерьяльной точки, а величины x_0'; y_0', z_0' — проэкціями на оси координатъ *начальной скорости* точки.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начальнаго момента, полагая $t_0 = 0$; тогда начальныя координаты будемъ обозначать буквами a, b, c, а проэкціи начальной скорости буквами α, β, γ.

§ 19. Случаи прямолинейныхъ движеній матерьяльной точки.

Начнемъ съ разсмотрѣнія тѣхъ случаевъ, въ которыхъ сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ неизмѣнное направле-

ніе въ пространствѣ и начальная скорость параллельна тому же направленію; тогда матерьяльная точка совершаетъ движеніе по прямой, параллельной этому направленію.

Въ самомъ дѣлѣ, если ось X сдѣлаемъ параллельною этому направленію и проведемъ ее черезъ начальное положеніе матерьяльной точки, то дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx''=X,\ my''=0,\ mz''=0;$$

первые и вторые интегралы послѣднихъ двухъ уравненій очевидно будутъ слѣдующіе:

$$y'=0,\ z'=0,$$

потому что

$$y_0'=0 \text{ и } z_0'=0,$$

и далѣе:

$$y=0,\ z=0,$$

потому что

$$y_0=0,\ z_0=0;$$

слѣдовательно, матерьяльная точка будетъ совершать свое движеніе по оси X.

Въ оставшемся дифференціальномъ уравненіи движенія точки

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(65)}$$

вторая часть X, выражающая величину и знакъ силы, приложенной къ точкѣ, можетъ быть функціею:

a) одной изъ величинъ t, x, x',

b) двухъ изъ нихъ,

c) всѣхъ трехъ;

можемъ поэтому различать случаи семи родовъ:

1) $X=\phi(t)$ 4) $X=\phi(x, x')$ 7) $X=\phi(t, x, x')$.

2) $X=\phi(x)$ 5) $X=\phi(x', t)$

3) $X=\phi(x')$ 6) $X=\phi(t, x)$

Случаи 1-го рода:

$$mx''=\phi(t).$$

Первый интегралъ:

$$mx'-\mathcal{F}(t)=C;\quad \mathcal{F}(t)=\int^{t}\phi(t)\,dt.$$

Второй интегралъ:

$$mx-F(t)-Ct=\Gamma;\quad F(t)=\int^{t}\mathcal{F}(t)\,dt.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движенія:

$$mx_0'-\mathcal{F}(t_0)=C,\quad mx_0-F(t_0)-Ct_0=\Gamma.$$

Исключивъ C и Γ изъ перваго и втораго интеграла, мы получимъ:

$$x'=x_0'+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\phi(t)\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

$$x=x_0+x_0'(t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\phi(t)\,dt \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Примѣры: a) Паденіе матерьяльной точки вертикально сверху внизъ подъ вліяніемъ силы тяжести, принимаемой постоянною (ось X направлена вертикально, сверху внизъ).

$$mx''=mg,\quad x_0=0,\quad x_0'=\alpha>0,\quad t_0=0.$$

b) Движеніе тяжелой матерьяльной точки, брошенной снизу вверхъ вертикально:

$$mx''=mg,\quad t_0=0,\quad x_0=0,\quad x_0'=-\alpha,\ \text{гдѣ}\ \alpha>0.$$

Опредѣлить: высоту поднятія, время подъема и дальнѣйшее движеніе послѣ поднятія на наибольшую высоту.

Примѣръ 6-й.

$$X = m\lambda \sin\frac{2\pi}{T}t,\ x_0 = 0,\ x'_0 = 0,\ t_0 = 0.$$

$$x = \frac{\lambda T}{2\pi}t - \lambda\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{T}t;$$

точка совершаетъ колебательное движеніе около центра, движущагося равномѣрно со скоростью $\frac{\lambda T}{2\pi}$.

Случаи 2-го рода.

$$mx'' = \phi(x).$$

Это дифференціальное уравненіе можетъ быть замѣнено совокупностью двухъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$m\frac{dx'}{dt} = \phi(x),\ \frac{dx}{dt} = x',$$

которыя могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{mdx'}{\phi(x)} = \frac{dx}{x'} = dt.$$

Первый интегралъ дифференціальнаго уравненія втораго порядка получимъ, интегрируя двучленное уравненіе:

$$mx'dx' = \phi(x)dx.$$

Этотъ интегралъ — слѣдующій:

$$m(x')^2 - 2\mathcal{F}(x) = C,\ \mathcal{F}(x) = \int \phi(x)dx.$$

Второй интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка будетъ:

$$\sqrt{m}\int\frac{dx}{\sqrt{C + 2\mathcal{F}(x)}} = t + \Gamma.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движенія:

$$m(x'_0)^2 - 2\phi(x_0) = C$$

$$F(x_0, x_0) = t_0 + \Gamma;\ \ F(x, x_0) = \int \frac{\sqrt{m}\,dx}{\sqrt{m(x'_0)^2 + 2\phi(x) - 2\phi(x_0)}}.$$

Поэтому:

$$x' = \left((x'_0)^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} \phi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ (68)$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{m}\,dx}{\left(m(x'_0)^2 + 2\int_{x_0}^{x} \phi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ (69)$$

Примѣры a и b:

$$X = mg,\ t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ x'_0 = \pm\alpha.$$

Примѣръ 7-й. $X = \mu^2 x$, то есть сила, дѣйствующая на матерьяльную точку, есть сила, отталкивающая ее отъ начала координатъ O, и величина ея пропорціональна разстоянію отъ O.

Положимъ

$$t_0 = 0,\ x_0 = a,\ x'_0 = \alpha.$$

$$\frac{2}{m}\int_a^x \phi(x)dx = k^2(x^2 - a^2);\ \ k = \frac{\mu}{\sqrt{m}}.$$

$$x' = \sqrt{\alpha^2 - k^2a^2 + k^2x^2} = k\sqrt{x^2 + p};\ \ p = \frac{\alpha^2}{k^2} - a^2.$$

Если начальная скорость α настолько велика, что $p > 0$, то x'_t не обращается въ нуль, а потому и не мѣняетъ своего знака во

время движенія; въ этихъ случаяхъ движеніе совершается безъ перемѣны направленія въ одну и ту же сторону оси X, а именно въ положительную, если $\alpha>0$, и въ отрицательную, если $\alpha<0$.

Если же $p<0$, такъ что можно положить: $p=-n^2$, то выраженіе для x' будетъ:

$$x'=k\sqrt{x^2-n^2};$$

оно показываетъ, что наименьшая величина, которую можетъ имѣть x^2, есть n^2, то есть, что матерьяльная точка не можетъ приблизиться къ началу координатъ на разстояніе, меньшее n; когда x будетъ равно $\pm n$, тогда скорость сдѣлается равною нулю и послѣ этого направленіе движенія перемѣнится.

Далѣе:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+p}}=kt.$$

или

$$\log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+p}}{a+\frac{\alpha}{k}}\right]=kt;\quad x+\sqrt{x^2+p}=\left(a+\frac{\alpha}{k}\right)e^{kt};\ldots\ldots \quad (70)$$

отсюда

$$\frac{e^{-kt}}{a+\frac{\alpha}{k}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+p}}=\frac{x-\sqrt{x^2+p}}{a^2-\frac{\alpha^2}{k^2}};$$

$$x-\sqrt{x^2+p}=\left(a-\frac{\alpha}{k}\right)e^{-kt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Сложивъ равенства (70) и (71), мы получимъ слѣдующее выраженіе движенія точки:

$$x=a\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}+\frac{\alpha}{k}\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

Эта формула можетъ быть представлена въ болѣе сжатой формѣ,

но въ различномъ видѣ, смотря потому, каковы знаки величинъ $(ak+\alpha)$ и $(ak-\alpha)$.

a) Если эти величины имѣютъ одинаковые знаки, то, положивъ:

$$e^{k\tau}=\sqrt{\frac{a-\frac{\alpha}{k}}{a+\frac{\alpha}{k}}},$$

можемъ представить выраженіе для x такъ:

$$x=\frac{\sqrt{a^2k^2-\alpha^2}}{2k}(e^{k\vartheta}+e^{-k\vartheta});\ \vartheta=t-\tau.$$

Такая зависимость x отъ t изобразится графически кривою линіею такого вида, какъ на чертежѣ 1-мъ, если изображать t абциссами, а x ординатами. Вся кривая находится, или на сторонѣ положительныхъ, или на сторонѣ отрицательныхъ ординатъ; ON изображаетъ τ, т.-е. моментъ, въ который точка находится въ кратчайшемъ разстояніи отъ начала координатъ.

b) Если знаки вышеупомянутыхъ величинъ различны, то положивъ:

$$e^{k\theta}=\sqrt{\frac{\frac{\alpha}{k}-a}{\frac{\alpha}{k}+a}},$$

можемъ представить выраженіе для x такъ:

$$x=\frac{\sqrt{\alpha^2-a^2k^2}}{2k}(e^{k\vartheta}-e^{-k\vartheta});\ \vartheta=t-\theta.$$

Такая зависимость изобразится кривою такого вида, какъ на чертежѣ 2-мъ. Движеніе совершается со скоростью, не измѣняющею своего направленія; въ моментъ $ON=\theta$ точка проходитъ черезъ начало координатъ.

c) Если

$$ak-\alpha=0,$$

то тогда

$$x=ae^{kt},$$

то есть точка ассимптотически удаляется отъ начала координатъ въ безконечность.

d) Если

$$ak+\alpha=0,$$

тогда

$$x=ae^{-kt},$$

то есть точка ассимптотически приближается къ началу координатъ.

Примѣръ 8-й.

$$X=-\lambda^2 x,\ t_0=0,\ x_0=a,\ x'_0=\alpha;$$

то есть сила, дѣйствующая на матерьяльную точку, есть притяженіе къ точкѣ O, прямо пропорціональное разстоянію отъ нея.

Въ этомъ случаѣ

$$x'=\omega\sqrt{q^2-x^2};\ \ \omega=\frac{\lambda}{\sqrt{m}};\ \ q^2=a^2+\frac{\alpha^2}{\omega^2};$$

такъ какъ скорость должна имѣть во всякомъ случаѣ дѣйствительное значеніе, то x^2 не можетъ быть болѣе q^2, и когда $x=\pm q$, скорость обращается въ нуль.

Далѣе

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{q^2-x^2}}=\omega t,$$

или

$$\arcsin\frac{x}{q}-\arcsin\frac{a}{q}=\omega t;$$

откуда

$$\frac{x}{q}=\sin\left(\omega t+\arcsin\frac{a}{q}\right)=\frac{a}{q}\cos\omega t+\frac{\sqrt{q^2-a^2}}{q}\sin\omega t;$$

слѣдовательно

$$x=a\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ (73)$$

Это выраженіе могло быть получено прямо изъ выраженія (72)

черезъ замѣщеніе величины k величиною $i\omega$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$; кромѣ того, оно согласуется съ выраженіемъ (45, а), удовлетворяющимъ тому же самому дифференціальному уравненію.

Изъ выраженія (73), а еще лучше изъ выраженія:

$$x=q\sin(\omega t+c);\quad c=\arcsin\frac{a}{q}$$

видно, что точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе около начала O, отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ по обѣ стороны его; полный періодъ колебанія равенъ $2T$, гдѣ:

$$T=\frac{\pi}{\omega}=\pi\frac{\sqrt{m}}{\lambda},\quad \frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(73 bis)}$$

Случаи 3-го рода:

$$mx''=\phi(x').$$

Это дифференціальное уравненіе 2-го порядка можно замѣнить двумя дифференціальными уравненіями перваго порядка, которыя можно представить такъ:

$$\frac{mdx'}{\phi(x')}=\frac{dx}{x'}=dt.$$

Въ случаяхъ этого рода, смотря по обстоятельствамъ, можно рѣшать вопросъ различными способами.

А. Интегрировать уравненіе:

$$m\frac{dx'}{\phi(x')}=dt.$$

Если интегралъ его:

$$m\int\frac{dx'}{\phi(x')}=t+C_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(74)}$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x', которое выразится нѣкоторою функціею ψ отъ $(t+C_1)$, то второй интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$\int\psi(t+C_1)dt=x+C_2\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(75)}$$

B. Интегрировать уравненіе:

$$m\frac{x'dx'}{\phi(x')}=dx.$$

Если интегралъ его:

$$m\int\frac{x'dx'}{\phi(x')}=x+C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x', которое выразится нѣкоторою функціею Ψ отъ $(x+C_2)$, то второй интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$\int\frac{dx}{\Psi(x+C_2)}=t+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

C. Второй интегралъ можно получить или разсматривать, какъ результатъ исключенія x' изъ интеграловъ (74) и (76).

Примѣръ 9-й.

$$X=mg-mkx'.$$

Если положительная ось X направлена вертикально сверху внизъ, то такимъ образомъ будетъ выражаться равнодѣйствующая изъ вѣса матерьяльной точки и сопротивленія воздуха, если принимать послѣднее пропорціональнымъ первой степени скорости.

Въ этомъ примѣрѣ можно, кромѣ предыдущихъ пріемовъ, примѣнить слѣдующій.

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ даннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка:

$$x''=g-kx'$$

будетъ слѣдующій:

$$x'=gt-kx+C$$

или

$$x'-a=gt-k(x-a).$$

Другой получится по формулѣ (74) и будетъ:

$$\int\frac{kdx'}{g-kx'}=kt+C_1,$$

или

$$\log\left(\frac{g-ka}{g-kx'}\right)=kt.$$

Исключивъ x' изъ этихъ двухъ интеграловъ, мы получимъ результатъ:

$$x=a+\frac{g}{k}t-\frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-a\right)\left(1-e^{-kt}\right)\ldots\ldots\ldots (78)$$

Эта формула пригодна, какъ для восходящаго, такъ и для нисходящаго движенія матерьяльной точки; первое имѣетъ мѣсто только при $a<0$ и продолжается только до момента:

$$t_1=\frac{1}{k}\log\left(1-\frac{ka}{g}\right),$$

въ который скорость обращается въ нуль и съ котораго начинается нисходящее движеніе. Во всякомъ случаѣ скорость съ теченіемъ времени ассимптотически приближается къ предѣлу $+\frac{g}{k}$ *).

Примѣръ 10. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально кубу скорости; коэффиціэнтъ сопротивленія среды означимъ черезъ mgk^3.

$$mx''=mg-mg(kx')^3.$$

Изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx'}{1-(kx')^3}=gdt,\quad \frac{x'\,dx'}{1-(kx')^3}=gdx$$

составимъ слѣдующее:

$$\frac{dx'}{(kx')^2+kx'+1}=g(dt-kdx),$$

---

*) Изобразивъ зависимость (78) графически, получимъ кривую, изображенную на чертежѣ 3-мъ; выпуклость этой кривой постоянно обращена къ оси абциссъ; она имѣетъ ассимптоту, наклоненную къ оси абциссъ подъ угломъ, тангенсъ котораго есть $\frac{g}{k}$; x имѣетъ наименьшую величину въ точкѣ M.

интегралъ котораго есть:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2kx'+1}{\sqrt{3}}\right)=gk(t-kx)+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

Полагая $t_0=0$, $x_0=a$, $x_0'=\alpha$, получимъ для опредѣленія C_1, равенство:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2k\alpha+1}{\sqrt{3}}\right)=C_1-gk^2a.$$

По исключеніи C_1, равенство (79) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{gk\sqrt{3}}{2}\Big(t-k(x-a)\Big)=\operatorname{arctg}\frac{2kx'+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2k\alpha+1}{\sqrt{3}} \ldots . (80)$$

Для полученія другаго перваго интеграла мы составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{1+kx'}{1-(kx')^3}dx'=g(dt+kdx),$$

интегралъ котораго — слѣдующій:

$$\log\frac{1-(kx')^3}{(1-kx')^3}=3kg(t+kx)+C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

или

$$3kg\Big(t+k(x-a)\Big)=\log\frac{1-(kx')^3}{(1-kx')^3}-\log\frac{1-(k\alpha)^3}{(1-k\alpha)^3} \ldots\ldots (82)$$

Совокупность первыхъ интеграловъ (79) и (81), или (80) и (82) представляетъ рѣшеніе задачи о движеніи тяжелой матерьяльной точки, брошенной вертикально вверхъ или внизъ и движущейся въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально кубу скорости; въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ (80) и (82) можемъ вычислять t и x, соотвѣтствующія различнымъ скоростямъ.

Но можно исключить x' изъ этихъ интеграловъ и тогда получимъ второй интегралъ въ видѣ зависимости между величинами:

$$\xi=\frac{\sqrt{3}}{2}gk\Big(t-k(x-a)\Big),\quad \eta=\frac{3kg}{2}\Big(t+k(x-a)\Big),$$

и этотъ же интегралъ можно получить черезъ интегрированіе уравненія (80); результатъ будетъ слѣдующій:

$$\cos\xi-\frac{1+k\alpha}{1-k\alpha}\sqrt{3}\sin\xi=e^{-\eta} \ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

Для опредѣленія момента t_1 и положенія x_1 наибольшаго подъема матерьяльной точки при отрицательной начальной скорости, положимъ въ равенствахъ (80) и (82) $x'=0$ и $a=-n$, гдѣ n означаетъ положительную скорость; изъ нихъ получимъ слѣдующія выраженія:

$$t_1=\frac{1}{3gk}\left[\log\frac{1+kn}{\sqrt{1-kn+(kn)^2}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{kn\sqrt{3}}{2-kn}\right]\ldots\ldots (84)$$

$$-(x_1-a)=\frac{1}{3gk^2}\left[\log\frac{\sqrt{1-kn+(kn)^2}}{1+kn}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{kn\sqrt{3}}{2-kn}\right]\ldots (85)$$

Примѣръ 11-й. Тяжелая матерьяльная точка движется въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально квадрату скорости. Въ этомъ случаѣ X выразится неодинаковымъ образомъ при паденіи точки сверху внизъ и при подъемѣ снизу вверхъ:

при паденіи $X=m(g-k^2(x')^2)$,

при подъемѣ $X=m(g+k^2(x')^2)$.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

при паденіи $x''=g-(kx')^2$,

при подъемѣ $x''=g+(kx')^2$;

разница между ними только въ знакѣ у k^2, поэтому мы будемъ интегрировать только уравненіе для паденія точки, а чтобы перейти къ подъему, должны будемъ подставить въ результатъ ik (гдѣ $i=\sqrt{-1}$) вмѣсто k.

Интегрировать уравненіе

$$x''=g-(kx')^2$$

можно по всякому изъ указанныхъ способовъ; по способу А сначала получимъ интегралъ:

$$\int\frac{dx'}{g-(kx')^2}=t+C_1,$$

или

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}}\log\left(\frac{\sqrt{g}+kx'}{\sqrt{g}-kx'}\right)=t+C_1;$$

потому что дробь, стоящая подъ знакомъ интеграла, можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dx'}{g-(kx')^2}=\frac{dx'}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}-kx'}+\frac{1}{\sqrt{g}+kx'}\right).$$

Предыдущее равенство, при положеніи $t_0=0$, $x'=\alpha$, даетъ

$$\frac{1+\varkappa x'}{1-\varkappa x'}=\frac{1+\varkappa\alpha}{1-\varkappa\alpha}e^{2\varepsilon t}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

гдѣ, для краткости, введены обозначенія:

$$\frac{k}{\sqrt{g}}=\varkappa,\quad k\sqrt{g}=\varepsilon.$$

Рѣшивъ равенство (86) относительно x', получится уравненіе:

$$x'=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{(1+\varkappa\alpha)e^{\varepsilon t}-(1-\varkappa\alpha)e^{-\varepsilon t}}{(1+\varkappa\alpha)e^{\varepsilon t}+(1-\varkappa\alpha)e^{-\varepsilon t}}\right],$$

которое легко интегрируется и даетъ второй интегралъ дифференціальнаго уравненія движенія:

$$x=a+\frac{1}{\varkappa\varepsilon}\log\left(\frac{e^{\varepsilon t}+e^{-\varepsilon t}}{2}+\varkappa\alpha\frac{e^{\varepsilon t}-e^{-\varepsilon t}}{2}\right)$$

или

$$x=a+\frac{1}{k^2}\log\left(\cos(ikt\sqrt{g})-\frac{k\alpha}{\sqrt{g}}i\sin(ikt\sqrt{g})\right)\ldots\ldots (87)$$

По способу B мы должны начать съ интегрированія уравненія:

$$\frac{x'dx'}{g-(kx')^2}=dx;$$

получимъ

$$\frac{g-(kx')^2}{g-(k\alpha)^2}=e^{2k^2(a-x)}; \ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

продолжая дальше, мы придемъ къ тому же самому результату (87).

Чтобы получить выраженіе для движенія снизу вверхъ, надо положить скорость α отрицательною и замѣнить k черезъ ik, тогда выраженіе (87) приметъ слѣдующій видъ:

$$x=a-\frac{1}{k^2}\log\left(\cos(kt\sqrt{g})+\frac{kn}{\sqrt{g}}\sin(kt\sqrt{g})\right), \ldots \quad (89)$$

гдѣ подставлено $\alpha=-n$.

Равенство (88) при движеніи снизу вверхъ замѣняется слѣдующимъ.

$$\frac{g+(kx')^2}{g+(kn)^2}=e^{-2k^2(a-x)} \ldots\ldots \quad (90)$$

Наибольшая высота опредѣлится изъ послѣдняго равенства, положивъ въ немъ $x'=0$; означимъ высоту поднятія $(a-x_1)$ черезъ h.

$$1+\frac{k^2}{g}n^2=e^{2k^2h} \ldots\ldots \quad (91)$$

Движеніе, совершаемое матерьяльною точкою по достиженіи ею наибольшей высоты, выразится уравненіями (86)—(88), если подставимъ въ нихъ $(t-t_1)$, x_1 и нуль вмѣсто t, a и α.

Скорость v, съ которою точка возвратится въ положеніе $x=a$, опредѣлится изъ (88):

$$1-\frac{k^2}{g}v^2=e^{2k^2(x_1-a)}=e^{-2k^2h}; \ldots\ldots \quad (92)$$

скорость эта оказывается меньшею n; въ самомъ дѣлѣ, изъ (91) и (92) получимъ:

$$v=ne^{-k^2h}.$$

Примѣръ 12-й. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, сопротивленіе которой выражается суммою двухъ членовъ: одного, пропорціональнаго первой степени, другаго, пропорціональнаго второй степени скорости.

Предполагая движеніе точки сверху внизъ, напишемъ дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx''=m(g-2kx'-(\mu x')^2);$$

но мы можемъ этому уравненію придать также слѣдующій видъ:

$$\xi''=g+\frac{k^2}{\mu^2}-\mu^2(\xi')^2, \ldots\ldots \quad (93)$$

гдѣ:

$$\xi' = x' + \frac{k}{\mu^2}, \quad \xi = x + \frac{k}{\mu^2}t.$$

Дифференціальное же уравненіе (93) отличается отъ перваго изъ дифференціальныхъ уравненій предыдущаго примѣра только коэффиціентами и значеніемъ зависимой перемѣнной, но не видомъ; а потому ссылаемся на результаты 11-го примѣра.

Въ случаяхъ 4—7 нельзя дать общихъ правилъ, хотя въ нѣкоторыхъ задачахъ можетъ быть произведено одно, а въ другихъ и два интегрированія; мы приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ такихъ задачъ.

Изъ случаевъ 4-го рода:

$$mx'' = \phi(x', x)$$

Примѣръ 13-й. Матерьяльная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію отъ него, движется по оси X въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости точки.

Этотъ частный случай примѣра 3-го мы разсмотримъ здѣсь подробнѣе, чѣмъ въ § 18.

Дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x$$

представимъ такъ:

$$x'' + 2kx' + k^2x = (k^2 - \lambda)x;$$

затѣмъ помножимъ обѣ части равенства на e въ степени kt и означимъ произведеніе изъ x на эту степень e черезъ φ; тогда дифференціальное уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi'' = (k^2 - \lambda)\varphi; \quad \varphi = xe^{kt},$$

а это есть дифференціальное уравненіе примѣра 7-го или 8-го, смотря по тому, каковъ знакъ разности $(k^2 - \lambda)$.

а) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина отрицательная, то, положивъ:

$$k^2 - \lambda = -\omega^2,$$

примѣнимъ формулу (73), которая въ этомъ случаѣ получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t + \frac{\varphi'_0}{\omega} \sin \omega t;$$

но, такъ какъ:

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_0' = ak + \alpha,$$

то искомое выраженіе для x будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt}\left(a \cos (t\sqrt{\lambda - k^2}) + \frac{ak+\alpha}{\sqrt{\lambda - k^2}} \sin (t\sqrt{\lambda - k^2})\right) \ldots . (94)$$

Движеніе, выражаемое этимъ уравненіемъ, есть колебательное съ уменьшающимися размахами; сумма, заключенная въ большихъ скобкахъ, измѣняется періодически, такъ что въ моменты: t, $t+2T$, $t+4T$, $t+6T$, и т. д., она имѣетъ одну и ту же величину, если T есть слѣдующій промежутокъ времени:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - k^2}} \ldots \ldots \ldots . (94 \text{ bis})$$

Въ эти моменты x будетъ имѣть слѣдующія величины:

$$Ae^{-kt}, \; Ae^{-kt} . \, e^{-2kT}, \; Ae^{-kt} . \, e^{-4kT}, \; Ae^{-kt} . \, e^{-6kT}, \ldots$$

гдѣ A есть величина упомянутой суммы въ моментъ t.

Отсюда видимъ, что величины x для этихъ моментовъ уменьшаются въ геометрической прогрессіи, отношеніе которой есть:

$$e^{-2kT}; \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - k^2}}.$$

Чертежъ 4-й изображаетъ законъ измѣненія x съ теченіемъ времени, выражаемый формулою (94).

b) Когда $k^2 = \lambda$, формула (94) приметъ слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt}\left(a + (ak + \alpha)t\right), \ldots \ldots \ldots . (95)$$

потому что, при $k^2 = \lambda$:

$$\cos (t\sqrt{\lambda - k^2}) = 1, \quad \frac{\sin (t\sqrt{\lambda - k^2})}{\sqrt{\lambda - k^2}} = t.$$

Изъ формулы (95) получимъ слѣдующее выраженіе скорости:

$$x' = e^{-kt}(a - k(ak + \alpha)t),$$

изъ котораго видно, что скорость обращается въ нуль при $t = t_1$

$$t_1 = \frac{a}{k(ak+\alpha)}$$

и при $t = \infty$.

Въ моментъ t_1 координата x_1 выражается такъ:

$$x_1 = e^{-kt_1}\left(a + \frac{\alpha}{k}\right).$$

Формулу (95) можно преобразовать къ слѣдующему виду;

$$x = x_1 e^{-k\vartheta}(1 + k\vartheta); \;\; \vartheta = t - t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(95 bis)}$$

На чертежѣ 5-мъ проведена кривая, изображающая законъ измѣненія x, выражаемый формулою (95) или (95 bis); наивысшая точка M соотвѣтствуетъ моменту t_1; при $t = t_1 - \frac{1}{k}$ точка проходитъ черезъ начало координатъ, а при $t = t_1 + \frac{1}{k}$ кривая имѣетъ точку перегиба.

c) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина положительная, то выраженіе (94) получитъ слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt}\left(a\cos(it\sqrt{k^2-\lambda}) + \frac{ak+\alpha}{i\sqrt{k^2-\lambda}}\sin(it\sqrt{k^2-\lambda})\right), \ldots \textbf{(96)}$$

или:

$$x = \frac{(aq+\alpha)e^{-pt} - (ap+\alpha)e^{-qt}}{q-p}, \ldots\ldots\ldots \textbf{(96 bis)}$$

гдѣ $p = k - \sqrt{k^2-\lambda}$ и $q = k + \sqrt{k^2-\lambda}$ суть двѣ положительныя величины.

Въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ функція $\phi(x, x')$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\phi(x, x') = f(x) + (x')^2 \varphi(x),$$

всегда можно найти первый интегралъ дифференціальнаго уравненія движенія; въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе:

$$x'' = f(x) + \varphi(x)(x')^2$$

можно представить такъ:

$$x'\frac{dx'}{dx}-(x')^2\varphi(x)=f(x),$$

или такъ:

$$\frac{du}{dx}-2u\varphi(x)=2f(x),\ \ u=(x')^2;$$

а это есть обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, рѣшеніе котораго, какъ извѣстно, есть:

$$(x')^2=u=e^{2\theta(x)}(C+2\int e^{-2\theta(x)}f(x)dx),\ldots\ldots(97)$$

гдѣ:

$$\theta(x)=\int\varphi(x)dx.$$

Примѣръ 14-й. Матерьяльная точка притягивается къ началу координатъ силою, прямо пропорціальною разстоянію отъ него; движеніе ея происходить въ средѣ, плотность которой обратно пропорціональна разстоянію отъ начала координатъ; эта среда оказываетъ движенію сопротивленіе, пропорціональное плотности и квадрату скорости.

Начальное положеніе точки на положительной оси X въ разстояніи a отъ начала координатъ, начальная скорость равна нулю, опредѣлить движеніе.

Въ этомъ примѣрѣ $f(x)=-\mu^2x$, функція же φ равна

$$\varphi(x)=\frac{k}{x},$$

если точка находится на положительной оси X и скорость ея направлена къ началу координатъ.

По формулѣ (97) составимъ равенство:

$$(x')^2=x^{2k}\left(C-\frac{\mu^2}{(1-k)}x^{2-2k}\right);$$

опредѣлимъ C по начальнымъ обстоятельствамъ движенія; окажется:

$$C=\frac{\mu^2}{1-k}a^{2-2k}.$$

По извлеченіи корня и по отдѣленіи перемѣнныхъ, получимъ дифференціальное уравненіе:

$$-\frac{x^{-k}dx}{\sqrt{a^{2-2k}-x^{2-2k}}}=\frac{\mu}{\sqrt{1-k}}dt,$$

интегралъ котораго:

$$\arccos\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}=t\mu\sqrt{1-k}$$

даетъ намъ выраженіе движенія точки:

$$x=a\left(\cos t\mu\sqrt{1-k}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Движеніе, начавшееся въ моментъ $t=0$, кончается въ моментъ T:

$$T=\frac{\pi}{2\mu\sqrt{1-k}};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

въ этотъ моментъ точка приходитъ въ начало координатъ и скорость ея обращается въ нуль. Наибольшая скорость, которую имѣетъ точка во время движенія, равна:

$$a\mu k^{\left(\frac{k}{2(1-k)}\right)}.$$

Изъ случаевъ 7-го рода:

$$mx''=\phi(t,\ x,\ x').$$

Примѣръ 15. Матерьяльная точка, движущаяся по оси X, притягивается къ точкѣ $Ю$, которая, въ свою очередь, движется по той же прямой по слѣдующему закону:

$$x_{ю}=\psi(t);$$

сила, притягивающая матерьяльную точку къ точкѣ $Ю$, пропорціональна разстоянію отъ нея, притомъ движеніе происходитъ въ неподвижной средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости.

Очевидно, дифференціальное уравненіе движенія будетъ слѣдующее:

$$mx''=-m\left(2kx'+\lambda(x-x_{ю})\right)$$

или:

$$x'' + 2kx' + \lambda x = \varphi(t);\ \ \varphi(t) = \lambda\psi(t);$$

интегрированіе его не представитъ затрудненій, если извѣстенъ видъ функціи φ.

Примѣръ 16. Заданіе отличается отъ заданія предыдущаго примѣра тѣмъ, что k и λ суть функціи времени, удовлетворяющія слѣдующему условію:

$$\lambda(t) - k^2(t) - \frac{dk(t)}{dt} = n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(99)}$$

гдѣ n есть величина постоянная.

Положивъ:

$$x = \xi e^{-\theta(t)},\ \ \theta(t) = \int k(t)dt$$

и принявъ во вниманіе условіе (99), мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему:

$$\xi'' + n^2\xi = \varphi e^{\theta}.$$

Примѣръ 17. Дифференціальное уравненіе движенія:

$$x'' + x'f(t) + x\lambda^2(t) = 0,$$

гдѣ f и λ суть двѣ функціи времени, удовлетворяющія слѣдующему условію:

$$\frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} = 2n; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(100)}$$

n — величина постоянная.

Положивъ въ дифференціальномъ уравненіи:

$$x = \xi e^{\int \psi dt},$$

гдѣ ψ есть функція времени, удовлетворяющая дифференціальному уравненію перваго порядка:

$$\psi' + \psi^2 + \psi f + \lambda^2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(101)}$$

мы получимъ, для опредѣленія ξ, слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\xi'' + (2\psi + f)\xi' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(102)}$$

Дифференціальное уравненіе (101), на основаніи условія (100), можетъ быть приведено къ такому виду, при которомъ перемѣнныя могутъ быть отдѣлены и интегрированіе произведено; окажется, что:

$$\psi = -n\lambda + \lambda\sqrt{1-n^2}\cot g\left(\sqrt{1-n^2}\int \lambda dt\right);$$

затѣмъ проинтегрируется уравненіе (102) и найдется слѣдующій результатъ:

$$x = Ce^{-n\theta}\sin(\Gamma + \theta\sqrt{1-n^2}); \quad \theta = \int \lambda dt,$$

Въ тѣхъ вопросахъ, которые требуютъ интегрированія дифференціальнаго уравненія:

$$x'' + x'f(t) + (x')^2\varphi(x) = 0$$

всегда можетъ быть найденъ первый интегралъ; въ самомъ дѣлѣ, положивъ:

$$x' = \xi e^{-\int \varphi dx},$$

мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему;

$$\xi' + \xi f(t) = 0;$$

а поэтому:

$$x' = Ce^{\psi}; \quad \psi = -\int \varphi(x)dx - \int f(t)dt \ldots\ldots \textbf{(103)}$$

§ 20. Вопросы объ опредѣленіи криволинейнаго движенія свободной матерьяльной точки, въ которыхъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка интегрируется отдѣльно.

Переходя къ задачамъ и вопросамъ, относящимся къ криволинейнымъ движеніямъ матерьяльныхъ точекъ, мы прежде всего упомянемъ о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ опредѣленіе движенія по каждой изъ координатъ можетъ быть произведено въ отдѣльности, то есть, когда каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка заключаетъ время, только одну изъ координатъ и ея производныя.

Къ числу такихъ случаевъ принадлежатъ тѣ, которые приведены въ § 18 подъ названіемъ примѣровъ 3-го, 4-го и 5-го; тамъ получены ихъ интегралы, здѣсь остается показать, каковъ видъ траэкторій.

Въ примѣрѣ 4-мъ сила имѣетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину:

$$P=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Расположимъ оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось Y была параллельна направленію силы P, чтобы начало координатъ совпадало съ начальнымъ положеніемъ движущейся точки, чтобы начальная скорость заключалась въ плоскости XY и чтобы эта скорость составляла острый уголъ съ осью X; тогда дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=P,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

начальныя обстоятельства движенія:

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ \gamma=0;$$

поэтому вторые интегралы будутъ слѣдующіе:

$$x=\alpha t,\quad y=\frac{gt^2}{2}+\beta t,\quad z=0;\ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

здѣсь g подставлено вмѣсто частнаго: $(P:m)$.

Уравненія (104) отличаются отъ уравненій, приведенныхъ на стр. 7-й кинематической части (примѣръ 3-й), только знакомъ передъ произведеніемъ βt.

Означивъ черезъ v_0 величину начальной скорости и черезъ $\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)$— уголъ, составляемый ею съ положительною осью Y, мы получимъ слѣдующее извѣстное уравненіе параболической траэкторіи тяжелой матерьяльной точки, брошенной въ пустотѣ подъ угломъ ω къ горизонту:

$$y=-x\,tg\omega+\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\omega}\ldots\ldots\ldots\ldots (105)$$

Изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=-mk\frac{dy}{dt},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=-m\left(g+k\frac{dz}{dt}\right)$$

первое даетъ, на основаніи начальныхъ условій, результатъ $x=0$, выражающій, что движеніе происходитъ въ плоскости YZ.

Третье дифференціальное уравненіе отличается отъ дифференціальнаго уравненія примѣра 9-го тѣмъ, что вмѣсто x здѣсь находится $(-z)$, возьмемъ поэтому формулу (78) и подставимъ въ нее: $(-z)$, нуль и $(-\gamma)$ вмѣсто x, a и α, получимъ, по измѣненіи знаковъ въ обѣихъ частяхъ равенства:

$$z=\frac{1}{k}\left(\gamma+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right)-\frac{g}{k}t \dots\dots\dots \textbf{(106)}$$

Чтобы перейти отъ третьяго дифференціальнаго уравненія ко второму, надо замѣнить g — нулемъ и z черезъ y; поэтому сдѣлаемъ подобныя же замѣщенія въ формулѣ (106) и сверхъ того замѣнимъ γ черезъ β; получимъ тогда второй интегралъ втораго дифференціальнаго уравненія:

$$y=\frac{\beta}{k}\left(1-e^{-kt}\right) \dots\dots\dots \textbf{(107)}$$

Полученные результаты (106) и (107) выражаютъ координаты y, z въ функціяхъ времени; составленіе уравненія траэкторіи и разсмотрѣніе вида ея сдѣлано на стр. 50—51 кинематической части (черт. 30 тамъ же). Уравненіе траэкторіи — слѣдующее:

$$z=\left(\frac{g}{k\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)y+\frac{g}{k^2}\log\left(1-\frac{ky}{\beta}\right);$$

если разложить логариѳмъ въ рядъ, то получимъ:

$$z=\frac{\gamma}{\beta}y-g\left(\frac{y^2}{2\beta^2}+\frac{ky^3}{3\beta^3}+\frac{k^2y^4}{4\beta^4}+\dots\right).$$

Положивъ здѣсь $k=0$, мы получимъ уравненіе траэкторіи въ пустотѣ:

$$z_1=\frac{\gamma}{\beta}y-\frac{gy^2}{2\beta^2} \dots\dots\dots \textbf{(108)}$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ:

$$z = z_1 - g\left(\frac{ky^3}{3\beta^3} + \frac{k^2y^4}{4\beta^4} + \ldots\right),$$

то есть, что, при одной и той же абциссѣ, ордината траэкторіи въ сопротивляющейся средѣ менѣе ординаты параболической траэкторіи.

§ 21. Два пріема преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки.

Общіе способы, слѣдуя которымъ можно было бы рѣшить всякую задачу о криволинейномъ движеніи точки при дѣйствіи какихъ бы то ни было силъ, неизвѣстны; извѣстны только нѣкоторые пріемы преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія, при примѣненіи которыхъ можно получить нѣкоторые изъ первыхъ интеграловъ, если приложенныя къ матерьяльной точкѣ силы удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ.

Одинъ изъ этихъ пріемовъ заключается въ слѣдующемъ.

Помножимъ третье изъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \ldots\ldots\ldots (36)$$

на y и придадимъ къ нему второе, помноженное на $(-z)$; составится равенство:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = yZ - zY, \ldots\ldots\ldots (109)$$

первая часть котораго есть производная отъ

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$$

по t; поэтому равенство это (109) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{d\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]}{dt} = yZ - zY \ldots\ldots\ldots (110\text{ a})$$

Помножимъ первое изъ уравненій (36) на z и придадимъ къ нему третье, помноженное на $(-x)$, получимъ:

$$\frac{d\left[m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\right]}{dt}=zX-xZ;\ \ldots\ldots \quad \textbf{(110 b)}$$

наконецъ, помноживъ второе изъ уравненій (36) на x и придавъ къ нему первое, помноженное на $(-y)$, получимъ:

$$\frac{d\left[m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right]}{dt}=xY-yX\ \ldots\ldots \quad \textbf{(110 c)}$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ будетъ объяснено значеніе разностей, находящихся во вторыхъ частяхъ полученныхъ дифференціальныхъ уравненій (110, a, b, c); затѣмъ будетъ показано, какіе интегралы получаются изъ этихъ уравненій и при какихъ условіяхъ.

Другой пріемъ, при посредствѣ котораго изъ уравненій (36) составляется дифференціальное уравненіе, легко интегрирующееся при нѣкоторыхъ условіяхъ, состоитъ въ томъ, что первое изъ уравненій (36) помножается на x', второе — на y', третье — на z' и затѣмъ, по сложеніи, составляется уравненіе:

$$m\left(x'\frac{dx'}{dt}+y'\frac{dy'}{dt}+z'\frac{dz'}{dt}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt},$$

первая часть котораго есть, очевидно, производная по времени отъ слѣдующаго трачлена:

$$\frac{m}{2}\left((x')^2+(y')^2+(z')^2\right),$$

выражающаго половину произведенія изъ массы на квадратъ скорости матерьяльной точки; поэтому, полученное дифференціальное уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt}=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\ \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(111)}$$

Помноживъ обѣ части этого дифференціальнаго уравненія на dt, получимъ:

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right)=Xdx+Ydy+Zdz \ldots\ldots\ldots\ldots (112)$$

Значеніе первой и второй частей этого дифференціальнаго уравненія будетъ объяснено въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ и затѣмъ будетъ указано, какой интегралъ получается изъ этого уравненія и при какихъ условіяхъ.

§ 22. Значеніе вторыхъ частей дифференціальныхъ уравненій (110). Моментъ силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, вокругъ даннаго центра и вокругъ данной оси.

Чтобы объяснить себѣ значеніе разностей:

$$yZ-zY \quad zX-xZ \quad xY-yX, \ldots\ldots\ldots (113)$$

заключающихся во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій (110), мы сравнимъ ихъ со вторыми частями формулъ (96) кинематической части (стр. 85), которыя мы напишемъ при предположеніи, что точка $\mathfrak{M}$ (черт. 41 и 42 кинематич. части) взята за начало координатъ; вторыя части равенствъ (96) получатъ тогда слѣдующій видъ:

$$y_{ю}R-z_{ю}Q \quad z_{ю}P-x_{ю}R \quad x_{ю}Q-y_{ю}P \ldots\ldots\ldots (114)$$

Припомнимъ, что эти разности выражаютъ величины проэкцій на оси координатъ вращательной скорости $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{w}}$ точки $\mathfrak{M}$ вокругъ полюса $Ю$ и что длина, изображающая эту скорость, направлена изъ точки $\mathfrak{M}$ перпендикулярно къ плоскости, заключающей въ себѣ радіусъ векторъ $\overline{\mathfrak{M}Ю}$ и длину $\overline{Ю\Omega}$ (чертежъ 41 кинематической части), изображающую угловую скорость твердаго тѣла; направлена длина $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{w}}$ въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ $\mathfrak{M}$, головою по направленію $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{w}}$, смотрящему на точку $Ю$, видно, что длина $\overline{Ю\Omega}$ направлена слѣва на право.

Формулы (96) кинематической части и написанныя здѣсь разности (114) относятся къ кинематикѣ твердаго тѣла, между тѣмъ какъ разности (113) относятся къ движенію свободной матерьяльной точки; первыя приведены здѣсь только для того, чтобы, на основаніи сходства вида ихъ со вторыми, по возможности нагляднѣе объяснить значеніе послѣднихъ.

Если въ разностяхъ (114) замѣнить:

величины $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ — величинами x, y, z,

величины P, Q, R — величинами X, $У$, Z,

то получатся разности (113).

Однако слѣдуетъ замѣтить, что P, Q, R, какъ проэкціи на оси координатъ угловой скорости Ω, имѣютъ измѣренія:

$$\frac{1}{(\text{единица времени})} = \frac{1}{в},$$

между тѣмъ какъ X, $У$, Z — проэкціи силы F на тѣ же оси координатъ, — имѣютъ измѣренія:

$$\frac{(\text{единица массы})\ (\text{единица длины})}{(\text{единица времени})^2} = \frac{м.д}{в^2}.$$

(Примѣчаніе. Символы: (единица массы), (единица длины), (единица времени) мы условимся обозначать, для краткости, буквами: *м*, *д*, *в* русскаго курсивнаго шрифта).

Для того, чтобы разности (114), имѣющія измѣренія скорости, получили значенія проэкцій длины, необходимо помножить ихъ на величину *в*.

Разности (113) имѣютъ слѣдующія измѣренія:

$$\frac{м.д^2}{в^2};$$

если помножить ихъ на величину:

$$\frac{в^2}{м.д},$$

то полученныя произведенія:

$$(yZ - zY)\frac{в^2}{м.д},\ (zX - xZ)\frac{в^2}{м.д},\ (xY - yX)\frac{в^2}{м.д}\ldots\ldots (115)$$

будутъ имѣть измѣренія длинъ и *будутъ представлять проэкціи на оси координатъ длины, возстановленной изъ точки O перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ радіусъ векторъ* $\overline{OM}$ (черт. 7) *матерьяльной точки M (x, y, z) и черезъ силу F, приложенную къ точкѣ M; эта длина* $\overline{OL}$ *направлена въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ O, головою по направленію* $\overline{OL}$, *смотрящему на точку M, видно, что сила* $\overline{MF}$ *направлена слѣва на право* (черт. 7).

Такимъ же образомъ, какъ на страницахъ 89 и 90 кинематической части, мы выведемъ, что квадратъ длины $\overline{OL}$ равняется:

$$\left(\overline{OL}\right)^2 = \left[(X^2+Y^2+Z^2)(x^2+y^2+z^2) - (xX+yY+zZ)^2\right]\left(\frac{в^2}{м.д}\right)^2;$$

или

$$\left(\overline{OL}\right)^2 = \left[\left(\overline{MF}\right)^2.\left(\overline{OM}\right)^2 - \left(\overline{MF}.\overline{OM}\cos\left(\overline{MF},\overline{OM}\right)\right)^2\right]\left(\frac{в^2}{м.д}\right)^2.$$

Заключающійся въ этой формулѣ уголъ между направленіями $\overline{OM}$ и $\overline{MF}$ есть уголъ μMF (черт. 7), синусъ котораго равенъ синусу угла OMF, поэтому:

$$\overline{OL} = \left(\overline{MF}\,.\,\overline{OM}\sin(OMF)\right)\frac{в^2}{м.д}$$

или

$$\overline{OL} = \left(Fr\sin(F,r)\right)\frac{в^2}{м.д},$$

гдѣ r означаетъ величину и направленіе радіуса вектора $\overline{OM}$.

Произведеніе:

$$p = r\sin(F,r)$$

выражаетъ длину перпендикуляра $\overline{OD}$, опущеннаго изъ точки O на направленіе силы $\overline{MF}$; этотъ перпендикуляръ, представляющій кратчайшее разстояніе силы $\overline{MF}$ отъ точки O, называется *плечомъ силы* F по отношенію къ центру O.

Произведеніе Fp изъ величины силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, на плечо ея по отношенію къ какому-либо центру называется моментомъ этой силы вокругъ этого центра.

И такъ:

$$\overline{OL} = Fp\frac{в^2}{м.д}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (116)$$

то есть, длина $\overline{OL}$ равняется моменту силы $\overline{MF}$ вокругъ центра O, дѣленному на единицу силы (символъ единицы силы: см. формулу (29)).

Единица моментовъ силъ есть моментъ единицы силы при длинѣ плеча, равной единицѣ; т. е.

$$(\text{единица моментовъ силъ}) = \frac{м.д^2}{в^2}.$$

Моментъ силы вокругъ центра имѣетъ всегда величину положительную.

Длину $\overline{OL}$ можно разсматривать какъ изображеніе момента Fp; изображенный такимъ образомъ моментъ силы можно назвать *линейнымъ изображеніемъ момента* *) *силы вокругъ центра* O.

Величины (115), которыя суть проэкціи длины $\overline{OL}$ на оси координатъ:

$$\left.\begin{aligned} (yZ - zY)\frac{в^2}{м.д} &= \overline{OL}\cos(\overline{OL},X) \\ (zX - xZ)\frac{в^2}{м.д} &= \overline{OL}\cos(\overline{OL},Y) \\ (xY - yX)\frac{в^2}{м.д} &= \overline{OL}\cos(\overline{OL},Z) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (117)$$

*) Произведеніе Fp называютъ различно: статическимъ моментомъ, линейнымъ моментомъ, вращательнымъ моментомъ; надобность въ какомъ либо прилагательномъ къ слову: „моментъ“ явилась вслѣдствіе того, что это слово получило въ механикѣ нѣсколько различныхъ значеній; въ терминѣ, принятомъ въ этой книгѣ, прилагательное замѣняется словами: „вокругъ центра такого-то“.

могутъ быть названы *проэкціями на оси кординатъ линейнаго изображенія момента силы вокругъ центра O.*

На основаніи равенства (116), изъ предыдущихъ формулъ можно получить слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} yZ - zУ &= Fp\cos(\overline{OL},X) \\ zX - xZ &= Fp\cos(\overline{OL},У) \\ xУ - yX &= Fp\cos(\overline{OL},Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

Моментъ силы вокругъ центра можетъ быть еще изображенъ удвоенною площадью треугольника OMF, имѣющаго основаніемъ длину $\overline{MF}$, изображающую силу, а высотою — плечо $\overline{OD}$ этой силы по отношенію къ тому центру O, вокругъ котораго составляется моментъ; величина этой площади равна

$$Fp\frac{в^2}{м},$$

а линія $\overline{OL}$ нормальна къ ней; поэтому изъ равенствъ (118) слѣдуетъ, что величины:

$$(yZ - zУ)\frac{в^2}{м},\ (zX - xZ)\frac{в^2}{м},\ (xУ - yX)\frac{в^2}{м} \ldots \quad (119)$$

равны положительно или отрицательно взятымъ проэкціямъ удвоенной площади треугольника OMF на плоскости координатъ:

$$УZ \qquad ZX \qquad XУ;$$

знакъ проэкціи опредѣляется знакомъ косинуса угла, составляемаго направленіемъ $\overline{OL}$ съ направленіемъ положительной оси:

$$X \qquad У \qquad Z.$$

Чтобы выразиться опредѣлительнѣе, означимъ знаками:

$$F_{yz} \quad F_{zx} \quad F_{xy}$$

величины и направленія проэкцій силы F на вышеозначенныя плоскости координатъ и чрезъ:

$$r_{yz} \qquad r_{zx} \qquad r_{xy}$$

означимъ величины и направленія проэкцій радіуса вектора $\overline{OM}$ на тѣ же плоскости; тогда значеніе разностей (113) можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l}
yZ - zY = \begin{cases} +F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL},X) > 0 \\ -F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL},X) < 0 \end{cases} \\
zX - xZ = \begin{cases} +F_{zx}r_{zx}\sin(F_{zx},r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Y) > 0 \\ -F_{zx}r_{zx}\sin(F_{zx},r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Z) < 0 \end{cases} \\
xY - yX = \begin{cases} +F_{xy}r_{xy}\sin(F_{xy},r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Z) > 0 \\ -F_{xy}r_{xy}\sin(F_{xy},r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL},Z) < 0 \end{cases}
\end{array}\right\} \quad (120)$$

Въ самомъ дѣлѣ, проэкція площади треугольника OMF на плоскость YZ есть площадь треугольника OM_1F_1 (черт. 8 и 9), двѣ стороны котораго суть: $\overline{OM_1}$ (черт. 8 и 9) — проэкція радіуса вектора $\overline{OM}$ на плоскость YZ, и $\overline{M_1F_1}$ — проэкція силы $\overline{MF}$ на ту же плоскость; величина удвоенной площади треугольника OM_1F_1 выражается произведеніемъ:

$$2 \text{ (площ. } OM_1F_1) = \frac{e^2}{м} F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}),$$

которое есть величина всегда положительная, также какъ и площади OMF и OM_1F_1; поэтому:

$$2(\text{площ. } OMF)\cos(\overline{OL},X) = 2(\text{площ. } OM_1F_1) =$$

$$= \frac{e^2}{м} F_{yz}r_{yz}\sin(F_{yz},r_{yz}),$$

если уголъ между направленіемъ $\overline{OL}$ и положительною осью X острый (черт. 8), и

$$2(\text{площ } OMF)\cos(\overline{OL},X) = -2(\text{площ. } OM_1F_1) =$$

$$= -\frac{e^2}{м} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}),$$

если уголъ между направленіемъ $\overline{OL}$ и положительною осью X тупой (черт. 9).

Этимъ объясняется, почему изъ выраженій (118) получаются выраженія (120).

Заключающіяся во вторыхъ частяхъ формулъ (120) произведенія:

$$r_{yz}\sin(F_{yz}, r_{yz}) \quad r_{zx}\sin(F_{zx}, r_{zx}) \quad r_{xy}\sin(F_{xy}, r_{xy}),$$

выражаютъ длины кратчайшихъ разстояній между силою $\overline{MF}$ и осями координатъ X, $У$, Z; мы докажемъ это относительно перваго изъ написанныхъ произведеній.

Произведеніе

$$r_{yz}\sin(F_{yz}, r_{yz})$$

выражаетъ длину $\overline{OD_1}$ (черт. 10) перпендикуляра, опущеннаго изъ точки O на линію $\overline{M_1F_1}$; кратчайшее же разстояніе KE между осью X и линіею $\overline{MF}$ равно и параллельно перпендикуляру $\overline{OD_1}$, потому что, подобно ему, пересѣкаетъ ось X и перпендикулярно къ плоскости MM_1F_1F, проэктирующей линію $\overline{MF}$ на плоскость $УZ$; эта плоскость MM_1F_1F проходитъ черезъ линію $\overline{MF}$ и параллельна оси X, поэтому кратчайшее разстояніе между этими двумя линіями должно быть къ ней перпендикулярно.

Такимъ образомъ оказывается, что каждая изъ разностей (113) есть положительно или отрицательно взятое произведеніе изъ проэкціи силы F на одну изъ плоскостей координатъ и изъ кратчайшаго разстоянія этой силы отъ координатной оси, перпендикулярной къ той плоскости, на которую взята проэкція силы; подобныя произведенія называются моментами силъ вокругъ осей.

Пусть OP есть какая-либо ось, положительное направленіе которой считается отъ O къ P; пусть $\overline{MF}$ есть какая-либо сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ M.

Моментомъ силы $\overline{MF}$ *вокругъ оси* OP *называется произведеніе изъ проэкціи силы на плоскость перпендикулярную къ оси* (черт. 11 и 12) *и изъ кратчайшаго разстоянія* $\overline{KE}$ *между силою и осью; произведенію этому должно дать положительный знакъ, если наблюдателю, стоящему ногами въ* K, *головою по положительному направленію оси* KP, *смотрящему на точку* M_1, *видно, что проэкція силы идетъ слѣва на право* (какъ на черт. 11); *если же наблюдателю видно, что проэкція* $\overline{M_1F_1}$ *направлена справа на лѣво* (какъ на черт. 13), *то тогда моментъ силы вокругъ оси равняется вышесказанному произведенію, взятому со знакомъ минусъ.*

Моментъ силы вокругъ оси измѣряется тѣми же самыми единицами, какъ и моментъ силы вокругъ центра.

По данному сейчасъ опредѣленію, разности (113) оказываются *моментами силы* F *вокругъ осей координатъ.*

Другія значенія этихъ разностей опредѣляются формулами (118), которыя мы выразимъ словесно слѣдующимъ образомъ:

Разности (113) *суть проэкціи на оси координатъ момента силы* F *вокругъ начала координатъ.*

Выражаясь такъ, мы приписываемъ моменту силы вокругъ центра не только величину, но и направленіе, подразумѣвая подъ направленіемъ момента — направленіе его линейнаго изображенія.

Условимся обозначать величину и направленіе момента силы F вокругъ центра O знакомъ:

$$L_0(F).$$

Этимъ знакомъ будемъ пользоваться позднѣе, а именно въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ придется различать моменты различныхъ

силъ, приложенныхъ къ одной или къ нѣсколькимъ точкамъ; такъ, напримѣръ, моменты силъ $F1$, $F2$,... будемъ обозначать знаками:

$$L_0(F1),\ L_0(F2),\ \ldots;$$

въ разсужденіяхъ же, относящихся къ одной силѣ и моменту ея, гдѣ не предвидится возможности смѣшать этотъ моментъ съ другими величинами того же рода, мы упростимъ обозначеніе и вмѣсто $L_0(F)$ будемъ писать L_0.

Изъ того, что сказано въ этомъ параграфѣ, слѣдуетъ: $(yZ - zY)$ есть моментъ силы F, приложенной къ точкѣ M, вокругъ оси X, или проекція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:

$$yZ - zY = L_0 \cos(L_0 X); \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121,\ a)$$

$(zX - xZ)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Y, или проэкція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$zX - xZ = L_0 \cos(L_0 Y); \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121,\ b)$$

$(xY - yX)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Z, или проэкція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$xY - yX = L_0 \cos(L_0 Z). \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121,\ c)$$

Вообще, *моментъ силы F вокругъ какой-либо оси PO, проходящей черезъ начало координатъ, есть проэкція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:*

$$(\text{мом. силы } F \text{ вокругъ оси } OP) =$$
$$= (yZ - zY)\cos(PX) + (zX - xZ)\cos(PY) + (xY - yX)\cos(PZ) =$$
$$= L_0 \cos(L_0 P) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

§ 23. Моментъ количества движенія матерьяльной точки вокругъ центра и вокругъ данной оси. Секторьяльныя скорости проэкцій точки на плоскости координатъ.

Произведеніе изъ скорости матерьяльной точки на массу ея

называется *количествомъ движенія матерьяльной точки;* оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица количествъ движенія}) = \frac{м.д}{в} \ldots\ldots\ (123)$$

Подобно силѣ, количество движенія матерьяльной точки можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки по направленію скорости ея; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія точки болѣе единицы количествъ движенія.

Подъ направленіемъ количества движенія матерьяльной точки мы подразумѣваемъ направленіе изображающей его длины.

Произведенія:

$$m\frac{dx}{dt} \qquad m\frac{dy}{dt} \qquad m\frac{dz}{dt}$$

мы называетъ проэкціями на оси координатъ количества движенія матерьяльной точки.

Изображая количество движенія, подобно силѣ, длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки, мы можемъ ввести понятіе о моментѣ количества движенія вокругъ какого-либо центра и о моментѣ его вокругъ какой-либо оси; понятно, что изложеніе и формулированіе этихъ понятій сведется къ почти дословному повторенію всего того, что изложено въ предыдущемъ параграфѣ, а потому мы ограничимся только слѣдующими указаніями.

Единица моментовъ количествъ движеній имѣетъ иныя измѣренія, чѣмъ единица моментовъ силъ, а именно:

$$(\text{единица моментовъ колич. движ.}) = \frac{м.д^2}{в}.$$

Тѣ величины, производныя которыхъ по времени образуютъ первыя части дифференціальныхъ уравненій (110), имѣютъ слѣдующія значенія:

$(ymz' - zmy')$ есть моментъ вокругъ оси X количества движенія

точки m, или проэкція на ось X момента того же количества движенія вокругъ начала координатъ:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0X); \ldots\ldots\ldots (124, a)$$

гдѣ l_0 означаетъ величину и направленіе момента количества движенія точки m вокругъ начала координатъ;

$(zmx' - xmz')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси $У$, или проэкція на ось $У$ момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 У); \ldots\ldots\ldots (124, b)$$

$(xmy' - ymx')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси Z, или проэкція на ось Z момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0Z). \ldots\ldots\ldots (124, c)$$

Такова аналогія между значеніями этихъ величинъ и значеніями разностей, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Кромѣ того, величины (124) имѣютъ еще иной смыслъ: каждая изъ нихъ есть удвоенное произведеніе изъ массы матерьяльной точки на производную по времени отъ нѣкоторой площади; мы докажемъ это надъ разностью:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Разность эта, будучи моментомъ количества движенія точки m вокругъ оси Z, можетъ быть выражена такъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \pm m v_{xy} r_{xy} \sin(v_{xy}, r_{xy}) \ldots\ldots (125)$$

Здѣсь долженъ быть взятъ знакъ $+$, если $\cos(l_0Z)$ болѣе нуля и знакъ минусъ, если этотъ косинусъ менѣе нуля; v_{xy} означаетъ проэкцію скорости точки на плоскость $XУ$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ v_{xy} есть скорость проэкціи M_3 на плоскость XY матерьяльной точки m; означивъ черезъ ds_{xy} *положительно-взятую* длину безконечно-малой дуги, пройденную точкою M_3 въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени отъ момента t до момента $(t+dt)$, и принявъ во вниманіе, что:

$$v_{xy}=\frac{ds_{xy}}{dt},$$

можемъ представить равенство (125) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=m\frac{(\pm r_{xy}ds_{xy}\sin(v_{xy},r_{xy}))}{dt} \ldots\ldots \quad \textbf{(126)}$$

Разсмотримъ значеніе второй части этого равенства. Произведеніе:

$$r_{xy}ds_{xy}\sin\left(v_{xy},\ r_{xy}\right)$$

выражаетъ величину площади, разнящейся на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ отъ удвоенной величины площади сектора $OM_3M'_3$ (чертежи 13 и 14), заключающагося между радіусами векторами OM_3 и OM'_3 и дугою $M_3M'_3$, описанною точкою M_3 въ теченіи времени отъ t до $(t+dt)$. Знаки, поставленные передъ этимъ произведеніемъ въ равенствѣ (126), означаютъ, что удвоенную величину этой площади должно взять со знакомъ плюсъ, если наблюдателю, смотрящему на точку M_3 съ положительной оси Z, скорость v_{xy} ($M_3\ V_3$ на чертежахъ) кажется направленною слѣва на право, какъ на чертежѣ 13); если же скорость $M_3\ V_3$ кажется направленною справа на лѣво (какъ на черт. 14), то величина удвоенной площади $OM_3M'_3$ входитъ въ равенство (126) со знакомъ минусъ.

Можно еще замѣтить, что знакъ плюсъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ уголъ θ_3, составляемый радіусомъ векторомъ OM_3 съ осью X, увеличивается въ теченіи времени отъ t до $(t+dt)$ (черт. 13); знакъ же минусъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ этотъ уголъ уменьшается (черт. 14).

Интегралъ:

$$2\Pi_{xy}=\int\Big(\pm r_{xy}\sin(v_{xy},r_{xy})\Big)ds_{xy}, \ldots \ldots (127)$$

взяты вдоль по кривой, описанной точкою M_3, отъ положенія A, занимаемаго ею въ моментъ t_0, до положенія, занимаемаго ею въ моментъ t, называется *удвоенною площадью сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ точки* M_3 *въ теченіи времени отъ* t_0 *до* t; предполагается, что вышеуказанное правило знаковъ соблюдается для каждаго безконечно-малаго элемента времени.

Если уголъ Θ_3 постоянно увеличивается въ теченіи всего промежутка времени $(t-t_0)$, то тогда интегралъ (127) выражаетъ величину удвоенной площади сектора OAM_3O, заключающейся внутри периметра, образуемаго радіусами векторами OA и OM_3 и траэкторіею AM_3 (черт. 13); если уголъ Θ_3 все время уменьшается, то интегралъ (127) выражаетъ отрицательно взятую величину удвоенной площади OAM_3O; если же уголъ Θ_3 то возрастаетъ, то убываетъ (какъ напримѣръ изображено на чертежѣ 15), то интегралъ (127) будетъ состоять изъ положительныхъ и отрицательныхъ частей, напримѣръ, въ случаѣ представленномъ на чертежѣ 15, будетъ:

$$\Pi_{xy}=\text{площ.}\,(OABDO)-\text{площ.}\,(ODM_3O).$$

Во всякомъ случаѣ очевидно, что во второй части равенства (126) заключается производная:

$$\frac{d\Pi_{xy}}{dt},$$

выражающая скорость, съ которою возрастаетъ площадь сектора, описываемаго радіусомъ векторомъ проэкціи движущейся точки на плоскость XY; эта производная называется *секторьяльною скоростью проэкціи движущейся точки на плоскость* XY; мы будемъ обозначать ее знакомъ:

$$\sigma(xy).$$

И такъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=2m\sigma(xy) \ldots\ldots\ldots\ldots (128)$$

Къ этому мы должны прибавить еще одно замѣчаніе касательно одного весьма употребительнаго выраженія секторьяльной скорости.

Уголъ $\Theta_з$ и радіусъ векторъ r_{xy} (который мы будемъ на время обозначать черезъ $r_з$) суть полярныя координаты точки $M_з$ на плоскости XY; означимъ черезъ $\alpha_з$ и $\beta_з$ координатныя оси этихъ координатъ.

Примемъ теперь во вниманіе, что въ случаяхъ, изображенныхъ на чертежѣ 13:

$$v_з \sin(v_з r_з)=v_з \sin(v_з\alpha_з)=v_з\cos(v_з\beta_з),$$

а въ случаяхъ, изображенныхъ на черт. 14:

$$v_з \sin(v_з r_з)=v_з\sin(V_з M_з\alpha_з)=v_з\sin\left((V_з M_з\beta_з)-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-v_з\cos(V_з M_з\beta_з)=-v_з\cos(v_з\beta_з);$$

(гдѣ, также временно, v_{xy} замѣнено чрезъ $v_з$).

Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ:

$$\pm r_з v_з \sin(v_з r_з)=r_з v_з\cos(v_з\beta_з).$$

По формулѣ же (20 bis) стр. 33-й кинематической части:

$$v_з\cos(v_з\beta_з)=r_з\frac{d\theta_з}{dt};$$

а потому, возстановляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть слѣдующее выраженіе удвоенной секторьяльной скорости:

$$2\sigma(xy)=r^2_{xy}\frac{d\theta_з}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (129)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность сказать слѣдующее относительно значеній величинъ, образующихъ первыя части равенствъ (124).

Во первыхъ, онѣ суть моменты количества движенія матерьяльной точки вокругъ осей координатъ, или проэкціи на оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ.

Во вторыхъ, онѣ суть удвоенныя произведенія изъ массы точки на секторьяльныя скорости проэкцій радіуса вектора на плоскости координатъ; это выражается формулами:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 2m\sigma(yz) = mr^2_{yz}\frac{d\theta_1}{dt} \ldots\ldots \quad \textbf{(130, a)}$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 2m\sigma(zx) = mr^2_{zx}\frac{d\theta_2}{dt} \ldots\ldots \quad \textbf{(130, b)}$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 2m\sigma(xy) = mr^2_{xy}\frac{d\theta_3}{dt} \ldots\ldots \quad \textbf{(130, c)}$$

Здѣсь θ_1 есть уголъ, составляемый съ осью Y проэкціею радіуса вектора движущейся точки на плоскость YZ; $\sigma\,(yz)$ — секторьяльная скорость проэкціи точки на ту же плоскость; θ_2 — уголъ, составляемый съ осью Z проэкціею радіуса вектора на плоскость ZX; $\sigma\,(zx)$ — секторьяльная скорость проэкціи точки на ту же плоскость.

§ 24. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (110). Интегралы, выражающіе законъ площадей.

Каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (110) выражаетъ, что производная по времени отъ момента количества движенія вокругъ одной изъ осей координатъ равняется моменту вокругъ той же оси силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Значеніе этихъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть объяснено еще иначе.

Длина l_0, проведенная изъ начала координатъ и представляющая величину и направленіе момента количества движенія матерьяльной точки вокругъ начала координатъ, измѣняетъ во время движенія точки свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ нѣкоторую кривую линію, которую можно назвать *годографомъ момента количества движенія.*

Уравненія (110) выражаютъ, что скорость точки, чертящей годографъ момента количества движенія, равна и параллельна длинѣ, изображающей моментъ силы F.

Если моментъ силы F вокругъ оси X равенъ нулю во все время движенія точки, то изъ уравненія (110, *a*) получимъ слѣдующій интегралъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(131, a)}$$

Моментъ силы F вокругъ оси X равенъ нулю или тогда, когда проэкція силы на плоскость YZ равна нулю (тогда $Y=0$, $Z=0$), или тогда, когда проэкція силы на эту плоскость проходитъ черезъ начало координатъ: послѣднее условіе выражается равенствомъ:

$$\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(132, a)}$$

и требуетъ, чтобы сила F пересѣкала ось X.

Интегралъ (131, a) выражаетъ, что секторьяльная скорость проэкціи радіуса вектора на плоскость YZ имѣетъ постоянную величину, то есть:

$$mr^2_{yz}\frac{d\theta_1}{dt}=C_1,$$

$$\sigma(yz)=\frac{d\Pi_{yz}}{dt}=\frac{C_1}{2m};$$

откуда слѣдуетъ:

$$\Pi_{yz}=\frac{C_1}{2m}t, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(133, a)}$$

то есть площадь сектора, описываемаго проэкціею радіуса вектора на плоскости YZ, возрастаетъ равномѣрно.

Такъ какъ за ось X можетъ быть взята всякая неподвижная линія, а за плоскость YZ — всякая плоскость перпендикулярная къ ней, то мы можемъ сказать слѣдующее:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ движущейся матерьяльной точкѣ, проходитъ черезъ какую либо неподвижную прямую линію, то дифференціальныя уравненія движенія этой точки имѣютъ интегралъ, выражающій постоянство секторьяльной скорости проэкціи радіуса вектора

точки на плоскость перпендикулярную къ прямой (началомъ радіуса вектора служитъ пересѣченіе прямой съ плоскостью).

Если во все время движенія моменты силы F вокругъ двухъ осей координатъ равны нулю, то движеніе точки совершается въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ.

Положимъ, что равны нулю моменты силы F вокругъ осей X и $У$, то есть, что сила F удовлетворяетъ двумъ условіямъ:

$$yZ - zУ = 0,\ zX - xZ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (134)$$

Помноживъ первое равенство на x, второе на y и сложивъ, получимъ равенство:

$$z(yX - xУ) = 0,$$

которое тоже должно быть удовлетворено при движеніи точки.

Оно можетъ быть удовлетворено или тѣмъ, что во все время движенія $z = 0$, или тѣмъ, что сила F удовлетворяетъ, кромѣ условій (134), еще условію:

$$xУ - yX = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (135)$$

Въ первомъ случаѣ точка движется въ плоскости $XУ$; мы сейчасъ покажемъ, что она движется въ нѣкоторой плоскости и во второмъ случаѣ.

Въ этомъ случаѣ вторыя части всѣхъ трехъ уравненій (110, a, b, c) равны нулю, а потому мы имѣемъ тогда три интеграла:

$$m(yz' - zy') = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (131,\ a)$$

$$m(zx' - xz') = C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (131,\ b)$$

$$m(xy' - yx') = C_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (131,\ c)$$

Помноживъ: первый — на x, второй — на y, третій — на z, и сложивъ, получимъ:

$$0 = C_1x + C_2y + C_3z; \ldots\ldots\ldots\ldots (136)$$

это — уравненіе той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, въ которой должна оставаться движущаяся точка.

Постоянныя C_1, C_2, C_3, пропорціональныя косинусамъ угловъ, составляемыхъ нормалью къ этой плоскости съ осями координатъ, опредѣлятся по начальнымъ обстоятельствамъ движенія: a, b, c, α, β, γ, а именно:

$$C_1=m(b\gamma-c\beta),\ C_2=m(c\alpha-a\gamma),\ C_3=m(a\beta-b\alpha)\ldots \quad (137)$$

Обратимъ вниманіе на эти случаи, въ которыхъ сила F удовлетворяетъ тремъ условіямъ (134) (135) и въ которыхъ, поэтому, дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки имѣютъ три интеграла (131, a, b, c).

Условія (134) и (135) можно представить въ видѣ слѣдующихъ равенствъ:

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},\ldots\ldots \quad (132)$$

выражающихъ, что направленіе силы F проходитъ черезъ начало координатъ.

Интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что проэкціи на всѣ три оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ имѣютъ постоянныя величины; изъ этого слѣдуетъ, что моментъ количества движенія l_0 имѣетъ постоянную величину:

$$l_0=m\Big[(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2\Big]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=mr_0v_0\sin(v_0r_0)\ldots\ldots \quad (138)$$

и постоянное направленіе:

$$\left.\begin{aligned}\cos(l_0X)&=\frac{m(b\gamma-c\beta)}{l_0}\\ \cos(l_0Y)&=\frac{m(c\alpha-a\gamma)}{l_0}\\ \cos(l_0Z)&=\frac{m(a\beta-b\alpha)}{l_0}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots \quad (139)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что сек-

торьяльныя скорости проэкцій радіуса вектора на всѣ три плоскости координатъ постоянны:

$$\sigma(yz)=\frac{C_1}{2m},\ \sigma(zx)=\frac{C_2}{2m},\ \sigma(xy)=\frac{C_3}{2m};\ \ldots\ldots \quad (140)$$

а отсюда слѣдуетъ, что площади секторовъ, описываемыхъ на плоскостяхъ координатъ проэкціями радіуса вектора на эти плоскости, возрастаютъ равномѣрно:

$$\Pi_{yz}=\frac{C_1}{2m}t,\ \Pi_{zx}=\frac{C_2}{2m}t,\ \Pi_{xy}=\frac{C_3}{2m}t\ \ldots\ldots \quad (141)$$

Секторьяльная скорость проэкціи радіуса вектора на какую бы то ни было неподвижную плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, будетъ также постоянна; въ самомъ дѣлѣ, если перемѣнимъ направленіе осей координатъ такимъ образомъ, чтобы одна изъ новыхъ осей совпала съ направленіемъ OP, перпендикулярнымъ къ этой плоскости $\mathfrak{F}$, то, по предыдущимъ формуламъ, разсматриваемая секторьяльная скорость σ $(\mathfrak{F})$ выразится такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F})=\frac{l_0\cos(l_0P)}{2m}\ \ldots\ldots \quad (142)$$

Отсюда видно, что наибольшая секторьяльная скорость:

$$\sigma=\frac{l_0}{2m}\ \ldots\ldots \quad (143)$$

будетъ въ плоскости (136), въ которой заключается траэкторія движущейся точки; секторьяльная же скорость проэкціи радіуса вектора на всякую плоскость, проходящую черезъ направленіе l_0, будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, *если равнодѣйствующая силъ приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, при всякомъ положеніи точки направлена чрезъ начало координатъ, то движеніе точки совершается въ плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и подчиняется тому закону, что площадь сектора, описываемаго радіусомъ векторомъ, возрастаетъ равномѣрно;* сек-

торьяльная скорость въ этой плоскости (величина которой постоянна) можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}, \qquad (144)$$

гдѣ θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ r съ какимъ либо неподвижнымъ направленіемъ, проведеннымъ черезъ начало координатъ въ плоскости траэкторіи.

Правило, опредѣляющее, что произведеніе изъ массы точки на площадь сектора, описываемаго проэкціею радіуса вектора ея на нѣкоторую плоскость, возрастаетъ равномѣрно, есть частный случай закона движенія системы матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію центральныхъ силъ; законъ этотъ извѣстенъ подъ именемъ *закона площадей, описываемыхъ проэкціями радіусовъ векторовъ на сказанную плоскость.*

Говоря о движеніи одной матерьяльной точки, мы выразимся такъ:

a) *законъ площадей въ нѣкоторой плоскости имѣетъ мѣсто, если равнодѣйствующая приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ силъ проходитъ черезъ ось, перпендикулярную къ этой плоскости;*

b) *законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ неподвижную точку, если равнодѣйствующая приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ силъ проходитъ черезъ эту неподвижную точку.*

Законъ площадей былъ открытъ путемъ индуктивнымъ; Кеплеръ, изъ наблюденій надъ движеніями планетъ вокругъ солнца, заключилъ, что площадь сектора, описываемаго радіусомъ векторомъ каждой планеты, возрастаетъ равномѣрно. Ньютонъ, путемъ математической дедукціи, доказалъ существованіе этого закона движенія при дѣйствіи на матерьяльную точку центральныхъ силъ.

Каждый изъ интеграловъ (131, *a*, *b*, *c*,) выражаетъ законъ площадей въ одной изъ плоскостей координатъ.

Относительно числа интеграловъ (131), удовлетворяющихъ какой либо задачѣ, можно замѣтить, что не можетъ встрѣтиться случаевъ, въ которыхъ задачѣ удовлетворяютъ два интеграла, третій же

не удовлетворяетъ; казалось бы, такіе случаи возможны тогда, когда сила F постоянно удовлетворяетъ двумъ условіямъ (134), не удовлетворяя третьему (135); но тогда, какъ видѣли выше, движеніе должно происходить постоянно въ плоскости XY, то есть должно быть:

$$z=0,\ z'=0,\ c=0,\ \gamma=0,$$

а слѣдовательно (137): $C_1=O$, $C_2=O$; такъ что интегралы (131, a) (131, b) обращаются въ тождества вида: $O=O$.

Изъ всего сказаннаго видно, что дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки могутъ имѣть:

либо всѣ три интеграла (131, a, b, c),

либо только одинъ изъ нихъ,

либо ни одного.

§ 25. Работа силы. Живая сила. Значеніе дифференціальнаго уравненія (112).

Обратимся теперь къ дифференціальному уравненію (112)(§ 21). Вторая часть его:

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

равняется произведенію:

$$Fds\cos(F,v), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

составленному изъ длины безконечно-малаго элемента пути, проходимаго матерьяльною точкою, и изъ проэкціи на направленіе скорости равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ; это произведеніе называется *работою силы F на протяженіи элемента пути ds* или *элементарною работою силы F*.

Элементарная работа можетъ имѣть величину положительную или отрицательную, смотря потому, будетъ ли уголъ (F,v) острый или тупой. Въ первомъ случаѣ сила способствуетъ движенію, во второмъ — противодѣйствуетъ ему. Существуетъ разрядъ силъ, которыя всегда даютъ отрицательную работу, являясь всегда въ качествѣ противодѣйствій движенію; таковы: треніе, сопротивленіе среды, электродинамическія силы дѣйствія индукціонныхъ токовъ,

возбуждаемыхъ движеніемъ проводниковъ и магнитовъ. Такія силы называются *силами сопротивленія движенію,* или просто *сопротивленіями движенію.*

Интегралъ:

$$\int_{s_1}^{s_2} F\cos(F,v)ds,$$

взятый по протяженію нѣкоторой части пути, пройденнаго точкою, называется *работою силы F на этой части пути.*

Работа имѣетъ измѣренія одинаковыя съ моментами силъ: она представляетъ произведеніе изъ величины силы на длину; такъ что:

$$(\text{единица работы}) = (\text{един. силы})\ (\text{един. длины}) = \frac{м.д^2}{в^2} \quad \ldots (146)$$

На практикѣ за единицу работы принимаютъ килограммо-метръ, то есть работу, совершаемую на протяженіи одного метра, вѣсомъ одного килограмма (въ Парижѣ, на уровнѣ моря); но правильнѣе принять за единицу работы ту, которая выражена формулою (146).

Коммиссія при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ (стр. 27) предложила принять за единицу — работу, производимую диною на протяженіи сантиметра (предполагая, конечно, что направленіе силы совпадаетъ постоянно съ направленіемъ скорости); эту единицу работы предложено называть эргъ (erg).

$$\text{Эргъ} = \frac{(\text{граммъ}).(\text{сантиметръ})^2}{(\text{секунда})^2} \quad \ldots\ldots\ldots (147)$$

Приводимъ здѣсь числовыя выраженія нѣкоторыхъ величинъ работы въ эргахъ.

Килограммометръ = 100000. g. (эргъ).

Килограммометръ въ Парижѣ, на уровнѣ моря = 9,8094. 10^7. (эргъ).

Англійскій фунтофутъ = 13825. g. (эргъ).

Лошадиная сила есть способность произвести 75 килограммометровъ работы въ секунду; если принять $g = 981$ (въ сантиметрахъ

и секундахъ), то лошадиную силу можно опредѣлить какъ способность произвести работу въ 7,36. 10^9 эрговъ въ секунду.

Въ Англіи принята лошадиная сила нѣсколько большая: способность произвести 550 фунтофутовъ работы въ секунду или, принимая $g=981$, способность произвести 7,46. 10^9 эрговъ работы въ секунду.

Первая часть дифференціальнаго уравненія (112) есть дифференціалъ отъ произведенія:

$$\frac{mv^2}{2},$$

называемаго *живою силою* матерьяльной точки или *кинетическою энергіею* ея.

Живая сила имѣетъ тѣ же самыя измѣренія, какъ и работа, а потому эргъ есть также единица кинетической энергіи или живой силы.

Дифференціальное *уравненіе* (112) *выражаетъ, что безконечно малое приращеніе живой силы матерьяльной точки, получаемое ею на протяженіи безконечно-малаго элемента пути ея, равняется элементарной работѣ* (на протяженіи того же элемента пути) *равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ,* элементарная же работа равнодѣйствующей F равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ силъ: $F1, F2, \ldots. Fk$, то есть:

$$F\cos(F,v)ds = F1\cos(F1,v)ds + F2\cos(F2,v)ds + \ldots.$$
$$\ldots. + Fk\cos(Fk,v)ds \;\ldots\ldots\ldots\; (148)$$

Пусть t_1 и t_2 суть два какіе либо момента времени, v_1 и v_2 — скорость матерьяльной точки въ эти моменты, s_1 — разстояніе, считаемое по дугѣ траэкторіи, отъ нѣкоторой опредѣленной точки S_0 траэкторіи, до того положенія, которое матерьяльная точка занимаетъ въ моментъ t_1, l_{21} — длина пути пробѣгаемаго точкою въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$.

Возьмемъ отъ обѣихъ частей уравненія (112) интегралы въ предѣлахъ, соотвѣтствующихъ моментамъ t_1 и t_2; получимъ:

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\int_{s_1}^{s_{II}} F\cos(F,v)ds, \ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

гдѣ:

$$s_{II}=s_1+l_{21}.$$

Это равенство выражаетъ, что *разность между величинами живой силы въ концѣ и въ началѣ пути, пройденнаго свободною матерьяльною точкою въ теченіи какого либо промежутка времени* (t_2-t_1), *равняется работѣ, произведенной на этомъ пути равнодѣйствующею силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.*

Дифференціальное уравненіе (112) и равенство (149) справедливы при всякихъ силахъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ.

§ 26. Законъ живой силы или сохраненія энергіи для одной матерьяльной точки. Потенціальная функція. Поверхности уровня.

Если проэкціи на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, суть такія функціи координатъ, которыя дѣлаютъ трichленъ:

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи U $(x,\ y,\ z)$ координатъ, то дифференціальное уравненіе (112) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$d\left(\frac{vm^2}{2}\right)=dU;$$

а потому дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки будутъ имѣть тогда слѣдующій интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2}=U+h, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

гдѣ h есть произвольная постоянная.

Условіе:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(151)}$$

требуетъ, чтобы проэкціи силы на оси координатъ были равны производнымъ отъ U по координатамъ; а именно должно быть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(152)}$$

Функція U отъ x, y, z, производныя которой по x, y, z выражаютъ проэкціи X, Y, Z силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ точкѣ (x, y, z) пространства, называется *потенціальною* или *силовою функціею* этой силы. Сила же, проэкціи которой на оси координатъ суть функціи отъ x, y, z, удовлетворяющія условію (151), называется *силою, имѣющею потенціалъ.*

Если придадимъ опредѣленныя численныя значенія: a, b, c перемѣннымъ величинамъ x, y, z, заключающимися въ функціи U, то послѣдняя получитъ нѣкоторое численное значеніе C.

Уравненіе:

$$U(x, y, z) = U(a, b, c)$$

или

$$U(x, y, z) = C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(153)}$$

есть уравненіе поверхности, проходящей черезъ ту точку пространства, координаты которой суть a, b, c; во всѣхъ точкахъ этой поверхности, называемой *поверхностью уровня*, потенціальная функція U имѣетъ одну и ту же постоянную величину C; эта постоянная называется *параметромъ* поверхности уровня.

Придавая параметру C въ уравненіи (153) различныя дѣйствительныя значенія, которыя можетъ получать потенціальная функція U, мы получимъ уравненія различныхъ поверхностей уровня этой функціи. Каждой потенціальной функціи свойственно безчисленное множество поверхностей уровня, совокупность которыхъ образуетъ систему, заполняющую собою все то пространство, внутри котораго потенціальная функція имѣетъ дѣйствительныя значенія.

Нормаль, проведенная къ поверхности уровня черезъ какую либо точку ея, имѣетъ два прямопротивоположныя направленія; одно изъ нихъ мы назовемъ положительною нормалью, другое — отрицательною.

Косинусы угловъ, составляемыхъ этими противоположными направленіями съ осями координатъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(N_1X)&=\frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial x},\\ \cos(N_1У)&=\frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial y},\\ \cos(N_1Z)&=\frac{1}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial z},\\ \cos(N_2X)&=\frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial x},\\ \cos(N_2У)&=\frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial y},\\ \cos(N_2Z)&=\frac{1}{-\Delta U}\frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (154)$$

гдѣ:

$$\Delta U=+\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\ldots\ldots\ldots (155)$$

и гдѣ въ производныя должны быть подставлены координаты той точки поверхности уровня, изъ которой возстановлена нормаль.

За положительное мы примемъ направленіе N_1, соотвѣтствующее положительному знаку корня (155), эту положительную нормаль мы будемъ иногда, для краткости, называть просто нормалью и будемъ обозначать буквою N безъ знака внизу.

Пусть M есть точка пространства, черезъ которую проведена поверхность уровня съ параметромъ C и нормаль къ этой поверхности; M_1 — другая точка, безконечно близкая къ M; x, y, z — координаты точки M; $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ — координаты точки M_1, гдѣ δx, δy, δz суть проэкціи на оси координатъ какой либо безконечно-малой дуги δs, стягиваемой хордою MM_1. Очевидно, пара-

метръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_1, можетъ отличаться отъ C только на безконечно-малую величину:

$$\delta C = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z = \Delta U \cos(N_1, \delta s)\delta s \ \ldots . \quad (156)$$

Это выраженіе приведено здѣсь для того, чтобы показать, что съ той стороны поверхности уровня C, въ которую направлена положительная нормаль, находятся поверхности уровня съ параметрами большими C, со стороны же отрицательной нормали находятся поверхности уровня съ параметрами меньшими C; въ самомъ дѣлѣ, изъ выраженія (156) видно, что:

$$\delta C > 0, \text{ если } \cos(N_1 \delta s) > 0$$

$$\delta C < 0, \text{ если } \cos(N_1 \delta s) < 0.$$

На основаніи равенствъ (152) изъ формулъ (155) и (154) получимъ:

$$\Delta U = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F,$$

$$\cos(N_1, X) = \cos(F, X); \cos(N_1, Y) = \cos(F, Y); \cos(N_1, Z) = \cos(F, Z);$$

послѣднія три равенства выражаютъ, что *сила F, имѣющая разсматриваемый потенціалъ и приложенная къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ точкѣ M (x, y, z) пространства, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ эту точку.*

Вернемся теперь къ интегралу (150), который можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (157)$$

и можетъ быть выраженъ слѣдующею словесною формулою:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ, имѣетъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется слѣдующему закону: разность между живою силою

и величиною параметра той поверхности уровня, на которой находится матерьяльная точка, есть величина постоянная во все время движенія.

Этотъ законъ движенія извѣстенъ подъ именемъ *закона живой силы* для одной матерьяльной точки.

Работа силы F, имѣющей потенціалъ U, на пути, начинающемся въ точкѣ M_1 (x_1, y_1, z_1) и кончающемся въ точкѣ M_2 (x_2, y_2, z_2), выразится разностью значеній потенціальной функціи въ этихъ точкахъ; то есть:

$$\int_{s_1}^{s_{II}} F\cos(F,v)ds = \int (Xdx + Ydy + Zdz) =$$

$$= \int dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \ldots\ldots \quad (158)$$

Слѣдовательно, величина работы не зависитъ отъ того пути, который опишетъ движущаяся точка между точками M_1 и M_2, а только отъ величинъ параметровъ тѣхъ поверхностей уровня, на которыхъ эти точки находятся.

Точно также, при переходѣ матерьяльной точки по какому бы то ни было пути съ одной поверхности уровня на другую, сила F совершаетъ работу, выражаемую разностью параметровъ этихъ поверхностей; при этомъ параметръ той поверхности, изъ которой вышла точка, играетъ роль вычитаемаго, а параметръ той поверхности, на которую приходитъ точка — роль уменьшаемаго.

Уравненіе (149) предыдущаго параграфа принимаетъ при силахъ, имѣющихъ потенціалъ, слѣдующій видъ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \ldots . \quad (159)$$

что получается также изъ интеграла (157) или (150), выражающаго законъ живой силы для одной матерьяльной точки.

Примѣрами силъ, имѣющихъ потенціалъ, могутъ служить:

а) постоянная сила. Потенціальная функція ея есть линейная функція координатъ; въ самомъ дѣлѣ, если:

$$X = A,\quad Y = B,\quad Z = C,$$

гдѣ A, B, C — постоянныя, то очевидно:

$$U = Ax + By + Cz + D, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(160)}$$

гдѣ D есть значеніе потенціальной функціи въ началѣ координатъ.

Поверхности уровня этой потенціальной функціи суть параллельныя плоскости.

Другой примѣръ представляетъ:

б) сила, притягивающая матерьяльную точку къ неподвижному центру, находящемуся въ началѣ координатъ, или отталкивающая точку отъ этого центра; величина силы выражается нѣкоторою функціею радіуса вектора точки.

Проэкціи такой силы на оси координатъ выразятся такъ:

$$X = F(r)\frac{x}{r},\quad Y = F(r)\frac{y}{r},\quad Z = F(r)\frac{z}{r},$$

гдѣ $F(r)$ есть положительно-взятая величина отталкивательной силы, или отрицательно-взятая величина притягательной силы; подъ r подразумѣвается здѣсь положительно-взятая величина разстоянія матерьяльной точки отъ центра силы; то есть:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ мы будемъ обозначать тою же буквою также и направленіе изъ центра силы вдоль по радіусу вектору.

Легко видѣть, что косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ r съ осями координатъ, выражаются производными отъ r по соотвѣтственнымъ координатамъ точки, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos(rx) \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \cos(ry) \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} = \cos(rz) \end{aligned}\right\}; \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(161)}$$

поэтому:

$$X=F(r)\frac{\partial r}{\partial x},\quad Y=F(r)\frac{\partial r}{\partial y},\quad Z=F(r)\frac{\partial r}{\partial z},\ \ldots\ldots \quad (162)$$

а отсюда слѣдуетъ, что потенціальная функція этой силы — слѣдующая:

$$U=\int F(r)dr\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$\frac{dU}{dr}=F(r),$$

то:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=F(r)=\frac{\partial r}{\partial x},\ \ldots\ldots$$

в) Если центръ притяженія или отталкиванія находится не въ началѣ координатъ, а въ какой либо неподвижной точкѣ M_1, координаты которой суть: x_1, y_1, z_1, то тогда подъ r слѣдуетъ подразумѣвать:

$$r=+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2},$$

а подъ направленіемъ r — направленіе изъ центра M_1 къ той точкѣ, на которую дѣйствуетъ разсматриваемая сила.

Потенціальная функція выражается интеграломъ (163), проэкціи же силы на оси координатъ выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} X&=F(r)\frac{\partial r}{\partial x}=F(r)\frac{x-x_1}{r}\\ Y&=F(r)\frac{y-y_1}{r}\\ Z&=F(r)\frac{z-z_1}{r}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots \quad (164)$$

Въ этомъ случаѣ, также какъ и въ предыдущемъ, поверхности уровня суть концентрическія сферы, имѣющія центръ въ центрѣ силы.

г) На матерьяльную точку могутъ дѣйствовать одновременно нѣсколько такихъ силъ, какъ упомянутая въ предыдущемъ пунктѣ;

тогда потенціальная функція равнодѣйствующей будетъ выражаться суммою потенціальныхъ функцій составляющихъ силъ:

$$U=\int F_1(r_1)dr_1+\int F_2(r_2)dr_2+\ldots\ldots+\int F_k(r_k)dr_k, \quad (165)$$

гдѣ:

$$r_1=+\sqrt{(x-\mathrm{x}_1)^2+(y-\mathrm{y}_1)^2+(z-\mathrm{z}_1)^2}$$
$$r_2=+\sqrt{(x-\mathrm{x}_2)^2+(y-\mathrm{y}_2)^2+(z-\mathrm{z}_2)^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_k=+\sqrt{(x-\mathrm{x}_k)^2+(y-\mathrm{y}_k)^2+(z-\mathrm{z}_k)^2};$$

x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... x_k, y_k, z_k — суть координаты центровъ, изъ которыхъ дѣйствуютъ составляющія силы.

Проэкція равнодѣйствующей на ось $X^{овъ}$ выразится такъ:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=F_1(r_1)\frac{x-\mathrm{x}_1}{r_1}+F_2(r_2)\frac{x-\mathrm{x}_2}{r_2}+\ldots+F_k(r_k)\frac{x-\mathrm{x}_k}{r_k}\ldots \quad (166)$$

д) Сила:

$$X=-\frac{Ky}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{Kx}{x^2+y^2},\quad Z=0$$

(гдѣ K — постоянное) имѣетъ слѣдующую потенціальную функцію:

$$U=K\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

Отношеніе $(y:x)$ есть тангенсъ угла θ, составляемаго съ осью $X^{овъ}$ проэкціею радіуса вектора точки на плоскость XY; тотъ же самый тангенсъ имѣютъ углы:

$$\theta\pm 2n\pi,$$

гдѣ n — какое либо цѣлое число; поэтому потенціальная функція (167) имѣетъ въ каждой точкѣ пространства безчисленное множество значеній:

$$U=K\theta\pm 2n\pi K\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (168)$$

Когда понадобится, мы обратимъ вниманіе на обстоятельства, проистекающія изъ многократности значеній такой потенціальной функціи.

Законъ живой силы для одной матерьяльной точки представляетъ собою частный случай общаго закона того же имени, относящагося къ движенію системы точекъ; въ своемъ мѣстѣ мы сообщимъ нѣкоторыя историческія свѣдѣнія относительно открытія этого закона.

§ 27. Примѣръ рѣшенія задачи о криволинейномъ движеніи свободной матерьяльной точки подъ вліяніемъ центральной силы, имѣющей потенціалъ.

Мы приведемъ теперь примѣръ рѣшенія такой задачи, въ которой имѣютъ мѣсто законы площадей и живой силы:

Примѣръ 19. Опредѣлить движеніе свободной матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою обратно-пропорціональною квадрату разстоянія отъ него.

Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки суть:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2}\frac{x}{r} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2}\frac{y}{r} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2}\frac{z}{r}, \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (169)$$

гдѣ μ есть нѣкоторая постоянная величина.

Такъ какъ сила постоянно направлена къ началу координатъ, то, какъ показано въ § 24, дифференціальныя уравненія имѣютъ три интеграла:

$$(yz' - zy') = \frac{C_1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (131, a)$$

$$(zx' - xz') = \frac{C_2}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (131, b)$$

$$(xy' - yx') = \frac{C_3}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (131, c)$$

Кромѣ того, такъ какъ сила имѣетъ потенціалъ:

$$U = -\mu m\int\frac{dr}{r^2} = \frac{\mu m}{r},$$

то, какъ показано въ § 26, дифференціальныя уравненія имѣютъ еще интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{m\mu}{r}=mh, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

выражающій законъ живой силы.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ уже четыре интеграла съ четырьмя произвольными постоянными: C_1, C_2, C_3, h.

Остается произвести еще два интегрированія, которыя введутъ двѣ произвольныя постоянныя, и тогда задача будетъ рѣшена.

Изъ параграфа 24-го извѣстно, что движеніе матерьяльной точки происходитъ въ плоскости:

$$C_1x+C_2y+C_3z=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (136)$$

проходящей черезъ начало координатъ, и секторьяльная скорость радіуса вектора, остающагося постоянно въ этой плоскости, постоянна:

$$\sigma=\frac{l_0}{2m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

гдѣ:

$$l_0=+\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}=mr_0v_0\sin(v_0r_0) \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

Выразимъ секторьяльную скорость σ въ полярныхъ координатахъ по формулѣ (144) параграфа 24-го:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=2\sigma; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

въ интегралѣ (170) выразимъ квадратъ скорости въ полярныхъ же координатахъ по формулѣ (20) кинематической части (стр. 33):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2h+\frac{2\mu}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (171)$$

Мы будемъ интегрировать дифференціальныя уравненія перваго порядка: (144) (171).

(Аргументъ θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости дви-

женія черезъ начало координатъ; при движеніи точки этотъ уголъ непрерывно увеличивается).

Исключимъ θ' изъ уравненія (171) и рѣшимъ его относительно r'; получимъ:

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{4\sigma^2}{r^2}}; \ldots\ldots\ldots\ldots (172)$$

интегрируя это послѣднее уравненіе, найдемъ выраженіе для r въ функціи отъ t.

Вмѣсто того, чтобы интегрировать уравненіе (172), мы его преобразуемъ въ другое, которое легче интегрируется и доставляетъ уравненіе траекторіи.

Для этого представимъ себѣ, что r выражено функціею отъ θ; поэтому:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

или, на основаніи уравненія (144):

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{2\sigma}{r^2}=-\frac{d\left(\frac{2\sigma}{r}\right)}{d\theta}.$$

Тричленъ, находящійся подъ корнемъ уравненія (172), можетъ быть преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{4\sigma^2}{r^2}=2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}-\left(\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}\right)^2.$$

Сумма:

$$2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}$$

имѣетъ всегда величину положительную; въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ v_0 и r_0 начальную скорость и начальный радіусъ векторъ; по формуламъ (138) (143):

$$4\sigma^2=v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0);$$

постоянная же h можетъ быть выражена (см. (170)) такъ:

$$h=\frac{v_0^2}{2}-\frac{\mu}{r_0};$$

слѣдовательно:

$$2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}=v_0{}^2-\frac{2\mu}{r_0}+\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2\sin^2(v_0r_0)}.$$

Такъ какъ квадратъ синуса не можетъ быть болѣе единицы, то дробь:

$$\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2}\cdot\frac{1}{\sin^2(v_0r_0)}$$

не можетъ быть менѣе дроби:

$$\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2},$$

то есть, первая дробь или болѣе второй, или равна ей:

$$\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2\sin^2(v_0r_0)}\geqq\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2};$$

изъ этого слѣдуетъ:

$$v_0{}^2-\frac{2\mu}{r_0}+\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2\sin^2(v_0r_0)}\geqq v_0{}^2-\frac{2\mu}{r_0}+\frac{\mu^2}{v_0{}^2r_0{}^2},$$

то есть:

$$2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}\geqq\left(v_0-\frac{\mu}{v_0r_0}\right)^2;$$

значитъ, разсматриваемая нами сумма дѣйствительно всегда имѣетъ величину положительную.

Раздѣливъ эту сумму на положительную величину ($\mu^2:4\sigma^2$), мы получимъ положительное отношеніе, которое мы означимъ черезъ e^2:

$$2h+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}=\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2$$

$$e^2=1+\frac{v_0{}^2r_0{}^2\sin^2(v_0r_0)}{\mu^2}\left(v_0{}^2-\frac{2\mu}{r_0}\right)\ldots\ldots\ldots(173)$$

По всѣмъ этимъ причинамъ, уравненіе (172) можно преобразовать въ слѣдующее:

$$-\frac{d\zeta}{d\theta}\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2-\zeta^2},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(174)$$

гдѣ, для краткости, черезъ ζ обозначена слѣдующая разность:

$$\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma} = \zeta.$$

Отдѣливъ перемѣнныя въ уравненіи (174):

$$-\frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2 - \zeta^2}} = d\theta$$

и интегрируя, получимъ:

$$\arccos\left(\frac{2\sigma\zeta}{\mu e}\right) = \theta + \Gamma_1,$$

или:

$$\zeta = \frac{\mu e}{2\sigma}\cos(\theta + \Gamma_1)$$

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\mu}{2\sigma}\Big(1 + e\cos(\theta + \Gamma_1)\Big),$$

гдѣ Γ_1 есть пятая произвольная постоянная.

Выразимъ r въ функціи отъ θ:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \Gamma_1)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

гдѣ:

$$p = \frac{4\sigma^2}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

Уравненіе (175) (какъ уже было упомянуто на стр. 42 кинематической части) представляетъ одну изъ кривыхъ линій 2-го порядка, то есть эллипсъ, гиперболу, или параболу; величина эксцентриситета e опредѣляетъ родъ кривой, а именно:
кривая есть *гипербола*, если $e > 1$, то есть, если (см. формулу (173)):

$$v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть *гипербола*, если $e = 1$, то есть, если:

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть *эллипсъ*, если $e<1$, то есть, если:

$$v_0^2<\frac{2\mu}{r_0}.$$

Величина p есть полупараметръ кривой, то есть длина радіуса вектора, перпендикулярнаго къ большой оси эллипса, къ главной оси параболы, или къ дѣйствительной главной оси гиперболы.

Послѣднее интегрированіе произведемъ надъ уравненіемъ (144), въ которомъ замѣнимъ r функціею отъ θ; уравненіе это, по отдѣленіи перемѣнныхъ, получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma}\frac{d\theta}{(1+e\cos(\theta+\Gamma_1))^2}=dt\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(177)$$

Для краткости, означимъ $(\theta+\Gamma_1)$ черезъ ψ; двучленъ, заключающійся въ знаменателѣ, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$1+e\cos\psi=\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+e\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)-e\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)=$$

$$=(1+e)\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+(1-e)\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right),$$

послѣ чего предыдущее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1+e)^2}\frac{d\psi}{\left[1+\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]^2\cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)}=dt\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(178)$$

Интегрированіе этого уравненія въ случаѣ движенія точки по эллипсу облегчается при помощи слѣдующей подстановки:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}};\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(179)$$

изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}=1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)=\frac{1-e\cos f}{(1-e)\cos^2\left(\frac{f}{2}\right)}$$

$$\frac{d\psi}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{df}{\cos^2\left(\frac{f}{2}\right)};$$

теперь уравненіе (178) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(f-e\cos f)df=dt.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1-e\sin f)=t-\tau$$

или:

$$f-e\sin f=(t-\tau)\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

гдѣ τ есть шестая произвольная постоянная, a — длина большой полуоси эллипса:

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{4\sigma^2}{\mu(1-e^2)}=-\frac{\mu}{2h}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (181)$$

Послѣ этого, разсматриваемая задача для случая движенія по эллиптической траекторіи рѣшена окончательно.

Эта задача играетъ существенную роль въ астрономіи и небесной механикѣ; полученное рѣшеніе выражаетъ движеніе которой либо изъ планетъ вокругъ солнца, если предположить послѣднее неподвижнымъ, массу планеты — сосредоточенною въ одной точкѣ, а притяженіе разсматриваемой планеты прочими — несуществующимъ.

Шесть произвольныхъ постоянныхъ:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ h,\ \Gamma_1,\ \tau$$

нетрудно выразить въ начальныхъ координатахъ и въ проэкціяхъ начальной скорости на оси координатъ.

Первыя четыре произвольныя постоянныя опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты, эксцентриситетъ ея и длину большой полуоси:

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}=\cos I. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (182)$$

$$\frac{C_1}{C_2}=-\operatorname{tg}\Omega, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

$$a = -\frac{\mu}{2h}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(181)}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)}{m^2\mu^2} 2h}, \ldots\ldots\ldots \text{(173)}$$

гдѣ I есть уголъ, подъ которымъ плоскость орбиты наклонена къ плоскости XY, Ω — уголъ, составляемый съ осью X линiею пересѣченiя этихъ плоскостей.

Произвольная постоянная Γ_1 есть отрицательно взятый аргументъ наименьшаго радiуса вектора; τ — моментъ времени, въ который радiусъ векторъ имѣетъ наименьшую величину.

Въ случаѣ движенiя точки по параболѣ, уравненiе (178) принимаетъ слѣдующiй видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma} \frac{d\psi}{4\cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)} = dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(184)}$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}\left(\operatorname{tg}\frac{(\theta+\Gamma_1)}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{(\theta+\Gamma_1)}{2}\right) = (t - \tau). \ldots\ldots \text{(185)}$$

§ 28. Нѣкоторыя другiя формы интеграловъ дифференцiальныхъ уравненiй движенiя свободной матерьяльной точки.

Предположимъ, что свободная матерьяльная точка постоянно остается въ одной плоскости, которую мы примемъ за плоскость XY.

Изъ предыдущаго намъ извѣстно, что дифференцiальныя уравненiя движенiя:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

или замѣняющая ихъ совокупность дифференцiальныхъ уравненiй перваго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad m\frac{dx'}{dt} = X, \quad m\frac{dy'}{dt} = Y \ldots\ldots \text{(186)}$$

имѣютъ интегралъ:

$$m(xy' - yx') = C,$$

Предполагая, что y выражено функціею отъ x, можемъ исключить изъ этого уравненія дифференціалъ времени, имѣя въ виду, что:

$$\frac{y'}{x'}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dx}x'=\frac{d^2y}{dx^2}x';$$

вслѣдствіе этого послѣднее дифференціальное уравненіе получитъ, по сокращеніи на x', видъ:

$$m\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(194)}$$

обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

Первые интегралы этого уравненія:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=C_1,\quad \varphi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=C_2,$$

представятъ собою, по замѣщеніи въ нихъ производной $\frac{dy}{dx}$ — отношеніемъ $(y' : x')$, первые интегралы:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)=C_1,\quad \varphi_2\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)=C_2\ldots\ldots\ldots \mathbf{(195)}$$

дифференціальныхъ уравненій (A) движенія свободной матерьяльной точки.

Условіе (193) выражаетъ, что проэкція силы на нормаль къ траэкторіи есть однородная функція второй степени отъ скоростей x' и y'; функція эта — слѣдующая:

$$(x')^2\frac{f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(196)}$$

Слѣдовательно, *если проэкція силы на нормаль къ траэкторіи есть однородная функція* (196) *второй степени отъ скоростей x' и y', то дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки на плоскости имѣютъ два первые интеграла, не зависящіе отъ времени; эти интегралы получаются изъ первыхъ интеграловъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка* (194).

Этотъ случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости былъ указанъ проф. А. Н. Коркинымъ *).

Кромѣ того, А. Н. Коркинъ нашелъ еще нѣсколько случаевъ интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія матерьяльной точки на плоскости, въ которыхъ получаются два интеграла; изъ этихъ случаевъ мы можемъ здѣсь привести только одинъ, самый простѣйшій.

4) Если сила не зависитъ отъ времени и скоростей и удовлетворяетъ условію:

$$Y - kX = f(y - kx), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

гдѣ k — постоянное, а f — нѣкоторая функція отъ $(y - kx)$, то тогда составимъ дифференціальное уравненіе:

$$m(y'' - kx'') = Y - kX, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

которое, на основаніи условія (197), приведется къ виду:

$$m(y'' - kx'') = f(y - kx). \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Означимъ $y - kx$ черезъ ξ, тогда уравненіе (199) получитъ видъ:

$$m\xi'' = f(\xi);$$

интегрированіе дифференціальнаго уравненія такого вида показано въ § 19 (см. случаи 2-го рода).

§ 29. Задачи.

1. *Опредѣлить движеніе матерьяльной точки, притягиваемой къ оси X-овъ силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея; начальная скорость точки параллельна той же оси.*

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$mx'' = 0, \quad my'' = -\frac{\mu m}{y^2};$$

начальныя координаты и скорости:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = a, \quad y_0 = b, \quad y'_0 = 0.$$

---

*) Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. 1867.

Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. B. II. 1870. S. 13.

Второй интегралъ движенія параллельно оси $X^{овъ}$:

$$x = \alpha t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (200)$$

Первый интегралъ движенія параллельно оси $Y^{овъ}$:

$$(y')^2 = 2\mu\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b}\right).$$

Для того, чтобы интегрировать уравненіе:

$$-\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{b}}} = dt\sqrt{2\mu},$$

положимъ:

$$y = \frac{b}{2}(1 + \cos\omega), \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (201)$$

тогда это уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2}\, 2\cos^2\frac{\omega}{2}\, d\omega = dt\sqrt{2\mu};$$

интегрируя получимъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2}(\omega + \sin\omega) = t\sqrt{2\mu} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (202)$$

Три уравненія: (200—202) выражаютъ движеніе точки; траэкторія же выражается двумя уравненіями:

$$y = \frac{b}{2}(1 + \cos\omega), \quad x = \alpha\sqrt{\frac{b}{2\mu}} \cdot \frac{b}{2}(\omega + \sin\omega).$$

Предлагаемъ сравнить эти уравненія съ уравненіями циклоиды (см. Кинем. часть, стр. 14).

Время, въ теченіе котораго движущаяся точка придетъ на ось $X^{овъ}$, опредѣлится изъ формулы (202), если сдѣлаемъ въ ней $\omega = \pi$:

$$T = \pi\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2\mu}}.$$

2. На матерьяльную точку дѣйствуютъ притяженія, обратно пропорціональныя квадратамъ разстояній, со стороны двухъ неподвижныхъ центровъ O и L; величины этихъ притяженій суть:

$$\varepsilon\frac{Mm}{r_1^2}, \quad \varepsilon\frac{\mu m}{r_2^2},$$

гдѣ: m — масса точки, r_1 — разстояніе матерьяльной точки отъ центра O, r_2 — разстояніе ея отъ центра L.

Матерьяльная точка, помѣщенная на линіи $\overline{OL}$, въ разстояніи b отъ точки O, пущена со скоростью α по направленію къ L; опредѣлить, какъ велика должна быть скорость α для того, чтобы движущаяся точка могла остановиться въ той точкѣ K на линіи $\overline{OL}$, въ которой притяженія обоихъ центровъ взаимно уравновѣшиваются.

Равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ въ этомъ случаѣ потенціалъ (см. 165):

$$U = \varepsilon m\left(\frac{M}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right),$$

поэтому движеніе матерьяльной точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \varepsilon\left(\frac{M}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) - \varepsilon\left(\frac{M}{b} + \frac{\mu}{D-b}\right), \ldots\ldots (203)$$

гдѣ D означаетъ разстояніе между центрами O и L.

Такъ какъ точка совершаетъ движеніе по прямой линіи OL между точками O и L, то r_1 и r_2 должны быть замѣнены величинами x и $D-x$, гдѣ x есть разстояніе движущейся точки отъ центра O.

Означимъ черезъ k разстояніе $\overline{OK}$; такъ какъ въ точкѣ K притяженія обоихъ центровъ должны взаимно уравновѣшиваться, то k должно удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\varepsilon\frac{Mm}{k^2} = \varepsilon\frac{\mu m}{(D-k)^2},$$

изъ котораго слѣдуетъ:

$$k = \frac{D\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{\mu}}, \quad D-k = \frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{M}+\sqrt{\mu}} \ldots\ldots (204)$$

Примѣнимъ уравненіе (203) къ тому моменту, въ который матерьяльная точка остановится въ точкѣ K; тогда будутъ: $v=0$, $r_1=k$, $r_2=D-k$; слѣдовательно:

$$\frac{\alpha^2}{2} = \varepsilon\left(\frac{M}{b} + \frac{\mu}{D-b} - \frac{M}{k} - \frac{\mu}{D-k}\right);$$

замѣнивъ здѣсь k и $(D-k)$ выраженіями (204) и произведя надлежащія преобразованія, получимъ:

$$\frac{\alpha^2}{2} = \varepsilon\left(\frac{D-b}{Db}M + \frac{b}{D(D-b)}\mu - \frac{2\sqrt{M\mu}}{D}\right)$$

или:

$$\alpha^2=\frac{2\varepsilon}{D}\left(\sqrt{\frac{D-b}{b}}\sqrt{M}-\sqrt{\frac{b}{D-b}}\sqrt{\mu}\right)^2 \ldots\ldots (205)$$

Положимъ, что O и L представляютъ центры земли и луны, что M и μ означаютъ массы этихъ планетъ, D — величину разстоянія между ними, b — среднюю величину земнаго радіуса; тогда формула (205) послужитъ для опредѣленія той скорости, съ которою долженъ быть пущенъ снарядъ съ поверхности земли по направленію къ лунѣ, для того, чтобы онъ могъ дойти до той точки, въ которой притяженіе земли уравновѣшивается притяженіемъ луны. Коэффиціентъ ε, заключающійся въ формулѣ (205), можетъ быть опредѣленъ на основаніи того соображенія, что сила тяжести, приложенная къ массѣ m, находящейся на поверхности земли, выражается двоякимъ образомъ:

$$P=\varepsilon\frac{Mm}{b^2};\quad P=mg,$$

а потому:

$$\varepsilon=\frac{gb^2}{M} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (205 \text{ bis})$$

Подставивъ это выраженіе для ε въ формулу (205), мы найдемъ слѣдующее выраженіе для α:

$$\alpha=\sqrt{2gb}\left(\sqrt{1-\frac{b}{D}}-\frac{b}{\sqrt{D(D-b)}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\right).$$

Если принять во вниманіе, что D почти въ 60 разъ болѣе b и что масса луны почти въ 81 разъ менѣе массы земли, то можно сказать, что приблизительно:

$$\alpha=\sqrt{2gb}$$

3. *Матерьяльная точка притягивается къ началу координатъ силою:*

$$F=\frac{m\mu r}{2(2p-x)^3},$$

гдѣ μ и p суть величины постоянныя; опредѣлить движеніе матерьяльной точки, предполагая, что начальное положеніе ея на оси X, въ разстояніи p отъ начала координатъ, и что начальная скорость ея β параллельна оси Y.

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$x'' = -\frac{\mu x}{2(2p-x)^3}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{2(2p-x)^3}.$$

Такъ какъ сила центральная, то здѣсь имѣетъ мѣсто законъ площадей:

$$xy' - yx' = p\beta \qquad (206)$$

Далѣе, первое изъ дифференціальныхъ уравненій интегрируется самостоятельно:

$$(x')^2 = C + \mu \frac{p-x}{(2p-x)^2},$$

а такъ какъ при $x=p$, $x'=0$, то $C=0$, поэтому:

$$x' = -\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{p-x}}{2p-x} \qquad (207)$$

Исключивъ dt изъ уравненій (206) и (207) и интегрируя получившееся дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$x\frac{dy}{dx} - y = -\frac{p\beta}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{2p-x}{\sqrt{p-x}},$$

или:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2p\beta}{\sqrt{\mu}}\, d\left(\frac{\sqrt{p-x}}{x}\right),$$

получимъ уравненіе траэкторіи:

$$y^2 = \frac{4p^2\beta^2}{\mu}(p-x);$$

это — парабола, имѣющая вершину въ точкѣ ($x=p$, $y=0$) и ось — по направленію отрицательной оси Y.

Для окончательнаго рѣшенія вопроса остается только интегрировать уравненіе (207); получимъ:

$$(4p-x)\sqrt{p-x} = \frac{3}{2}t\sqrt{\mu}.$$

4. *На матерьяльную точку дѣйствуетъ та же самая сила, что и въ предыдущей задачѣ, но начальныя обстоятельства движенія какія либо другія. Опредѣлить видъ траэкторіи и движеніе точки.*

Для рѣшенія вопроса надо произвести тѣ же самыя дѣйствія, какъ и въ предыдущей задачѣ. Первые интегралы будутъ:

$$xy' - yx' = C_1, \quad (x')^2 = C_2 + \mu \frac{p-x}{(2p-x)^2};$$

вторые:

$$\frac{y}{x} = \Gamma_1 - \frac{2C_1}{(\mu + 4C_2 p)x} \sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2} \ldots (208)$$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{C_2}} \log \frac{2C_2(x-2p) - \mu - 2\sqrt{C_2}\sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2}}{\sqrt{\mu(\mu + 4pC_2)}} -$$

$$-\sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2} = C_2 t + \Gamma_2.$$

Интегралъ (208) есть уравненіе траэкторіи; это — одна изъ кривыхъ втораго порядка. Родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_2, если: C_2 болѣе нуля, то траэкторія — гипербола, если C_2 менѣе нуля, то траэкторія — эллипсъ, если $C_2 = O$, то парабола.

5. ***Опредѣлить движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее слѣдующей притягательной силы къ началу координатъ:***

$$F = \frac{\mu m r}{2(2p - x\cos\omega - y\sin\omega)^3},$$

гдѣ ω — постоянный уголъ.

Траэкторія — коническое сѣченіе.

6. ***Опредѣлить движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее слѣдующей притягательной силы къ началу координатъ:***

$$F = \frac{\mu m r}{\sqrt{x^3 y^3}}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = -\frac{\mu x}{\sqrt{x^3 y^3}}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{\sqrt{x^3 y^3}}.$$

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ выражаетъ законъ площадей:

$$xy' - yx' = C_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (209)$$

другой получается, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x''y'+y''x'=-\frac{\mu(xy'+yx')}{\sqrt{x^3y^3}};$$

онъ будетъ:

$$x'y'=C_2+\frac{2\mu}{\sqrt{xy}}. \qquad (210)$$

Чтобы произвести дальнѣйшія интегрированія, мы преобразуемъ первые интегралы слѣдующимъ образомъ.

Помножимъ (210) на $4xy$ и замѣнимъ $4xyx'y'$ слѣдующею разностью:

$$4xy'yx'=(xy'+yx')^2-(xy'-yx')^2=\left(\frac{d\,(xy)}{dt}\right)^2-C_1^{\,2};$$

послѣ этого изъ уравненія (210) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d(xy)}{dt}=\sqrt{C_1^2+4xy\left(C_2+\frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}, \qquad (211)$$

интегрируя которое, получимъ выраженіе t въ функціи отъ произведенія xy; это будетъ одинъ изъ вторыхъ интеграловъ.

Исключимъ dt изъ дифференціальнаго уравненія (211) и изъ интеграла (209):

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=\frac{C_1}{xy}\,dt,$$

получимъ дифференціальное уравненіе:

$$d\log\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{C_1\,d\,(xy)}{xy\sqrt{C_1^2+4xy\left(C_2+\frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}},$$

въ лѣвой части котораго стоитъ полный дифференціалъ, а правая заключаетъ перемѣнную xy; интегрируя это уравненіе, мы найдемъ:

$$\log\sqrt{\frac{y}{x}}=\log\sqrt{\Gamma_1}-\log(z+\sqrt{z^2+p}),$$

гдѣ:

$$z=\frac{C_1}{\sqrt{xy}}+\frac{4\mu}{C_1},\quad p=4C_2-\frac{16\mu^2}{C_1^2}.$$

Рѣшивъ полученное уравненіе относительно z, получимъ:

$$2z=\frac{\Gamma_1 x-yp}{\sqrt{\Gamma_1 xy}},$$

или

$$\left(\Gamma_1 x - py - 2C_1\sqrt{\Gamma_1}\right)^2 = \frac{64\mu^2\Gamma_1}{C_1^2}xy \ldots\ldots\ldots (212)$$

Это есть уравненіе кривой втораго порядка; родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_2.

7. *Опредѣлить движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее притягательной силы:*

$$F = \frac{m\mu r}{\sqrt{(ax^2+bxy+cy^2)^3}},$$

направленной къ началу координатъ.

Траэкторія — коническое сѣченіе.

8. *Опредѣлить движеніе тяжелой матерьяльной точки, свободно пущенной подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земнаго шара; убѣдиться въ вѣрности формулъ* (186), *приведенныхъ на стр. 168 кинематической части. Центръ земли предполагается неподвижнымъ.*

Если эта матерьяльная точка будетъ неизмѣнно связана съ землею, то она, находясь подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земли O (черт. 73 кинематической части), будетъ имѣть скорость $b\omega$, перпендикулярную къ радіусу $\overline{OB}$ и направленную къ востоку; эту же самую скорость будетъ имѣть матерьяльная точка въ тотъ моментъ, когда она будетъ пущена свободно, то есть, когда связь, прикрѣпляющая ее къ землѣ, будетъ уничтожена.

Проведемъ изъ центра земли неподвижную ось OY черезъ то положеніе B матерьяльной точки, которое она занимаетъ въ пространствѣ въ моментъ освобожденія ея отъ связи съ землею; ось OX проведемъ въ плоскости экватора параллельно направленію скорости $b\omega$; подъ ω мы подразумѣваемъ угловую скорость суточнаго вращенія земли, а подъ b — среднюю величину земнаго радіуса, предполагая, что свободно пущенная точка находилась близъ поверхности земли; поэтому:

$$\omega = 0{,}0000729\,\frac{1}{\text{секунд.}},\quad b = 6370900 \text{ метр.}$$

Повинуясь притяженію къ центру земли:

$$\varepsilon\,\frac{mM}{r^2}$$

и имѣя начальную скорость:

$$x'_0 = b\omega,\quad y'_0 = 0$$

и начальное положеніе:

$$x_0=0,\ y_0=b,$$

матерьяльная точка начнетъ совершать движеніе, разсмотрѣнное нами въ § 27 настоящей главы; нетрудно убѣдиться, что въ настоящемъ случаѣ движеніе будетъ совершаться по эллипсу; въ самомъ дѣлѣ:

$$2h=b^2\omega^2-\frac{2\varepsilon M}{b};$$

изъ формулы же (205 bis) задачи 2-й слѣдуетъ:

$$\varepsilon M=gb^2,$$

поэтому:

$$2h=-b(2g-b\omega^2);$$

а такъ какъ:

$$2g=1,96\frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},\ b\omega^2=0,03385\frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2},$$

то $2h$ менѣе нуля, слѣдовательно, траэкторія эллиптическая.

Элементы этой орбиты слѣдующіе:

$$I=\pi,\ a=-\frac{\varepsilon M}{2h}=\frac{b}{2-\frac{b\omega^2}{g}}=\frac{b}{1+e},$$

$$e=1-\frac{b\omega^2}{g},\ \ \tau\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}}=-\pi;$$

кромѣ того, означая черезъ θ уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ положительною осью X-въ и отсчитываемый отъ этой оси въ сторону положительной оси $У$, будемъ имѣть:

$$\theta=\frac{3\pi}{2}-\psi,$$

гдѣ ψ есть уголъ, отсчитываемый отъ направленія наименьшаго радіуса вектора въ сторону движенія точки.

Перигелій орбиты находится на отрицательной сторонѣ оси $У$ и уголъ θ съ теченіемъ времени уменьшается.

Движеніе пущенной точки выражается слѣдующими формулами:

$$x=r\cos\theta=-r\sin\psi;\ y=r\sin\theta=-r\cos\psi$$

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}},\quad f-\pi-e\sin f=t\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}},$$

$$r=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\psi}=a(1-e\cos f);$$

поэтому:

$$x=-a\sqrt{1-e^2}\sin f,\quad y=a(e-\cos f)\;\ldots\ldots\;(213)$$

Для того, чтобы разложить x и y въ ряды по возрастающимъ степенямъ t, составимъ сначала подобное разложенiе для f.

Возьмемъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$f-\pi-e\sin f=nt,\quad n=\sqrt{\frac{\varepsilon M}{a^3}};$$

получимъ:

$$f'(1-e\cos f)=n;$$

повторяя то же дѣйствiе надъ полученнымъ равенствомъ и такъ продолжая далѣе, будемъ получать равенства:

$$0=f''(1-e\cos f)+e(f')^2\sin f$$

$$0=f'''(1-e\cos f)+3ef'f''\sin f+e(f')^2\cos f$$

. . . .

. . . . ,

изъ которыхъ опредѣлимъ величины производныхъ:

$$f'_0=\frac{n}{1+e},\quad f_0''=0,\; f_0'''=\frac{en^3}{(1+e)^4},$$

$$f_0^{(4)}=0,\quad f_0^{(5)}=\frac{en^5(9e-1)}{(1+e)^7},\;\ldots\ldots$$

для момента $t=0$.

Подставляя эти величины въ Тайлоровъ рядъ:

$$f=f_0+f_0'\,t+f_0''\frac{t^2}{1.2}+\ldots\ldots;$$

получимъ:

$$f=\pi+\frac{nt}{1+e}+\frac{n^3t^3}{(1+e)^4}\frac{e}{1.2.3}+\frac{n^5t^5}{(1+e)^7}\frac{e(9e-1)}{1.2.3.4.5}+\dots$$

и отсюда:

$$\frac{n}{f'}=1+e-\frac{n^2t^2}{(1+e)^3}\frac{e}{1.2}-\frac{n^4t^4}{(1+e)^5}\frac{e(3e-1)}{1.2.3.4}-\dots.$$

Отсюда легко получатся ряды для $\sin f$ и $\cos f$, такъ какъ:

$$\sin f=\frac{f-\pi-nt}{e};\quad \cos f=\frac{1}{e}\left(1-\frac{n}{f'}\right).$$

Затѣмъ, подставивъ полученныя выраженія для $\sin f$ и $\cos f$ въ формулы (213) и принявъ во вниманіе, что:

$$\frac{n^2}{(1+e)^3}=\frac{\varepsilon M}{a^3(1+e)^3}=\frac{g}{b}.$$

$$an\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=a\sqrt{\frac{gb^3}{a^3}}\sqrt{\frac{b\omega^2}{g(1+e)}}=b\omega,$$

получимъ слѣдующіе ряды:

$$x=b\omega t\left(1-\frac{g}{b}\frac{t^2}{1.2.3}-\frac{g^2}{b^2}\frac{\left(8-9\frac{b\omega^2}{g}\right)t^4}{1.2.3.4.5}-\dots\right)$$

$$y=b\left(1-\frac{g}{b}\frac{t^2}{1.2}-\frac{g^2}{b^2}\frac{\left(2-3\frac{b\omega^2}{g}\right)t^4}{1.2.3.4}-\dots\right)$$

Отношеніе $g:b$ есть весьма малая дробь:

$$\frac{g}{b}=0{,}00000153\,\frac{1}{(\text{секунда})^2}.$$

9. ***Рѣшить задачу о движеніи матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою:***

$$F=\frac{\mu m}{r^3}.$$

Поступая, какъ указано въ параграфѣ 27, получимъ слѣдующіе результаты.

a) Когда 2 h болѣе нуля.

Радіусъ векторъ измѣняется съ теченіемъ времени по слѣдующему закону:

$$r\sqrt{2h}=\sqrt{(2ht+\Gamma_1)^2+C^2-\mu},$$

гдѣ:

$$C=\pm v_0 r_0 \sin(v_0 r_0),\quad 2h=v_0^2-\frac{\mu}{r_0^2},\ \Gamma_1=v_0 r_0 \cos(v_0 r_0).$$

Уравненіе траэкторіи:

1) Если $C^2-\mu$ болѣе нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}}=\frac{\lambda}{\sin\lambda(\theta+\Gamma_2)},\quad \lambda^2=1-\frac{\mu}{C^2};$$

2) если $C^2=\mu$:

$$r(\theta+\Gamma_2)=\frac{C}{\sqrt{2h}};$$

3) если $C^2-\mu$ менѣе нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}}=\frac{2\varkappa}{e^{\varkappa\varphi}-e^{-\varkappa\varphi}},$$

$$\varkappa^2=\frac{\mu}{C^2}-1,\quad \varphi=\theta+\Gamma_2.$$

b) Въ тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ равно нулю:

$$v^2=\frac{\mu}{r^2},\quad r^2=r_0^2+2t\sqrt{\mu-C^2}$$

Траэкторія:

$$r=\Gamma e^{\varkappa\theta},\quad \varkappa^2=\frac{\mu}{C^2}-1.$$

c) Въ тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ менѣе нуля:

$$r\sqrt{-2h}=\sqrt{\mu-C^2-(\Gamma_1+2ht)^2}.$$

Уравненіе траэкторіи:

$$r\sqrt{\frac{-2h}{C^2}}=\frac{2\varkappa}{e^{\varkappa\varphi}+e^{-\varkappa\varphi}}.$$

10. Такимъ же образомъ могутъ быть разсмотрѣны *всѣ случаи*

движенія матерьяльной точки подъ вліяніемъ слѣдующей силы притяженія къ началу координатъ:

$$F=m\left(\frac{\mu}{r^3}+\frac{\nu}{r^3}\right).$$

Напримѣръ, уравненіе траэкторіи при $2h$ большемъ нуля и при $(\nu-C^2)$ меньшемъ нуля — слѣдующее:

$$r=\frac{p}{1-e\sin\varkappa(\theta+\Gamma)},$$

гдѣ:

$$p=\frac{C^2\varkappa^2}{\mu},\quad e=\sqrt{1+\frac{C^2\varkappa^2}{\mu^2}2h},\quad \varkappa^2C^2=C^2-\nu.$$

11. *Опредѣлить движеніе матерьяльной точки, къ которой приложена сила*

$$F=m\left(\mu^2r-\frac{\lambda^2}{r^3}\right),$$

состоящая изъ притяженія къ началу координатъ, пропорціональнаго разстоянію отъ него, и изъ отталкивательной силы отъ той же точки, обратно пропорціональной кубу разстоянія.

Если $h^2-\mu^2(\lambda^2+C^2)$ болѣе нуля, то уравненіе траэкторіи:

$$r^2=\frac{q}{1+e\cos2\varkappa(\theta+\Gamma_1)},$$

$$q=\frac{C^2+\lambda^2}{h},\quad \varkappa^2=1+\frac{\lambda^2}{C^2},\quad e=\sqrt{1-\frac{\mu^2\varkappa^2C^2}{h^2}};$$

законъ измѣненія аргумента θ — слѣдующій:

$$\operatorname{tg}\varkappa(\theta+\Gamma_1)=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\mu(\Gamma_2+t).$$

12. *Движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе, выражающееся такъ:*

$$mg(k+\mu v^n);$$

сопротивленіе это направлено противоположно скорости.

Приводимъ здѣсь то рѣшеніе этой задачи, которое далъ Якоби *).

*) Journal Crelle. B. XXIV.

Движеніе матерьяльной точки совершается, конечно, въ той вертикальной плоскости, въ которой заключается начальная скорость; эту плоскость примемъ за плоскость XY, начальное положеніе движущейся точки примемъ за начало координатъ, ось Y направимъ параллельно ускоренію силы тяжести.

Въ этой задачѣ возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія вида (39); означивъ черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ скорости съ осью X, будемъ имѣть, по сокращеніи на m:

$$\frac{dv}{dt}=g\sin\varphi-gk-g\mu v^n \quad \text{(214)}$$

$$\frac{v^2}{\rho}=\mp g\cos\varphi, \quad \text{(215)}$$

гдѣ ρ означаетъ величину радіуса кривизны:

$$\rho=\mp\frac{ds}{d\varphi}=\mp\frac{vdt}{d\varphi} \quad \text{(216)}$$

(Знаки $\mp$ въ обоихъ равенствахъ (215) и (216) должны быть одинаковые).

Изъ равенствъ (215) и (216) слѣдуетъ:

$$dt=\frac{vd\varphi}{g\cos\varphi}; \quad \text{(217)}$$

исключивъ затѣмъ изъ уравненій (214) и (217) дифференціалъ dt, получимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dv}{vd\varphi}=\operatorname{tg}\varphi-\frac{k}{\cos\varphi}-\frac{\mu}{\cos\varphi}v^n,$$

которое можетъ быть обращено въ обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, если сдѣлаемъ слѣдующую подстановку:

$$\frac{1}{v^n}=z;$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{dz}{d\varphi}=-n\left(\operatorname{tg}\varphi-\frac{k}{\cos\varphi}\right)z+\frac{n\mu}{\cos\varphi}.$$

Интегрируя это линейное дифференціальное уравненіе по извѣстному правилу, мы получимъ слѣдующій результатъ:

$$z=\frac{\cos^n\varphi}{\operatorname{tg}^{kn}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\varphi}\right)}\left(C^n+\mu n\int \operatorname{tg}^{kn}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{\cos^{n+1}\varphi}\right);$$

откуда получимъ выраженіе скорости v въ функціи угла φ:

$$v=\frac{\eta^{k-1}\,(1+\eta^2)}{2\left(C^n-\frac{\mu n}{2^n}\int \eta^{nk-n-1}(1+\eta^2)^n d\eta\right)^{\frac{1}{n}}}, \ldots . \quad (218)$$

гдѣ:

$$\eta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Подставивъ въ уравненіе (217):

$$dt=-\frac{vd\eta}{g\eta} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (217 \text{ bis})$$

вмѣсто v вторую часть равенства (218) и интегрируя полученное дифференціальное уравненіе, получимъ зависимость между угломъ φ и временемъ.

Координаты x и y могутъ быть выражены въ функціяхъ угла φ; для этого надо взять равенства:

$$dx=v\cos\varphi\, dt, \quad dy=v\sin\varphi\, dt,$$

выразить въ нихъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ функціями отъ η, а dt исключить при помощи формулы (217 bis):

$$dx=-\frac{2v^2 d\eta}{g(1+\eta^2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (219)$$

$$dy=-\frac{v^2(1-\eta^2)d\eta}{g(1+\eta^2)\eta}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (220)$$

затѣмъ замѣнить v второю частью равенства (218) и полученныя дифференціальныя уравненія интегрировать.

13. *Опредѣлить движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе постоянной величины kmg.*

Рѣшеніе заключается въ формулахъ предыдущей задачи, если въ нихъ сдѣлать μ равнымъ нулю и произвести указанныя интегрированія.

Получимъ:

$$v = \frac{\eta^{k-1}(1+\eta^2)}{2C},$$

$$t + \Gamma_1 = -\frac{1}{2gC}\left(\frac{\eta^{k-1}}{k-1} + \frac{\eta^{k+1}}{k+1}\right),$$

$$x + \Gamma_2 = -\frac{1}{2gC^2}\left(\frac{\eta^{2k-1}}{2k-1} + \frac{\eta^{2k+1}}{2k+1}\right),$$

$$y + \Gamma_3 = -\frac{1}{4gC^2}\left(\frac{\eta^{2k-2}}{2k-2} - \frac{\eta^{2k+2}}{2k+2}\right); \quad \eta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Разсматривая эти уравненія, можно убѣдиться, что при $k>1$ скорость движущейся точки обращается въ нуль въ той точкѣ траэкторіи, въ которой уголъ φ дѣлается равнымъ $\frac{\pi}{2}$; координаты этой точки суть: $-\Gamma_2$ и $-\Gamma_3$ и движущаяся точка приходитъ туда въ моментъ $(-\Gamma_1)$.

Если $k<1$, но не менѣе $\frac{1}{2}$, то скорость не обращается въ нуль и движущаяся точка направляется въ безконечность, приближаясь, ассимптотически, къ вертикальной линіи: $x = -\Gamma_2$.

Если $k<\frac{1}{2}$, то движущаяся точка направляется въ безконечность, причемъ траэкторія, подобно параболѣ, не имѣетъ ассимптоты.

14. *Движеніе матерьяльной тяжелой точки въ средѣ, сопротивленіе которой движенію пропорціонально квадрату скорости.*

Рѣшеніе получается изъ формулъ задачи 12-й, если сдѣлать въ нихъ k равнымъ нулю и n равнымъ двумъ; такъ, формула (218) даетъ слѣдующее выраженіе скорости въ функціи угла φ:

$$\frac{1}{v\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1}{v_1^2} - \mu\left(\log\eta - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (221)$$

$$\eta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

(гдѣ v_1 есть скорость въ наивысшей точкѣ траэкторіи).

Кромѣ того можно найти въ этомъ случаѣ другой первый интегралъ, выражающій проэкцію скорости на ось X въ функціи длины дуги траэкторіи; въ самомъ дѣлѣ, изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\varphi - g\mu v^2, \quad v^2 = g\frac{ds}{d\varphi}\cos\varphi$$

составимъ уравненіе:

$$\frac{dv}{vd\varphi}\cos\varphi = \sin\varphi - g\mu\cos\varphi\,\frac{ds}{d\varphi},$$

дающее интегралъ:

$$v\cos\varphi = v_1 e^{-g\mu s}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (222)$$

гдѣ s есть длина дуги траэкторіи, считаемая отъ самой высшей точки ея въ сторону движенія.

Исключивъ скорость v изъ интеграловъ (221) и (222), получимъ слѣдующую зависимость между длиною дуги s и угломъ φ (или величиною η):

$$\frac{1}{\mu v_1^2}\left(1 - e^{2g\mu s}\right) = \log\eta - \frac{1-\eta^4}{4\eta^2}. \ldots\ldots\ldots (223)$$

Эта зависимость показываетъ, что, на сторонѣ положительныхъ дугъ s, касательная къ траэкторіи приближается къ параллельности съ осью Yовъ (потому что при $s=\infty$ величина η должна обратиться въ нуль, а слѣдовательно φ обращается тогда въ $\frac{\pi}{2}$); на сторонѣ отрицательныхъ дугъ s касательная къ траэкторіи приближается къ параллельности съ направленіемъ, составляющимъ съ осью X такой уголъ φ_1, который удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{1}{\mu v_1^2} = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) - \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\cos\varphi_1}.$$

Чтобы рѣшить вопросъ вполнѣ, надо еще интегрировать уравненія (217 bis), (219) и (220).

15. *Составить уравненіе траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою, притягиваемою къ началу координатъ слѣдующею силою:*

$$F = m\mu\frac{v^2}{r}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = -\mu\frac{v^2}{r^2}x,\quad y'' = -\mu\frac{v^2}{r^2}y.$$

Такъ какъ сила направлена къ началу координатъ, то законъ площадей имѣетъ мѣсто; поэтому одинъ изъ первыхъ интеграловъ будетъ:

$$r^2\theta' = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (224)$$

Другой первый интегралъ найдемъ, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x'x''+y'y''=-\mu\frac{v^2}{r^3}(xx'+yy');$$

получимъ:

$$v^2=\frac{C^2}{r^{2\mu}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (225)$$

Изъ уравненій (224) и (225) составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 r^{2\mu-4}+r^{2\mu-2}=\frac{C_2}{C_1^2},$$

интегрируя которое, получимъ уравненіе траэкторіи:

$$r^{\mu-1}=\frac{\sqrt{C_2}}{C_1}\sin\left[(\mu-1)(\theta+\Gamma_1)\right].$$

16. *На матерьяльную точку дѣйствуетъ сила:*

$$F=m\mu\frac{v^2}{r},$$

перпендикулярная къ радіусу вектору и стремящаяся увеличить уголъ θ; составить уравненіе траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$x''=-\mu\frac{v^2}{r^2}y,\quad y''=\mu\frac{v^2}{r^2}x.$$

Составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{x'x''+y'y''}{(x')^2+(y')^2}=\mu\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2};$$

интегрируя его, получимъ:

$$\log v^2=C_1+2\mu\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

или:

$$v^2={v_0}^2e^{2\mu(\theta-\theta_0)}\dots\dots\dots\dots\dots (226)$$

Другой интегралъ и уравненіе траэкторіи получатся при помощи пріема, указаннаго А. Н. Коркинымъ и приведеннаго здѣсь въ пунктѣ 3-мъ пара-

графа 28; примѣнить этотъ пріемъ здѣсь возможно потому, что сила удовлетворяетъ условію (193):

$$x'Y - y'X = (x')^3 f\left(x,\ y, \frac{y'}{x'}\right); \ldots\ldots\ldots (193)$$

а именно, въ этой задачѣ:

$$f\left(x,\ y, \frac{y'}{x'}\right) = m\mu \frac{\left(x + y\frac{y'}{x'}\right)\left(1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)}{x^2 + y^2}.$$

Составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right);$$

первый интегралъ его будетъ слѣдующій:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx} = \log C_1 (x^2 + y^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

или:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \log C_2 r^\mu \ldots\ldots\ldots\ldots (227)$$

Выразимъ производную отъ y по x въ полярныхъ координатахъ; тогда уравненіе (227) можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{dr}{rd\theta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta - \log C_2 r^\mu)},$$

или:

$$\frac{\sin z\, dz}{\sin z + \mu \cos z} = d\theta, \quad z = \theta - \log C_2 r^\mu;$$

интегрируя это уравненіе, получимъ уравненіе траэкторіи:

$$C_2^{\frac{1}{\mu}} r \sin(\theta + \operatorname{arc\,tg} \mu - \log C_2 r^\mu) = \Gamma_1 e^{-\mu\theta} \ldots\ldots (228)$$

17. ***Къ матерьяльной точкѣ приложено двѣ силы: одна перпендикулярна къ радіусу вектору, равна:***

$$\frac{\mu m}{r}$$

и стремится увеличить уголъ θ, другая сила направлена къ началу координатъ, равна:

$$mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

опредѣлить движенiе.

Въ этомъ случаѣ одинъ изъ первыхъ интеграловъ имѣетъ видъ (188) (см. пунктъ 1-й параграфа 28):

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\mu t+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (229)$$

Задача рѣшается вполнѣ и уравненiе траэкторiи получается слѣдующаго вида:

$$\log r+\frac{p}{r}=\frac{(r'_0)^2}{\mu}(\theta+\gamma), \ldots\ldots\ldots (230)$$

гдѣ p и γ суть постоянныя величины.

18. *Къ матерьяльной точкѣ приложена сила:*

$$F_1=m\mu\frac{f(\theta)}{r^3},$$

перпендикулярная къ радiусу вектору и стремящаяся увеличить уголъ θ, и другая сила:

$$F_2=mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

направленная къ началу координатъ; опредѣлить движенiе.

Здѣсь получается интегралъ вида (190) (см. пунктъ 2-й параграфа 28):

$$r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C_1+2\mu\phi(\theta), \ldots\ldots\ldots (231)$$

$$\phi(\theta)=\int f(\theta)\,d\theta.$$

Задача рѣшается вполнѣ и получается слѣдующее уравненiе траэкторiи:

$$\frac{1}{C_2 r}=\Gamma_2-\int\frac{d\theta}{\sqrt{C_1+2\mu\phi(\theta)}}. \ldots\ldots\ldots (232)$$

§ 30. Задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движенiе матерьяльной точки по отношенiю къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей данное движенiе; даны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ.

Такiя задачи можно рѣшать двоякимъ путемъ:

1) Можно опредѣлить абсолютное движенiе матерьяльной точки, а затѣмъ перейти къ относительному движенiю ея по отношенiю къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ, какъ указано въ § 42 кинематической части.

2) Можно составить дифференцiальныя уравненiя относительнаго движенiя матерьяльной точки по отношенiю къ данной неизмѣняемой средѣ; интегрируя эти дифференцiальныя уравненiя, получимъ рѣшенiе задачи.

Обратимъ вниманiе на рѣшенiе такихъ задачъ вторымъ путемъ.

Дифференцiальныя уравненiя относительнаго движенiя матерьяльной точки по отношенiю къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ получатся изъ равенствъ (347) кинематической части, — стоитъ лишь помножить эти равенства на m и замѣнить произведенiя:

$$m\dot{v}\cos(\dot{v}\Xi),\quad m\dot{v}\cos(\dot{v}\Upsilon),\quad m\dot{v}\cos(\dot{v}\mathbf{Z})$$

проэкцiями на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ; величины этихъ проэкцiй мы будемъ обозначать буквами: Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$.

Слѣдовательно, общiй видъ дифференцiальныхъ уравненiй относительнаго движенiя матерьяльной точки, подверженной даннымъ силамъ, по отношенiю къ неизмѣняемой средѣ движущейся даннымъ образомъ, будетъ таковъ:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Xi-m\dot{w}_{ю}\cos(\dot{w}_{ю}\Xi)-m\zeta\frac{dq}{dt}+m\eta\frac{dr}{dt}-$$

$$-mp(p\xi+q\eta+r\zeta)+m\xi\Omega^2-2m\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right),\ldots (233, а)$$

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Upsilon-m\dot{w}_w\cos(\dot{w}_w\Upsilon)-m\xi\frac{dr}{d}+m\zeta\frac{dp}{dt}-$$

$$-mq(p\xi+q\eta+r\zeta)+m\eta\Omega^2-2m\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right),\ldots(233,\ b)$$

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\mathbf{Z}-m\dot{w}_w\cos(\dot{w}_w\mathbf{Z})-m\eta\frac{dp}{dt}+m\xi\frac{dq}{dt}-$$

$$-mr(p\xi+q\eta+r\zeta)+m\zeta\Omega^2-2m\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right)\ldots(233,\ c)$$

Для примѣра рѣшенія задачъ вторымъ путемъ возьмемъ слѣдующій вопросъ.

Примѣръ 20-й. Къ матерьяльной точкѣ приложена сила, направленная къ началу координатъ или по продолженію радіуса вектора; проэкція этой силы на ось α (продолженіе радіуса вектора) выражается слѣдующею функціею отъ r:

$$F=m\left(\mu r+\frac{\lambda}{r^3}\right),$$

гдѣ μ и λ суть двѣ постоянныя величины. Начальная скорость матерьяльной точки направлена въ плоскости XY; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, вращающейся съ постоянною угловою скоростью ω вокругъ положительной оси Z.

Предположимъ, что ось $\mathbf{Z}$ совпадаетъ съ осью Z, точка $Ю$ — съ началомъ координатъ, тогда дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки по отношенію къ плоскости $\Xi\,\Upsilon$ будутъ:

$$\xi''=\mu\xi+\frac{\lambda}{r^4}\xi+\omega^2\xi+2\omega\eta'$$

$$\eta''=\mu\eta+\frac{\lambda}{r^4}\eta+\omega^2\eta-2\omega\xi'.$$

Изъ нихъ составимъ дифференціальныя уравненія:

$$\xi\eta''-\eta\xi''=-2\omega(\xi\xi'+\eta\eta'),$$

$$\xi'\xi''+\eta'\eta''=\left((\mu+\omega^2)+\frac{\lambda}{r^4}\right)(\xi\xi'+\eta\eta'),$$

первые интегралы которыхъ суть:

$$\xi\eta' - \eta\xi' = D_1 - \omega r^2, \dots\dots\dots\dots (234)$$

$$(\xi')^2 + (\eta')^2 = (\mu + \omega^2) r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \dots\dots (235)$$

или:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = D_1 - \omega r^2 \dots\dots\dots\dots (234 \text{ bis})$$

$$u^2 = (\mu + \omega^2) r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \dots\dots\dots (235 \text{ bis})$$

гдѣ D_1 и H суть произвольныя постоянныя, u — скорость относительнаго движенія точки; φ — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ положительною осью Ξ.

Во второмъ интегралѣ замѣнимъ u^2 суммою:

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

Поступая затѣмъ такъ, какъ въ задачахъ 9, 10 и 11-й предыдущаго параграфа, получимъ слѣдующіе вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R} = t + \Delta_1; \dots\dots\dots\dots (236)$$

$$\int \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega\right) \frac{dr}{R} = \varphi + \Delta_2; \dots\dots\dots (237)$$

здѣсь:

$$R = \sqrt{\mu r^2 + 2(H + \omega D_1) - \frac{(\lambda + D_1^2)}{r^2}}.$$

Тѣ же самые результаты получатся и при рѣшеніи задачи первымъ путемъ; въ самомъ дѣлѣ, первые интегралы абсолютнаго движенія точки суть:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1, \quad v^2 = \mu r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2h;$$

а вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R_1} = t + \Gamma_1, \quad \int \frac{C_1}{r^2}\frac{dr}{R_1} = \theta + \Gamma_2,$$

гдѣ:

$$R_1 = \sqrt{\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + C_1^2}{r^2}};$$

но такъ какъ:

$$\theta = \varphi + \omega t, \quad v^2 = u^2 + 2r^2\varphi'\omega + \omega^2 r^2,$$

то окажется, что:

$$D_1 = C_1, \quad 2h = 2D_1\omega + 2H, \quad R_1 = R,$$

$$\Delta_1 = \Gamma_1, \quad \Delta_2 = \Gamma_2 - \omega\Gamma_1.$$

Произведя въ дѣйствительности интегрированіе, означенное въ формулѣ (237), мы получимъ уравненіе траекторіи относительнаго движенія; видъ этой кривой можетъ быть весьма разнообразенъ въ зависимости отъ знаковъ постоянныхъ μ и λ и отъ величинъ произвольныхъ постоянныхъ D_1 и h. Обратимъ вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ эта кривая получаетъ видъ логариѳмической спирали.

Уравненіе (237) получитъ видъ:

$$\log r = n(\varphi + \Delta_2), \dots\dots\dots \quad (237 \text{ bis})$$

гдѣ n — постоянная величина, если при всякомъ r имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + D_1^2}{r^2} = n^2 r^2 \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega\right)^2;$$

что можетъ быть только при слѣдующихъ условіяхъ:

$$\mu = n^2\omega^2, \quad \lambda + D_1^2 = -n^2 D_1^2, \quad 2h = -2n^2 D_1\omega;$$

то есть:

$$\mu = n^2\omega^2, \quad \lambda = -(n^2+1)D_1^2, \quad H = -(1+n^2)D_1\omega;$$

первыя два условія показываютъ, что относительное движеніе по логариѳмической спирали возможно тогда, когда сила пропорціональная разстоянію r есть отталкиваніе отъ начала координатъ, а сила обратно-пропорціональная кубу r есть притяженіе къ той же точкѣ.

Возьмемъ теперь другой примѣръ, болѣе сложный.

Примѣръ 21-й. Опредѣлить относительное движеніе (по отношенію къ землѣ) матерьяльной тяжелой точки, брошенной въ данномъ мѣстѣ земной поверхности по какому нибудь направленію и съ какою бы то ни было скоростью; принять во вниманіе суточное вращательное движеніе земли вокругъ ея оси и годовое движеніе центра ея вокругъ солнца.

Примемъ за точку *Ю* (черт. 16) ту точку земной поверхности, изъ которой брошена матерьяльная точка; положительную ось Z проведемъ по продолженію земнаго радіуса R (проведеннаго изъ центра земли C въ точку *Ю*); ось Ξ проведемъ по пересѣченію плоскости горизонта точки *Ю* съ плоскостью меридіана этой точки и положительную часть этой оси направимъ къ югу; ось Υ будетъ касательною къ параллели точки *Ю* и положительная часть ея будетъ направлена къ западу горизонта точки *Ю*.

Угловая скорость ω земли направлена параллельно радіусу, идущему изъ центра C земли къ южному полюсу ея S; если провести угловую скорость черезъ точку *Ю*, то окажется, что она будетъ заключаться въ плоскости $Z\ \Xi$ и будетъ составлять съ положительною осью Ξ уголъ λ, а съ положительною осью Z уголъ $\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)$, гдѣ λ есть сѣверная широта точки *Ю*; поэтому проэкціи угловой скорости на оси Ξ, Υ, Z имѣютъ слѣдующія величины:

$$p=\omega\cos\lambda,\quad q=0,\quad r=-\omega\sin\lambda;$$

величина же угловой скорости вращенія земли равна:

$$\omega=0{,}0000729\,\frac{1}{(\text{секунда})}.$$

Скорость центра C земли направлена по правую руку наблю-

дателя, стоящаго ногами въ C, головою по направленію къ сѣверному полюсу N земли, и смотрящаго на солнце; ускореніе точки C направлено къ солнцу и равно:

$$\frac{\varepsilon M}{\rho^2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (238)$$

гдѣ M есть масса солнца, а ρ — радіусъ векторъ, проведенный изъ центра солнца къ центру земли.

Скорость точки $Ю$ неизмѣняемой среды, неизмѣнно связанной съ землею, есть геометрическая сумма изъ скорости точки C и изъ вращательной скорости точки $Ю$ вокругъ мгновенной оси, проведенной черезъ точку C.

Ускореніе точки $Ю$ есть геометрическая сумма, составленная изъ ускоренія точки C (направленнаго къ солнцу, т.-е. противоположно направленію радіуса вектора ρ) и изъ центро-стремительнаго ускоренія точки $Ю$, направленнаго по $ЮC_1$ къ центру C_1 (черт. 16 и 17) параллели точки $Ю$ и равнаго $\omega^2 R\cos\lambda$; поэтому проэкція на оси координатъ Ξ, Υ, Z ускоренія $\dot{w}_ю$ точки $Ю$ неизмѣняемой среды равны:

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}\Xi) = -\frac{\varepsilon M}{\rho^2}\cos(\rho\Xi) - \omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$$

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}\Upsilon) = -\frac{\varepsilon M}{\rho^2}\cos(\rho\Upsilon)$$

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}Z) = -\frac{\varepsilon M}{\rho^2}\cos(\rho Z) - \omega^2 R\cos^2\lambda.$$

Скорость $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$, съ которою брошена матерьяльная точка m, есть скорость относительная по отношенію къ средѣ; абсолютная же начальная скорость точки m есть геометрическая сумма изъ вышесказанной начальной скорости $u_0\,(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$ и изъ скорости точки $Ю$.

Абсолютное ускореніе матерьяльной точки сообщается ей равнодѣйствующею изъ силы притяженія ея къ центру земли:

$$\frac{\varepsilon Mm}{((\xi^2+\eta^2+(R+\zeta)^2)}$$

(гдѣ M — масса земли) и изъ силы притяженія ея къ центру солнца,

$$\frac{\varepsilon M m}{\rho_1^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (239)$$

Гдѣ ρ_1 есть длина радіуса вектора, проведеннаго изъ центра солнца къ положенію, занимаемому точкою m.

На основаніи всего сказаннаго, уравненія (233) въ настоящемъ случаѣ будутъ имѣть, по сокращеніи на m, слѣдующій видъ:

$$\xi'' = -\varepsilon\frac{M}{\rho^3}\xi + S_1 + (\omega^2\chi - 2\eta'\omega)\sin\lambda \ldots\ldots \quad (240, a)$$

$$\eta'' = -\varepsilon\frac{M}{\rho^3}\eta + S_2 + \omega^2\eta + 2\chi'\omega \ldots\ldots\ldots \quad (240, b)$$

$$\zeta'' = -\varepsilon\frac{M}{\rho^3}(\zeta + R) + S_3 + (\omega^2\chi - 2\eta'\omega)\cos\lambda; \ldots \quad (240, c)$$

здѣсь введены слѣдующія обозначенія:

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + R)^2, \quad \chi = \xi\sin\lambda + (\zeta + R)\cos\lambda$$

$$S_1 = \varepsilon M\left(\frac{\cos(\rho\Xi)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho_1\Xi)}{\rho_1^2}\right),$$

$$S_2 = \varepsilon M\left(\frac{\cos(\rho\Upsilon)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho_1\Upsilon)}{\rho_1^2}\right),$$

$$S_3 = \varepsilon M\left(\frac{\cos(\rho Z)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho_1 Z)}{\rho_1^2}\right).$$

Начальное положеніе матерьяльной точки предполагается въ точкѣ $Ю$, поэтому:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0.$$

Члены S_1, S_2, S_3 суть проэкціи на оси Ξ, Υ, Z геометрической разности между ускореніями, сообщаемыми притяженіемъ солнца матерьяльной точкѣ и центру земли; эти разности представляютъ собою

ускоренія весьма малыя сравнительно съ ускореніемъ силы тяжести, въ чемъ можемъ убѣдиться на основаніи слѣдующаго разсчета.

Положимъ, что матерьяльная точка находится близъ той части поверхности земли, которая обращена къ солнцу, и что солнце находится въ зенитѣ, такъ что центръ земли, матерьяльная точка и центръ солнца находятся на одной прямой линіи; тогда члены S будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$S_1=0,\ S_2=0,\ S_3=\varepsilon \mathfrak{M}\left(\frac{1}{(\rho-R)^2}-\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Выразивъ ε въ ускореніи силы тяжести на поверхности земли (формула 205 bis) и разложивъ первую дробь, заключающуюся въ большихъ скобкахъ выраженія S_3, въ рядъ, получимъ:

$$S_3=2g\frac{\mathfrak{M}}{M}\left(\left(\frac{R}{\rho}\right)^3+\ldots\ldots\right).$$

Извѣстно, что масса солнца въ 354020 разъ болѣе массы земли, что средній радіусъ земли равенъ 859,5 географическимъ милямъ и что среднее разстояніе отъ земли до солнца равно 20680000 географическихъ миль: подставивъ эти цифры въ выраженіе S_3, получимъ:

$$S_3=g\,.\,0{,}000000051=0{,}00000049\,\frac{\text{метръ}}{(\text{секунда})^2}.$$

Слѣдовательно, S_3 составляетъ половину десятимилліонной доли ускоренія силы тяжести; если матерьяльная точка будетъ свободно падать впродолженіи 100 секундъ, то вслѣдствіе ускоренія g она упадетъ на глубину 49000 метровъ, ускореніе же S_3 уменьшитъ этотъ путь на 2,45 миллиметра, то есть на пять стомилліонныхъ долей всего пути.

Если же точка будетъ брошена снизу вверхъ со скоростью 980 метровъ въ секунду, то она вернется назадъ по истеченіи 200 секундъ, ускореніе же S_3 замедлитъ возвращеніе ея на милліонную долю секунды.

При тѣхъ средствахъ наблюденій, которыя намъ извѣстны, мы можемъ измѣрять большія длины съ точностью одной двухсотъ тысячной доли измѣряемой длины, а время можемъ измѣрять съ точностью до одной милліонной доли промежутка времени; поэтому обнаружить существованіе ускореній S_1, S_2, S_3 мы не можемъ.

Съ другой стороны замѣтимъ, что продолжительность полета брошеннаго тѣла не достигаетъ и ста секундъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ, которыя мы можемъ сообщить бросаемому тѣлу; вслѣдствіе всего сказаннаго, мы вправѣ пренебречь членами S_1, S_2, S_3.

Тогда уравненія (240) получаютъ такой видъ, что интегрируются безъ затрудненій; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь, при посредствѣ нижеслѣдующихъ формулъ, ввести абсолютныя координаты x, y, z вмѣсто относительныхъ ξ, η, ζ:

$$\xi = (x\cos\omega t - y\sin\omega t)\sin\lambda - z\cos\lambda$$

$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$\zeta + R = (x\cos\omega t - y\sin\omega t)\cos\lambda + z\sin\lambda;$$

тогда, вмѣсто уравненій (240), будемъ имѣть слѣдующія:

$$x'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}x,\quad y'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}y,\quad z'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}z,$$

интегрированіе которыхъ произведемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 27.

Но такъ какъ относительное движеніе матерьяльной точки должно прекратиться вскорѣ послѣ начала его, вслѣдствіе паденія ея на землю, то намъ достаточно будетъ имѣть такія выраженія для координатъ ξ, η, ζ, которыя выражали бы состояніе движенія точки въ первыя минуты послѣ его начала; для этого мы воспользуемся способомъ интегрированія помощію рядовъ, указаннымъ въ началѣ параграфа 18-го.

Примѣняя здѣсь этотъ способъ, мы получимъ выраженія для

ξ, η, ζ въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ времени t:

$$\xi = \xi_0' t + \xi_0'' \frac{t^2}{2} + \xi_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots\dots\dots \quad (241, a)$$

$$\eta = \eta_0' t + \eta_0'' \frac{t^2}{2} + \eta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots\dots\dots \quad (241, b)$$

$$\zeta = \zeta_0' t + \zeta_0'' \frac{t^2}{2} + \zeta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots\dots\dots \quad (241, c)$$

Выраженія для ξ_0'', η_0'', ζ_0'' получимъ изъ уравненій (240), подставивъ во вторыя части ихъ начальныя величины координатъ и скоростей; получимъ:

$$\xi_0'' = R\omega^2 \cos\lambda \sin\lambda - 2\eta_0' \omega \sin\lambda$$

$$\eta_0'' = 2\chi_0' \omega$$

$$\zeta_0'' = -g + R\omega^2 \cos^2\lambda - 2\eta_0' \omega \cos\lambda.$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы измѣнимъ положеніе осей координатъ Ξ и $\mathbf{Z}$ такимъ образомъ, чтобы въ выраженіе новой ξ_0'' не входилъ членъ, заключающій $R\omega^2$.

Обратимъ вниманіе на величины:

$$R\omega^2 \cos\lambda \sin\lambda, \quad R\omega^2 \cos^2\lambda - g;$$

онѣ представляютъ проекціи на оси Ξ и $\mathbf{Z}$ геометрической суммы двухъ ускореній: ускоренія g (черт. 18 линія *ЮК*), направленнаго къ центру *C* земли, и ускоренія $R\omega^2\cos\lambda$, направленнаго по продолженію радіуса $C_1Ю$ параллели точки *Ю*. Величину и направленіе геометрической суммы *ЮГ* этихъ двухъ ускореній *ЮК* и *ЮЦ* мы условимся обозначать буквою G; и такъ:

$$G = \sqrt{g^2 - 2gR\omega^2\cos^2\lambda + R^2\omega^4\cos^2\lambda}, \dots\dots \quad (242)$$

$$G\cos(G\Xi) = R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda, \quad G\cos(G\mathbf{Z}) = -g + R\omega^2\cos^2\lambda \quad (242 \text{ bis})$$

Возьмемъ за ось $\mathfrak{Z}$ (за новую ось $\mathbf{Z}$) направленіе противо-

положное ускоренію G и за ось $\mathfrak{X}$ (за новую ось Ξ) — направленіе перпендикулярное къ оси $\mathfrak{Z}$ и идущее къ югу отъ точки $Ю$; тогда очевидно проэкція G на ось $\mathfrak{X}$ будетъ нуль.

Назовемъ черезъ Λ уголъ, составляемый осью $\mathfrak{Z}$ съ экваторомъ; очевидно:

$$\Delta = \lambda + (\mathfrak{Z}, \mathbf{Z});$$

координаты точки относительно осей $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$ условимся обозначать буквами $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{z}$.

Координаты центра земли C по отношенію къ новымъ осямъ будутъ слѣдующія:

$$-R \sin\alpha, \quad -R\cos\alpha,$$

гдѣ α есть уголъ, составляемый осями $\mathfrak{Z}$ и $\mathbf{Z}$ между собою.

При осяхъ координатъ $\mathfrak{X}$, Υ, $\mathfrak{Z}$, дифференціальныя уравненія относительнаго движенія тяжелой точки будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{x}'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}(\mathfrak{x} + R\sin\alpha) + (\omega\mathfrak{s} - 2\eta')\,\omega\sin\Delta \; \ldots\ldots \quad (243, a)$$

$$\eta'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}\eta + (\omega\eta + 2\mathfrak{s}')\omega, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (243, b)$$

$$\mathfrak{z}'' = -g\frac{R^2}{\rho^3}(\mathfrak{z} + R\cos\alpha) + (\omega\mathfrak{s} - 2\eta')\omega\cos\Delta; \ldots\ldots \quad (243, c)$$

гдѣ:

$$\rho^2 = (\mathfrak{x} + R\sin\alpha)^2 + \eta^2 + (\mathfrak{z} + R\cos\alpha)^2,$$

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{x} + R\sin\alpha)\sin\Delta + (\mathfrak{z} + R\cos\alpha)\cos\Delta.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_0'' &= -2\eta_0'\omega\sin\Delta \\ \eta_0'' &= +2(\mathfrak{x}_0'\sin\Delta + \mathfrak{z}_0'\cos\Delta)\omega \\ \mathfrak{z}_0'' &= -2\eta_0'\omega\cos\Delta - G \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

потому что:

$$\mathfrak{s}_0 = R\cos\lambda,\ \ \mathfrak{s}_0' = \mathfrak{x}_0'\sin\Delta + \mathfrak{z}_0'\cos\Delta,$$

$$-g\sin\alpha + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Delta = G\cos(G\mathfrak{X}) = 0$$

$$-g\cos\alpha + \omega^2 R\cos\lambda\cos\Delta = G\cos(G\mathfrak{Z}) = -G.$$

Далѣе, составивъ третьи производныя и подставивъ въ ихъ выраженія начальныя координаты и скорости, получимъ:

$$\mathfrak{x}_0''' = -g\frac{\mathfrak{x}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\sin\alpha + (\omega\mathfrak{s}_0' - 2\eta_0'')\,\omega\sin\Delta$$

$$\eta_0''' = -g\frac{\eta_0'}{R} + (\omega\eta_0' + 2\mathfrak{s}_0'')\,\omega$$

$$\mathfrak{z}_0''' = -g\frac{\mathfrak{z}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\cos\alpha + (\omega\mathfrak{s}_0' - 2\eta_0'')\,\omega\cos\Delta;$$

сюда надо подставить:

$$\rho_0' = \mathfrak{x}_0'\sin\alpha + \mathfrak{z}_0'\cos\alpha,\ \ \omega\mathfrak{s}_0' - 2\eta_0'' = -3\mathfrak{s}_0'\omega,$$

$$\omega\eta_0' + 2\mathfrak{s}_0'' = -3\eta_0'\omega - 2G\cos\Delta;$$

тогда окажется, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_0''' &= -3\omega^2\mathfrak{s}_0'\sin\Delta - g\frac{\mathfrak{x}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\sin\alpha \\ \eta_0''' &= -3\omega^2\eta_0' - g\frac{\eta_0'}{R} - 2G\omega\cos\Delta \\ \mathfrak{z}_0''' &= -3\omega^2\mathfrak{s}_0'\cos\Delta - g\frac{\mathfrak{z}_0'}{R} + 3g\frac{\rho_0'}{R}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (245)$$

Четвертыя производныя координатъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{x}^{(4)} = -g\frac{R^2}{\rho^3}\left(\mathfrak{x}'' - 6\frac{\mathfrak{x}'\rho'}{\rho} + 3(\mathfrak{x} + R\sin\alpha)\frac{4(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2}\right) +$$

$$+ (\omega\mathfrak{s}'' - 2\eta''')\,\omega\sin\Delta;\ \ldots\ldots$$

Чтобы составить выраженія начальныхъ значеній производныхъ четвертаго порядка, составимъ сначала, при помощи предыдущихъ формулъ, выраженія слѣдующихъ величинъ:

$$\mathfrak{z}_0''' = -3\omega^2\mathfrak{z}_0' - \frac{g}{R}\mathfrak{z}_0' + 3\frac{g}{R}\rho_0'\cos\lambda$$

$$\omega\mathfrak{z}_0'' - 2\eta_0''' = 4\omega^2\eta_0' + 2\frac{g}{R}\eta_0' + 3G\omega\cos\Lambda$$

$$\omega\eta_0'' + 2\mathfrak{z}_0''' = -4\omega^2\mathfrak{z}_0' - 2\frac{g}{R}\mathfrak{z}_0' + 6\frac{g}{R}\rho_0'\cos\lambda.$$

Послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$\mathfrak{x}^{(4)} = 3G\left(\omega^2\sin\Lambda\cos\Lambda - \frac{g}{R}\sin\alpha\cos\alpha\right) +$$

$$+4\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\omega\eta_0'\sin\Lambda - 6\frac{g}{R}\omega\eta_0'\sin\alpha\cos\lambda +$$

$$+3\frac{g}{R^2}\left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2\right)\sin\alpha + 3\frac{g}{R^2}(3\mathfrak{x}_0'\rho_0' - \mathfrak{z}_0'\varkappa); \;.\,.\; \textbf{(246, a)}$$

$$\eta_0^{(4)} = -4\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\omega\mathfrak{z}_0' + 6\frac{g}{R}\omega\rho_0'\cos\lambda + 6\frac{g}{R^2}\eta_0'\rho_0'; \;.\,.\; \textbf{(246, b)}$$

$$\mathfrak{z}_0^{(4)} = 3G\left(\omega^2\cos^2\Lambda - \frac{g}{R}\cos^2\alpha\right) + \frac{g}{R}G +$$

$$+4\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\omega\eta_0'\cos\Lambda - 6\frac{g}{R}\omega\eta_0'\cos\alpha\cos\lambda +$$

$$+3\frac{g}{R^2}\left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2\right)\cos\alpha + 3\frac{g}{R^2}(3\mathfrak{z}_0'\rho_0' + \mathfrak{x}_0'\varkappa) \;.\,.\,.\,.\,.\; \textbf{(246, c)}$$

$$\varkappa = \mathfrak{x}_0'\cos\alpha - \mathfrak{z}_0'\sin\alpha.$$

Принявъ во вниманіе равенства:

$$\left.\begin{aligned} &G\cos\alpha = g - R\omega^2\cos^2\lambda, \quad G\sin\alpha = R\omega^2\sin\lambda\cos\lambda,\\ &G\cos\Lambda = (g - R\omega^2)\cos\lambda, \quad G\sin\Lambda = g\sin\lambda, \end{aligned}\right\} \;.\,.\,.\,.\,.\,.\; \textbf{(247)}$$

можемъ упростить выраженіе перваго члена второй части равенства (246, a); а именно мы найдемъ, что онъ равенъ:

$$-3\frac{g}{G}R\omega^4\sin^3\lambda\cos\lambda.$$

Составимъ ряды для слѣдующихъ случаевъ:

A) Матерьяльная точка пущена свободно, безъ начальной относительной скорости, то есть:

$$\mathfrak{x}_0'=0,\ \eta_0'=0,\ \mathfrak{z}_0'=0;$$

тогда выраженія для координатъ будутъ слѣдующія:

$$\mathfrak{x}=-\frac{g}{G}R\omega^4\frac{t^4}{8}\sin^3\lambda\cos\lambda+\ldots\ldots\ldots \quad (248,\ \mathrm{a})$$

$$\eta=-G\omega\frac{t^3}{3}\cos\Delta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (248,\ \mathrm{b})$$

$$\mathfrak{z}=-G\frac{t^2}{2}+G\left(\frac{g}{3R}+\omega^2\cos^2\Delta-\frac{g}{R}\cos^2\alpha\right)\frac{t^4}{8}+\ldots \quad (248,\ \mathrm{c})$$

Второе выраженіе показываетъ, что точка уклоняется въ отрицательную сторону оси Y (то есть къ *востоку*) отъ плоскости меридіана точки *Ю*; величина этого отклоненія пропорціональна косинусу истинной широты Δ точки *Ю*.

Взявъ $G=9{,}8$ единицъ ускоренія, Δ равнымъ 51° и $t=5{,}687$ секунды, получимъ приблизительно:

$$\mathfrak{z}=158{,}5 \text{ метра},\quad \eta=-27{,}56 \text{ миллиметра};$$

то есть, при паденіи точки съ высоты 158,5 метровъ подъ широтою въ 51° (сѣверной широты), отклоненіе къ востоку получается въ 27 съ половиною миллиметровъ; по опытамъ, произведеннымъ Рейхомъ въ Фрейбургѣ (находящимся подъ широтою 51 градуса) оказалось, что при паденіи съ этой высоты получается отклоненіе въ 28,3 миллиметра къ востоку; кромѣ того, при тѣхъ же опытахъ, наблюдалось еще нѣкоторое отклоненіе къ югу.

Формула (248, а) даетъ, напротивъ, отклоненіе къ сѣверу и притомъ совершенно ничтожное: для $t=6$ секундамъ, получается 8 милліонныхъ долей миллиметра; поэтому можно сказать, что, по формуламъ (248), движеніе падающей точки совершается приблизительно въ плоскости ЗY.

При $t=6$ секундамъ, второй членъ ряда (248, c) представляетъ длину въ 2,6 миллиметра; если пренебречь этимъ членомъ, а также всѣми членами, заключающими степени t выше 3-й, то движеніе свободно падающей точки выразится такъ:

$$\mathfrak{x}=0,\quad \eta=-G\omega\frac{t^3}{3}\cos\Delta,\quad \mathfrak{z}=-G\frac{t^2}{2};$$

а траэкторія окажется полукубическою параболою, заключающеюся въ плоскости $\mathfrak{ZY}$.

B) Если начальная относительная скорость направлена по оси $\mathfrak{Z}$, то есть, если точка брошена вертикально снизу вверхъ, то выраженія относительныхъ координатъ будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{x}=\frac{gt^2}{2G^2}\mathfrak{z}_0'R\,\omega^4\sin^3\lambda\cos\lambda,$$

$$\eta=\left(\mathfrak{z}_0'-G\frac{t}{3}\right)t^2\omega\cos\Delta,$$

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0't-G\frac{t^2}{2}-\mathfrak{z}_0'\frac{t^3}{6}\left[3\left(\omega^2\cos^2\Delta-\frac{g}{R}\cos^2\alpha\right)+\frac{g}{R}\right],$$

если пренебречь членами, заключающими четвертыя и высшія степени времени.

Чтобы составить себѣ хотя приблизительное понятіе о видѣ этого движенія, пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$R\omega^4,\quad \mathfrak{z}_0'\omega^2,\quad \frac{g}{R};$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{x}=0,\quad \eta=\left(\mathfrak{z}_0'-G\frac{t}{3}\right)t^2\omega\cos\Delta\\ \mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0't-G\frac{t^2}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(249)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что въ тотъ моментъ t_1, въ который точка достигаетъ наибольшей высоты, она будетъ отклонена къ *западу* отъ вертикальной плоскости на длину:

$$\eta_1=\frac{2(\mathfrak{z}')^3}{3G^2}\omega\cos\Delta;$$

въ моментъ $t_2 = 2t$ точка вернется на ось $\mathfrak{Y}$ и будетъ отклонена отъ точки *Ю* къ *западу* на длину:

$$\eta_2 = \frac{4(\mathfrak{z}_0')^3}{3G^2}\,\omega\cos\Lambda = 2\eta_1.$$

Вся та часть относительной траэкторіи, которая пробѣгается точкою въ теченіе промежутка времени отъ $t = O$ до $t = t_2$, находится въ квадрантѣ положительныхъ осей $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$.

C. Чтобы составить себѣ приблизительное понятіе о видѣ движенія матерьяльной точки, брошенной съ начальною скоростью u_0 подъ угломъ α къ истинному горизонту точки *Ю* и въ вертикальной плоскости, составляющей азимутъ β съ плоскостью меридіана, мы пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$\omega^2\mathfrak{x}_0',\ \omega^2\eta_0',\ \omega^2\mathfrak{z}_0',\ \frac{g}{R},$$

и всѣми членами высшаго порядка малости; тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_0't - \eta_0't^2\omega\sin\Lambda \\
\eta &= \eta_0't + (\mathfrak{x}_0'\sin\Lambda + \mathfrak{z}_0'\cos\Lambda)\,t^2\omega - G\frac{t^3}{3}\,\omega\cos\Lambda \\
\mathfrak{z} &= \mathfrak{z}_0't - \eta_0't^2\omega\cos\Lambda - G\frac{t^2}{2}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (\mathbf{250})$$

$$\mathfrak{x}_0' = u_0\cos\alpha\cos\beta,\quad \eta_0' = u_0\cos\alpha\sin\beta,\quad \mathfrak{z}_0' = u_0\sin\alpha.$$

Сравнивъ эти выраженія съ тѣми, которыя получились бы при неподвижности земли (при $\omega = O$) и при дѣйствіи на точку ускоренія G, направленнаго по отрицательной оси $\mathfrak{Z}$, мы увидимъ, что вращеніе земли оказываетъ слѣдующее вліяніе на полетъ брошеннаго тяжелаго тѣла.

a) Движеніе параллельно оси $\mathfrak{Z}$ совершается не съ ускореніемъ G, но съ ускореніемъ

$$G + 2u_0\omega\cos\Lambda\cos\alpha\sin\beta,$$

добавочный членъ котораго пропорціоналенъ косинусу истинной широты Δ и синусу азимута β; поэтому, при одной и той же скорости u_0 и при томъ же углѣ α, брошенное тѣло поднимется на бóльшую высоту при восточномъ азимутѣ $(\beta<O)$, чѣмъ при западномъ $(\beta>O)$.

b) Траэкторія не заключается въ вертикальной плоскости:

$$\eta=\mathfrak{x}\operatorname{tg}\beta,$$

какъ было бы при неподвижности земли, но имѣетъ видъ витой кривой линіи; если представить себѣ подвижную вертикальную плоскость, заключающую въ себѣ движущуюся точку, то законъ измѣненія азимута B этой плоскости выразится слѣдующею формулою:

$$\operatorname{tg}B=\frac{\operatorname{tg}\beta+t\omega\sin\Lambda}{1-t\omega\sin\Lambda\operatorname{tg}\beta}+\frac{\left(\mathfrak{z}_0'-G\frac{t}{3}\right)}{\mathfrak{x}_0'-\eta_0' t\omega\sin\Lambda}t\omega\cos\Delta\;\ldots\;(251)$$

Изъ этой формулы видно, что брошенное тѣло отклоняется, на сѣверномъ полушаріи, *вправо* отъ первоначальнаго направленія; въ самомъ дѣлѣ второй членъ суммы (251) сохраняетъ положительную величину въ теченіи времени отъ $t=0$ до $t=\frac{3u_0\sin\alpha}{G}$; поэтому:

$$B>\left(\beta+\operatorname{arctg}(t\omega\sin\Delta)\right).$$

Если тѣло брошено горизонтально, и начальная скорость его настолько велика, что можно пренебречь вторымъ членомъ суммы (251), то тогда:

$$\operatorname{tg}(B-\beta)=t\omega\sin\Delta;$$

то есть уголъ $(B-\beta)$ возрастаетъ пропорціонально времени и синусу широты Δ, и притомъ это отклоненіе *не зависитъ отъ первоначальнаго азимута* β.

c) Можно показать, что вращеніе земли увеличиваетъ дальность полета при западномъ азимутѣ β и уменьшаетъ при восточномъ.

Выраженія (250) могутъ быть получены также при помощи слѣдующихъ дѣйствій.

Пренебрежемъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія (243) членами:

$$\omega^2\mathfrak{x},\ \omega^2\eta,\ \omega^2\mathfrak{z}$$

и, замѣнивъ ρ черезъ R, пренебрежемъ отношеніями:

$$\frac{\mathfrak{x}}{R},\ \frac{\eta}{R},\ \frac{\mathfrak{z}}{R};$$

тогда получимъ дифференціальныя уравненія слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}'' &= -2\eta'\omega \sin\Lambda \\ \eta'' &= +2(\mathfrak{x}'\sin\Lambda + \mathfrak{z}'\cos\Lambda)\,\omega \\ \mathfrak{z}'' &= -2\eta'\omega\cos\Lambda - G \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(252)$$

Первые интегралы этихъ уравненій будутъ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \mathfrak{x}_0' - 2\eta\omega\sin\Lambda \\ \eta' &= \eta_0' + 2(\mathfrak{x}\sin\Lambda + \mathfrak{z}\cos\Lambda)\,\omega \\ \mathfrak{z}' &= \mathfrak{z}_0' - 2\eta\omega\cos\Lambda - Gt; \end{aligned}$$

они даютъ намъ выраженія проэкцій скорости въ функціяхъ времени и координатъ; подставивъ эти выраженія въ уравненія (252) и отбросивъ члены, содержащіе:

$$\omega^2\mathfrak{x},\ \omega^2\eta,\ \omega^2\mathfrak{z},$$

будемъ имѣть дифференціальныя уравненія:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}'' &= -2\eta_0'\omega\sin\Lambda \\ \eta'' &= 2(\mathfrak{x}_0'\sin\Lambda + \mathfrak{z}_0'\cos\Lambda)\,\omega - 2tG\omega\cos\Lambda \\ \mathfrak{z}'' &= -2\eta_0'\omega\cos\Lambda - G; \end{aligned}$$

двукратное интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ (250).

§ 31. Положенія равновѣсія свободной матерьяльной точки. Условія устойчивости.

Свободная матерьяльная точка, подверженная дѣйствію какихъ либо силъ, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ пространства, въ которыхъ силы, приложенныя къ покоящейся точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такія положенія матерьяльной точки называются *положеніями равновѣсія* ея.

Напримѣръ, матерьяльная точка, подверженная притяженію, направленному къ неподвижному центру C и прямопропорціональному разстоянію отъ C, будетъ имѣть положеніе равновѣсія въ этомъ центрѣ C.

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія даже и тогда, когда, кромѣ притяженія къ нему, на точку будетъ дѣйствовать сопротивленіе среды, пропорціональное первой степени скорости; въ самомъ дѣлѣ, если матерьяльная точка будетъ помѣщена въ центръ C безъ начальной скорости, то обѣ силы будутъ равны нулю, и матерьяльная точка останется въ покоѣ.

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія и въ томъ случаѣ, когда, вмѣсто притяженія, на точку дѣйствуетъ сила отталкивающая ее отъ центра и пропорціональная разстоянію отъ него.

Матерьяльная точка, помѣщенная въ положеніи равновѣсія безъ начальной скорости, будетъ оставаться въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока какая либо посторонняя сила или причина не выведетъ ее изъ этого положенія.

Положимъ, что дѣйствіемъ нѣкоторой временной причины, матерьяльная точка будетъ отклонена изъ положенія равновѣсія M_e въ одну изъ близлежащихъ точекъ пространства и будетъ выпущена изъ этой точки M_0 съ начальною скоростью v_0; послѣ этого, дѣйствіе временной причины прекращается, и матерьяльной точкѣ предоставляется совершать движеніе подъ вліяніемъ тѣхъ силъ, которыя взаимно уравновѣшиваются въ точкѣ M_e, но не уравновѣшиваются въ близлежащихъ частяхъ пространства.

Движеніе это можетъ быть различнаго характера, смотря по расположенію силъ въ сосѣдствѣ съ точкою M_e, смотря по величинѣ

и направленію начальнаго отклоненія $\overline{M_e M_0}$ и смотря по величинѣ и направленію начальной скорости v_0.

При нѣкоторыхъ силахъ матерьяльная точка совершаетъ движеніе, не выходя изъ предѣловъ нѣкотораго объема, окружающаго точку M_e; притомъ размѣры этого объема тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе отклоненіе $\overline{M_e M_0}$ и скорость v_0, а если послѣднія (то есть $\overline{M_e M_0}$ и v_0) безконечно-малы, то движеніе совершается въ безконечно-тѣсныхъ предѣлахъ около положенія равновѣсія M_e.

Если движеніе имѣетъ такой характеръ при весьма малыхъ начальныхъ отклоненіяхъ по всевозможнымъ направленіямъ изъ положенія равновѣсія и при всевозможныхъ направленіяхъ весьма малыхъ начальныхъ скоростей, то положеніе равновѣсія называютъ *устойчивымъ*.

При другихъ же силахъ матерьяльная точка въ своемъ движеніи все болѣе и болѣе удаляется отъ положенія равновѣсія, даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ начальныхъ отклоненій и скоростей; такое положеніе равновѣсія называютъ *неустойчивымъ*.

Напримѣръ, центръ C есть положеніе устойчиваго равновѣсія матерьяльной точки, притягиваемой къ нему силою, пропорціональною разстоянію; потому что матерьяльная точка, по отклоненіи ея на разстояніе конечной величины отъ центра C и по сообщеніи ей начальной скорости конечной величины, будетъ совершать движеніе вокругъ C по эллипсу конечныхъ размѣровъ (см. примѣръ 5 на стр. 82).

Напротивъ, тотъ же центръ будетъ положеніемъ неустойчиваго равновѣсія, если онъ отталкиваетъ отъ себя матерьяльную точку силою, пропорціональною разстоянію; потому что движущаяся точка уходитъ въ безконечность даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ отклоненій изъ центра C, какъ это видно изъ слѣдующихъ формулъ:

$$x=x_0\left(\frac{e^{\varkappa t}+e^{-\varkappa t}}{2}\right),\quad y=y_0\left(\frac{e^{\varkappa t}+e^{-\varkappa t}}{2}\right),$$

при составленіи которыхъ предполагалось, что центръ C взятъ за начало координатъ, и что начальная скорость равна нулю; изъ этихъ формулъ видно, что, даже при весьма малыхъ началь-

ныхъ отклоненіяхъ x_0, y_0, координаты x и y получаютъ безконечно большія значенія при $t = \infty$.

Устойчивость равновѣсія матерьяльной точки въ центрѣ C, притягивающемъ ее силою, пропорціональною разстоянію, проявляется довольно наглядно въ средѣ, оказывающей движенію матерьяльной точки сопротивленіе, пропорціональное скорости; тогда движущаяся точка будетъ постепенно приближаться къ притягивающему центру, описывая вокругъ него спираль, все болѣе и болѣе съуживающуюся (см. стр. 83, черт. 6).

Положенія равновѣсія матерьяльной точки, на которую дѣйствуютъ силы, имѣющія потенціалъ U, суть всѣ тѣ точки пространства, координаты которыхъ удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \qquad (253)$$

это могутъ быть: или изолированныя точки, или сплошныя линіи, поверхности и объемы, напримѣръ:

Примѣръ 22. Силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть: силы притяженія, пропорціональныя разстояніямъ, къ двумъ центрамъ, находящимся на оси X въ точкахъ $(x_1 = a)$ и $(x_2 = -a)$, и сила, параллельная положительной оси Z и пропорціональная квадрату разстоянія матерьяльной точки отъ плоскости XY; величины этихъ трехъ силъ — слѣдующія:

$$\mu^2 r_1, \quad \mu^2 r_2, \quad \lambda^2 z^2,$$

гдѣ r_1 и r_2 означаютъ разстоянія матерьяльной точки отъ притягивающихъ центровъ.

Въ этомъ случаѣ потенціальная функція будетъ:

$$U = \frac{\lambda^2}{3} z^3 - \frac{\mu^2}{2}\left((x-a)^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{\mu^2}{2}\left((x+a)^2 + y^2 + z^2\right).$$

Уравненія (253) будутъ слѣдующаго вида:

$$-2\mu^2 x = 0, \quad -2\mu^2 y = 0, \quad \lambda^2 z^2 - 2\mu^2 z = 0:$$

изъ нихъ находимъ, что равновѣсіе силъ возможно въ двухъ точкахъ пространства:

$$1)\ x=0,\ y=0,\ z=0;$$
$$2)\ x=0,\ y=0,\ z=\frac{2\mu^2}{\lambda^2}.$$

Примѣръ 23. Притяженія тѣ же, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, но вмѣсто силы, параллельной оси Z, дѣйствуетъ сила, отталкивающая матерьяльную точку отъ оси X пропорціонально квадрату разстоянія точки отъ этой оси; величина этой силы:

$$\lambda^2(y^2+z^2).$$

Потенціальная функція здѣсь будетъ слѣдующая:

$$U=\frac{\lambda^2}{3}(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{\mu^2}{2}r_1^{\,2}-\frac{\mu^2}{2}r_2^{\,2};$$

приравнявъ нулю первыя производныя ея, получимъ уравненія:

$$-2\mu^2x=0,\ \left(\lambda^2\sqrt{y^2+z^2}-2\mu^2\right)y=0,\ \left(\lambda^2\sqrt{y^2+z^2}-2\mu^2\right)z=0,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что положенія равновѣсія суть:

1) начало координатъ: $x=0$, $y=0$, $z=0$,

2) каждая изъ точекъ круга:

$$x=0,\ y^2+z^2=\frac{4\mu^4}{\lambda^4}.$$

Примѣръ 24. При дѣйствіи силъ, имѣющихъ потенціалъ:

$$U=\mu^2\left(r^2+\frac{\lambda^4}{r^2}\right),$$

положенія равновѣсія матерьяльной точки суть всѣ точки поверхности сферы, имѣющей радіусъ λ.

Въ каждой такой точкѣ пространства, координаты которой удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ (253), равновѣсіе будетъ устойчивымъ или неустойчивымъ, смотря потому, имѣетъ ли потенціальная функція U въ этой точкѣ максимумъ, или минимумъ.

Пусть M_e есть одна изъ точекъ равновѣсія, U_e— численное значеніе, получаемое потенціальною функціею въ этой точкѣ; x_e, y_e, z_e — координаты этой точки, удовлетворяющія тремъ уравненіямъ (253).

Въ точкѣ M $(x_e+\delta x,\ y_e+\delta y,\ z_e+\delta z)$, безконечно-близкой къ точкѣ M_e, потенціальная функція имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_e+\delta^2 U;$$

$$\delta^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\delta x)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\delta y)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\delta z)^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\delta y\delta z+$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\delta z\delta x+2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\delta x\delta y;$$

гдѣ во вторыя производныя должны быть подставлены координаты точки M_e.

Функція U имѣетъ максимумъ въ точкѣ M_e, если $\delta^2 U$ имѣетъ отрицательныя величины при всякихъ знакахъ безконечно-малыхъ величинъ δx, δy, δz и при всякихъ отношеніяхъ между ними; какъ извѣстно, это можетъ быть только тогда, когда вторыя производныя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} U_{xx}<0,\quad U_{yy}U_{xx}-U^2_{xv}>0, \\ (U_{yy}U_{xx}-U^2_{xy})(U_{zz}U_{xx}-U^2_{zx})-(U_{xx}U_{yz}-U_{zx}U_{xy})^2>0; \end{array}\right\}.\ (254)$$

(здѣсь вторыя производныя обозначены для сокращенія объема формулъ особыми символами; такъ

$$U_{yz}=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\Big).$$

Если условія (254) удовлетворены, то, въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ точкою M_e, поверхности уровня имѣютъ видъ эллипсоидовъ съ безконечно-малыми осями, имѣющихъ центры въ точкѣ M; параметръ такой поверхности уровня есть: U_e-k^2; а уравненіе ея:

$$-k^2=U_{xx}x^2+U_{yy}y^2+U_{zz}z^2+2U_{yz}yz+2U_{zx}zx+2U_{xy}xy; \quad (255)$$

k есть весьма малая постоянная, имѣющая тѣмъ бо́льшую величину, чѣмъ поверхность уровня далѣе отъ точки M_e.

Положимъ, что матерьяльная точка отклонена изъ положенія равновѣсія M_e въ весьма близкую къ нему точку M_0, и здѣсь ей сообщена весьма малая начальная скорость v_0; пусть:

$$U_c - k_0^2$$

есть параметръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_0.

Движеніе, совершаемое матерьяльною точкою, должно удовлетворять закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_e - k^2 - (U_e - k_0^2),$$

или:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 - k^2;$$

изъ этого уравненія видно, что точка не можетъ выйти внаружу той поверхности уровня, для которой

$$k^2 = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2,$$

потому что живая сила не можетъ быть отрицательною; поэтому точка M_e, въ которой потенціальная функція имѣетъ максимумъ, есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

Такъ, въ примѣрахъ 22-мъ и 23-мъ начало координатъ есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

ГЛАВА IV.

Механика несвободной матерьяльной точки.

§ 32. Матерьяльная точка несвободна, если существуютъ преграды, не позволяющія ей имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію изъ той точки пространства, въ которой она находится.

Всякія преграды могутъ быть разсматриваемы: однѣ — какъ поверхности тѣлъ непроницаемыхъ матерьяльною точкою, другія — какъ поверхности, удерживающія на себѣ точку.

Каждая преграда перваго рода не позволяетъ матерьяльной точкѣ, находящейся на преграждающей поверхности, сойти съ нея въ сторону непроницаемаго тѣла, дѣйствительнаго или воображаемаго, ограниченнаго этою поверхностью; точка можетъ двигаться вдоль по поверхности или сойти съ нея въ свободную сторону; поэтому такая преграда называется *поверхностью, не удерживающею матерьяльной точки.*

Напримѣръ, матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой, нерастяжимой и неимѣющей массы нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ въ началѣ координатъ, имѣетъ преградою поверхность сферы, радіусъ которой равенъ длинѣ нити, а центръ находится въ началѣ координатъ. Пока нить ненатянута,— матерьяльная точка находится внутри сферы, гдѣ она совершенно свободна; если же нить натянута, то точка, находясь на поверхности сферы, можетъ имѣть движеніе вдоль по сферѣ или внутрь ея; внаружу же сферы ея движеніе преграждено нерастяжимостью нити. Эта сфера есть очевидно поверхность, не удерживающая точку отъ перемѣщеній, направленныхъ внутрь ея.

Каждая преграда втораго рода не позволяетъ матерьяльной точкѣ сойти съ нѣкоторой поверхности, ни въ ту, ни въ другую сторону ея, такъ что точка можетъ двигаться только вдоль по

поверхности; такую преграду называютъ *поверхностью, удерживающею на себѣ матерьяльную точку.*

Примѣромъ такой поверхности можетъ служить поверхность сферы, на которой должна оставаться матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу безконечно-тонкаго, вполнѣ твердаго стержня, другой конецъ котораго постоянно находится въ началѣ координатъ; предполагается, что стержень можетъ совершать какое бы то ни было вращательное движеніе вокругъ этой неподвижной точки.

§ 33. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, удерживающею ее на себѣ.

Координаты матерьяльной точки должны постоянно удовлетворять уравненію поверхности, удерживающей ее на себѣ.

Если эта поверхность неподвижна, то уравненіе ея заключаетъ въ себѣ координаты и постоянные параметры.

Если же поверхность движется или измѣняетъ съ теченіемъ времени свой видъ или размѣры, то уравненіе ея будетъ заключать: координаты, постоянные параметры и время t.

Напримѣръ, поверхность сферы, центръ которой движется равномѣрно со скоростью k по оси X, а радіусъ возрастаетъ равномѣрно со скоростью A, выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$(x-\varkappa-kt)^2+y^2+z^2-(R+At)^2=0.$$

гдѣ $\varkappa$ есть абцисса центра, а R — величина радіуса, въ моментъ $t=0$.

Если матерьяльная точка движется по поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z, t)=0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (256)$$

то скорость ея должна удовлетворять слѣдующему уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \ldots\ldots\ldots \quad (257)$$

которое можно представить подъ такимъ видомъ:

$$\Delta f . v \cos(v.N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (258)$$

гдѣ N есть направленіе положительной нормали, возстановленной къ поверхности (256) изъ той точки ея, въ которой движущаяся матерьяльная точка находится въ моментъ t; косинусы угловъ, составляемыхъ этою нормалью съ осями координатъ, выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(N,X) &= \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \cos(N,Y) &= \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \cos(N,Z) &= \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (259)$$

$$\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \ldots\ldots \quad (259 \text{ bis})$$

Уравненіе (258) выражаетъ, что проэкція скорости v на направленіе положительной нормали должна имѣть величину:

$$-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (260)$$

Проэкція скорости на касательную плоскость къ поверхности можетъ быть какая угодно.

Частная производная отъ f по t равна нулю, *если поверхность неподвижна*; тогда уравненіе (258) будетъ выражать, что *скорость должна заключаться въ касательной плоскости,* чтó понятно и само собою.

Если поверхность, не измѣняя ни своего вида, ни размѣровъ, имѣетъ какое либо движеніе, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Означимъ черезъ w скорость той точки $\mathfrak{M}$ поверхности и среды, съ которою матерьяльная точка въ моментъ t совпадаетъ; эта скорость

должна удовлетворять тому же уравненію (258), которому удовлетворяетъ и v, потому что матерьяльная точка имѣла бы ее (т.-е. скорость w), если бы оставалась въ постоянномъ совпаденіи съ точкою $\mathfrak{M}$, а не двигалась бы вдоль по поверхности; и такъ:

$$\Delta f w \cos(w,N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (261)$$

Вычтя уравненіе (261) изъ уравненія (258), получимъ:

$$\Delta f\Big(v\cos(v,N) - w\cos(w,N)\Big) = 0,$$

или:

$$\Delta f . u\cos(u,N) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (262)$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ той неизмѣняемой средѣ, съ которою движущаяся поверхность неизмѣняемо связана; уравненіе (262) выражаетъ, что относительная скорость u должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

Если поверхность деформируется, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Разсуждая такъ же, какъ выше, придемъ къ такому же заключенію, а именно, *что скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ средѣ должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.*

§ 34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, не удерживающею ее съ одной стороны.

Условимся писать уравненіе каждой неудерживающей поверхности такимъ образомъ, чтобы во второй части уравненія былъ нуль, и чтобы первая часть дѣлалась бо́льшею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ той части пространства внѣ поверхности, въ которую матерьяльная точка можетъ сойти съ поверхности.

Такъ, напримѣръ, уравненіе поверхности сферы радіуса R, имѣющей центръ въ началѣ координатъ, будемъ писать такъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (263)$$

если поверхность эта не удерживаетъ матерьяльную точку, находящуюся на ней, отъ перемѣщеній внутрь ея; потому что координаты точекъ, находящихся внутри сферы, дѣлаютъ первую часть этого уравненія болѣе нуля и обращаютъ его въ неравенство:

$$R^2-(x^2+y^2+z^2)>0.$$

Если же та же самая сфера не удерживаетъ матерьяльную точку отъ перемѣщеній внаружу ея, то уравненіе ея станемъ писать такъ:

$$(x^2+y^2+z^2)-R^2=0 \qquad (264)$$

для того, чтобы первая часть его дѣлалась большею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ, находящихся внѣ сферы.

При соблюденіи этого условія, въ свободную сторону поверхности будутъ направлены положительныя нормали, возстановленныя изъ точекъ поверхности; въ самомъ дѣлѣ, если близъ точки M (x, y, z) поверхности:

$$f(x, y, z, t)=0 \qquad (265)$$

возьмемъ другую точку M_1 $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, такую, чтобы направленіе $\overline{MM_1}$ составляло острый уголъ съ направленіемъ положительной нормали N (259, 259 bis), возстановленной изъ точки M, то можемъ утверждать, что произведеніе:

$$\Delta f.\overline{MM_1}\cos(\overline{MM_1},N)$$

или равный ему трichленъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

болѣе нуля; знакъ же этого трichлена, при безконечной малости величинъ δx, δy, δz, опредѣляетъ собою знакъ величины:

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z,t);$$

значитъ эта величина также болѣе нуля, а слѣдовательно точка M_1 находится внѣ поверхности съ свободной стороны ея.

Матерьяльная точка свободна, когда находится внѣ поверхности (265); тогда координаты ея удовлетворяютъ неравенству:

$$f(x, y, z, t)>0,$$

а скорость ея можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направленіе.

Если въ какой либо моментъ t матерьяльная точка находится на поверхности (265), то въ моментъ $(t+dt)$ координаты ея:

$$x+Dx=x+x'dt+x''\frac{(dt)^2}{1.2}+\dots.$$

$$y+Dy=y+y'dt+y''\frac{(dt)^2}{1.2}+\dots.$$

$$z+Dz=z+z'dt+z''\frac{(dt)^2}{1.2}+\dots.$$

должны удовлетворять, или равенству:

$$f(x+Dx,\ y+Dy,\ z+Dz,\ t+dt)=0, \dots\dots \quad (266)$$

или неравенству:

$$f(x+Dx,\ y+Dy,\ z+Dz,\ t+dt)>0, \dots\dots \quad (267)$$

смотря потому, осталась ли точка на поверхности, или сошла съ нея.

Разложимъ первую часть равенства (266) или неравенства (267) по восходящимъ степенямъ дифференціала dt; принявъ во вниманіе уравненіе (265), получимъ:

$$f(x+Dx,\ y+Dy,\ z+Dz,\ t+dt)=\frac{df}{dt}dt+\frac{d^2f}{dt^2}\frac{(dt)^2}{1.2}+\dots \quad (268)$$

гдѣ:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial t}\dots\dots\dots\dots \quad (269)$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial x}x''+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''+Kf \ldots\ldots\ldots (270)$$

. . . .

$$Kf=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z')^2+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}x'y'+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}x'z'+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}x'+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}y'z'+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}y'+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t}z' \ldots\ldots\ldots (271)$$

Послѣ этого можемъ сказать, что если матерьяльная точка въ моментъ t находится на поверхности (265), то координаты ея, скорость и ускоренія должны удовлетворять равенству

$$\frac{df}{dt}dt+\frac{d^2f}{dt^2}\frac{(dt)^2}{1.2}+\ldots=0, \ldots\ldots\ldots (272)$$

или неравенству:

$$\frac{df}{dt}dt+\frac{d^2f}{dt^2}\frac{(dt)^2}{1.2}+\ldots>0, \ldots\ldots\ldots (273)$$

смотря потому, остается ли точка къ концу безконечно-малаго промежутка времени dt на той же поверхности, или сходитъ съ нея.

Отсюда слѣдуетъ, что первая полная производная отъ f по t не можетъ быть отрицательною, такъ какъ знакъ ея (при положительномъ dt) опредѣляетъ знакъ всего ряда; а потому скорость матерьяльной точки, находящейся на неудерживающей поверхности (265), должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial t}\geqslant 0, \ldots\ldots\ldots (274)$$

то есть:

$$v\cos(v,N)\geqslant-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t} \ldots\ldots\ldots (275)$$

Если поверхность неподвижна, то условіе (275) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$v\cos(v,N)\geqslant 0; \ldots\ldots\ldots (276)$$

это значитъ, что *скорость матерьяльной точки, находящейся на неподвижной неудерживающей поверхности, можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направленіе, составляющее съ положительною нормалью острый или прямой уголъ*, это, конечно, понятно само собою.

Если поверхность движется или деформируется, то мы можемъ себѣ представить нѣкоторую среду (какъ объяснено въ предыдущемъ параграфѣ), переносящую эту поверхность въ пространствѣ; означимъ черезъ $\mathfrak{M}$ ту точку поверхности и среды, съ которою матерьяльная точка совпадаетъ въ моментъ t.

Такъ какъ точка $\mathfrak{M}$ всегда остается принадлежащею поверхности, то скорость ея w удовлетворяетъ уравненію:

$$w\cos(w,N) = -\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}; \qquad \text{(261)}$$

изъ условія (275) и равенства (261) слѣдуетъ:

$$u\cos(u,N) \geqslant 0; \qquad \text{(277)}$$

это значитъ, что скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ средѣ должна составлять острый или прямой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности.

§ 35. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной удерживающей поверхности.

Кромѣ вышеприведенныхъ условій, ограничивающихъ произвольность скорости движущейся точки, существуютъ еще условія, которымъ должны подчиняться ускоренія ея.

Для точки, остающейся на данной поверхности, условія эти выражаются равенствами:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=0,\ \frac{d^3f}{dt^3}=0,\ \frac{d^4f}{dt^4}=0,\ \ldots.$$

Разсмотримъ значеніе перваго изъ нихъ.

Оно будетъ имѣть слѣдующій видъ при неподвижности поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' + f_2(x', y', z') = 0, \qquad \text{(278)}$$

гдѣ f_2 есть слѣдующая однородная функція второй степени отъ скоростей x', y', z':

$$f_2(x', y', z') = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z')^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y'z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} z'x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x'y'.$$

Равенство (278) можетъ быть представлено еще такъ:

$$\Delta f \, . \, \dot{v} \cos(\dot{v}, N) + f_2(x', y', z') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(279)}$$

или:

$$\Delta f \, . \, \frac{dv}{dt} \cos(v, N) + \Delta f \, . \, \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, N) + f_2 = 0,$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траэкторіи, описываемой матерьяльною точкою на неподвижной поверхности.

Принявъ во вниманіе, что скорость перпендикулярна въ нормали N, мы найдемъ, что разсматриваемое нами условіе можетъ быть выражено также слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{1}{\rho} \cos(\rho, N) = -\frac{f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(280)}$$

гдѣ a_x, a_y, a_z означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ скорости съ осями координатъ X, Y, Z*).

Равенство (279), или равенство:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, N) = -\frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(279\ bis)}$$

опредѣляетъ величину проэкціи ускоренія на нормаль N въ каждой точкѣ поверхности; величина эта зависитъ отъ величины и направленія скорости, такъ что *въ каждой точкѣ поверхности*,

---

*) Косинусы эти должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z = 0.$$

при опредѣленныхъ величинахъ v^2, a_x, a_y, a_z, *проэкція ускоренія на нормаль къ поверхности должна имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.*

Равенство (280) опредѣляетъ величину радіуса кривизны траэкторіи въ зависимости отъ направленія скорости и отъ угла, составляемаго плоскостью кривизны траэкторіи съ нормалью къ поверхности.

Подвижную поверхность:

$$f(x, y, z, t)=0$$

неизмѣняемаго вида мы представляемъ себѣ принадлежащею нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ.

Выразимъ абсолютныя координаты x, y, z въ координатахъ ξ, η, ζ относительно нѣкоторыхъ осей Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$, неизмѣнно-связанныхъ со средою; тогда *первая часть уравненія поверхности должна будетъ выразиться нѣкоторою функціею координатъ* ξ, η, ζ, *не заключающею времени явнымъ образомъ*, потому что поверхность находится въ относительномъ покоѣ по отношенію къ средѣ.

Положимъ:

$$f(x, y, z, t)=\Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

Вслѣдствіе такой перемѣны координатъ, равенство:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial x}x''+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''+Kf=0,$$

(гдѣ Kf выражается формулою (271)) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\xi''+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\eta''+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\zeta''+\Phi_2(\xi', \eta', \zeta')=0, \ldots \quad (281)$$

аналогичный виду равенства (278).

Отсюда, также какъ и для неподвижной поверхности, получимъ:

$$\dot{u}\cos(\dot{u},N)=-\frac{u^2\Phi_2(\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta)}{\Delta\Phi}, \ldots\ldots\ldots \quad (282)$$

гдѣ α_ξ, α_η, α_ζ суть косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ относительной скорости *u* съ осями Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$; эти косинусы должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\alpha_\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\alpha_\eta+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\alpha_\zeta=0.$$

Подъ Φ_2 и $\Delta\Phi$ мы подразумѣваемъ

$$\Delta\Phi=+\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)^2}, \ldots\ldots \quad (283)$$

$$\Phi_2(\xi',\eta',\zeta')=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}(\xi')^2+\ldots\ldots+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}\xi'\eta'\ldots\ldots \quad (284)$$

Равенство (282) опредѣляетъ величину проэкціи на нормаль относительнаго ускоренія движущейся точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ; въ каждой точкѣ поверхности, при опредѣленныхъ величинахъ $\dot{u}$, α_ξ, α_η, α_ζ, проэкція относительнаго ускоренія $\dot{u}$ на нормаль къ поверхности должна имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.

Деформирующуюся поверхность:

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0.\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (285)$$

мы представляемъ себѣ принадлежащею нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что во все время движенія поверхность состоитъ изъ однѣхъ и тѣхъ же точекъ этой среды.

Буквами x, y, z мы будемъ теперь обозначать координаты матерьяльной точки; координаты же точекъ среды и поверхности мы будемъ обозначать такъ, какъ въ V-й главѣ кинематической части, а именно $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ будутъ означать координаты какой либо точки среды въ моментъ $t=0$, а $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ — координаты той же самой точки среды въ моментъ t.

Положимъ, что движеніе среды, а съ нею и поверхности, выражается слѣдующими функціями:

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},t),\quad \mathfrak{y}=\mathfrak{F}_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},t),\quad \mathfrak{z}=\mathfrak{F}_3(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},t)\ \ldots \quad (286)$$

Если въ уравненіе:

$$f(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ t)=0\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (287)$$

вмѣсто $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ подставить функціи $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, то должны будемъ получить уравненіе, удовлетворяемое начальными координатами всѣхъ тѣхъ точекъ среды, которыя находятся на разматриваемой поверхности; говоря иначе, по исключеніи величинъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ изъ равенствъ (286) и (287), мы должны получить уравненіе начальнаго положенія поверхности:

$$f(\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ 0)=0,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (288)$$

то есть, уравненіе, не заключающее времени явнымъ образомъ.

Уравненіе (285) должно удовлетворяться тождественно функціями времени:

$$x=f_1(t),\ \ y=f_2(t),\ \ z=f_3(t),$$

выражающими абсолютное движеніе точки, движущейся по разсматриваемой поверхности; точно также уравненіе (288) должно удовлетворяться тождественно функціями времени:

$$\mathfrak{a}=\varphi_1(t),\ \ \mathfrak{b}=\varphi_2(t),\ \ \mathfrak{c}=\varphi_3(t),$$

выражающими относительное движеніе той же точки по отношенію къ деформирующейся средѣ (Кинем. часть, стр. 197, строки 15—22 сверху).

Если функція f будетъ приведена къ виду (288), то условія:

$$\frac{df}{dt}=0,\ \ \frac{d^2f}{dt^2}=0$$

выразятся слѣдующими равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}'+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}'+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}'=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (289)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}''+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}''+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}''+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{a}^2}(\mathfrak{a}')^2+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{a}\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'=0; \quad (290)$$

съ другой стороны производныя отъ f по $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ могутъ быть получены, разсматривая f какъ функцію отъ x, y, z и t, а x, y, z — какъ функціи (286) отъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, t; такъ что:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{a}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{a}^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}}\right)^2+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{a}^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{a}^2};$$

. . . .

Вслѣдствіе этого, равенства (289) и (290) получать такой видъ:

$$\mathfrak{u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\mathfrak{u},X)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\mathfrak{u},Y)+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(\mathfrak{u},Z)\right)=0$$

$$\Delta f.\dot{\mathfrak{u}}\cos(\dot{\mathfrak{u}},N)+\mathfrak{u}^2 f_2(c_1,\ c_2,\ c_3)=0,\ldots\ldots\ \mathbf{(291)}$$

гдѣ $\mathfrak{u}$ есть скорость относительнаго движенія (проэкціи которой на оси координатъ выражаются формулами (240) кинематической части); c_1, c_2, c_3— косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ этой скорости съ осями координатъ: $\dot{\mathfrak{u}}$ — ускореніе относительнаго движенія точки по отношенію къ деформирующейся поверхности; проэкція этого ускоренія на ось X выражается такъ:

$$\dot{\mathfrak{u}}\cos(\dot{\mathfrak{u}},X)=\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}''+\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}''+\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}''+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}^2}(\mathfrak{a}')^2+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{b}^2}(\mathfrak{b}')^2+$$

$$+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{c}^2}(\mathfrak{c}')^2+2\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{b}\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'+2\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{c}\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'+2\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{a}\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ ^*)\ldots\ \mathbf{(292)}$$

Равенство (291) аналогично равенству (279).

---

*) Въ дополненіе къ сказанному въ V-й главѣ кинематической части слѣдуетъ прибавить, что ускореніе абсолютнаго движенія точки M въ какой либо моментъ t есть геометрическая сумма, составленная:

1) изъ ускоренія $\dot{w}$ той точки измѣняемой среды, съ которой точка M въ этотъ моментъ совпадаетъ,

$$\dot{w}\cos(\dot{w}X)=\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2},$$

2) изъ ускоренія $\dot{\mathfrak{u}}$ относительнаго движенія

и 3) изъ добавочнаго ускоренія. проэкція котораго на ось X выражается такъ:

$$2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t\partial \mathfrak{a}}\mathfrak{a}'+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t\partial \mathfrak{b}}\mathfrak{b}'+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t\partial \mathfrak{c}}\mathfrak{c}'\right).$$

Если среда неизмѣняемая, то добавочное ускореніе есть противоположное поворотному.

§ 36. О кривизнѣ линій, проведенныхъ по поверхности и о кривизнѣ поверхностей.

Формула (280) выражаетъ кривизну линіи, проведенной по поверхности, въ функціи слѣдующихъ величинъ: x, y, z, a_x, a_y, a_z, $\cos(\rho, N)$; первыя три суть координаты той точки, въ которой опредѣляется кривизна кривой, слѣдующія три: a_x, a_y, a_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ касательною къ кривой въ этой точкѣ; послѣдняя величина есть косинусъ угла, составляемаго плоскостью кривизны кривой съ нормалью къ поверхности въ той же точкѣ.

Изъ формулы этой можно видѣть слѣдующее.

1. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, имѣющія въ этой точкѣ общую касательную и общую плоскость кривизны, имѣютъ въ ней одинаковый радіусъ кривизны.

2. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, и имѣющія въ этой точкѣ общую касательную, но различныя плоскости кривизны, имѣютъ въ этой точкѣ такіе радіусы кривизны, что отношеніе:

$$\frac{\cos(\rho, N)}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(293)}$$

для всѣхъ ихъ одинаково.

Означимъ черезъ $\mathfrak{R}$ величину радіуса кривизны линіи пересѣченія поверхности плоскостью, проведенною черезъ нормаль N и черезъ общую касательную ко всѣмъ кривымъ; такая кривая называется *нормальнымъ сѣченіемъ* поверхности.

Предыдущее отношеніе (293) равняется единицѣ, дѣленной на $\mathfrak{R}$, если радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія направленъ по N; въ противномъ же случаѣ отношеніе (293) равняется минусъ единицѣ, дѣленной на $\mathfrak{R}$.

Слѣдовательно:

$$\rho = \pm \mathfrak{R} \cos(\rho, N),$$

то есть *радіусъ кривизны какой либо кривой, проведенной по поверхности, равенъ проэкціи на плоскость ея кривизны радіуса кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ касательную къ кривой.*

Для того, чтобы формулы не заключали явнымъ образомъ двойственнаго знака, условимся считать кривизну нормальнаго сѣченія отрицательною, если радіусъ кривизны его направленъ въ сторону отрицательной нормали; обозначать ее будемъ знакомъ $\mathfrak{K}$.

$$\mathfrak{K} = -\frac{f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(294)}$$

5. Формула (294) упрощается, если уравненіе поверхности будетъ рѣшено относительно z и представлено подъ видомъ:

$$F(x,\ y) - z = 0;$$

тогда будетъ:

$$\Delta f = \sqrt{p^2 + q^2 + 1};\ f_2 = ra_x^2 + 2sa_x a_y + ta_y^2,$$

гдѣ:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x},\ q = \frac{\partial F}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

а потому:

$$\mathfrak{K} = -\frac{ra_x^2 + 2sa_x a_y + ta_y^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(295)}$$

6. Формула (294) упрощается тоже, если ось Z параллельна нормали N; тогда:

$$a_z = 0,\ a_x = \cos\varphi,\ a_y = \sin\varphi,\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

гдѣ φ есть уголъ, составляемый касательною къ кривой съ осью Xовъ; будетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{K} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right) \ldots \quad \mathbf{(296)}$$

7. Формула (296) послужитъ намъ для сужденія о законѣ, которому слѣдуютъ кривизны нормальныхъ сѣченій, заключающихся въ различныхъ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ одну и ту же нормаль; для большей наглядности формулы, преобразуемъ ее слѣдующимъ образомъ.

Квадраты косинуса и синуса угла φ выразимъ въ косинусѣ двойнаго угла φ:

$$\mathfrak{K} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}\cos 2\varphi - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}}\sin 2\varphi,$$

затѣмъ приведемъ коэффиціенты у косинуса и синуса къ слѣдующему виду:

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{D}}{2}\cos 2\varphi_0,\quad \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{D}}{2}\sin 2\varphi_0,$$

тогда получимъ слѣдующее выраженіе кривизны нормальнаго сѣченія·

$$\mathfrak{K}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2\frac{\partial f}{\partial z}}-\frac{\mathfrak{D}}{2}\cos 2(\varphi-\varphi_0)\ldots\ldots \quad \textbf{(297)}$$

гдѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{D}=\sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}\ldots\ldots \quad \textbf{(298)}$$

Изъ формулы (297) хорошо видно, какъ измѣняется кривизна нормальнаго сѣченія при вращеніи сѣкущей плоскости вокругъ нормали. Наименьшую кривизну имѣетъ сѣченіе плоскостью, составляющею уголъ φ_0 съ плоскостью ZX; наибольшую — сѣченіе плоскостью перпендикулярною къ первой и составляющею уголъ $\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)$ съ плоскостью ZX. Эти нормальныя сѣченія называются *главными*, а кривизны ихъ — *главными кривизнами поверхности* въ разсматриваемой точкѣ.

Обозначимъ наибольшую кривизну знакомъ $\mathfrak{K}_M$, наименьшую — знакомъ $\mathfrak{K}_m$; изъ предыдущихъ формулъ найдемъ слѣдующія выраженія для суммы и произведенія этихъ кривизнъ:

$$\mathfrak{K}_M+\mathfrak{K}_m=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(299)}$$

$$\mathfrak{K}_M\mathfrak{K}_m=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(300)}$$

8. Изъ формулы (297) видно также, что сумма кривизнъ двухъ взаимно-ортогональныхъ нормальныхъ сѣченій въ каждой точкѣ поверхности есть величина постоянная, независящая отъ угла φ, опредѣляющаго положеніе сѣченій; формула (299) выражаетъ величину этой суммы.

9. Подобно тому, какъ средняя кривизна какой либо дуги измѣряется отношеніемъ нѣкотораго угла къ длинѣ дуги, аналогично этому средняя кривизна какой либо изогнутой площади измѣряется отношеніемъ нѣкотораго тѣлеснаго угла къ величинѣ площади.

Пусть S величина нѣкоторой площади, взятой на кривой поверхности и ограниченной замкнутымъ контуромъ.

Представимъ себѣ коническую поверхность, имѣющую вершиною начало координатъ, а производящими — линіи параллельныя нормалямъ къ поверхности, проведеннымъ черезъ точки контура площади S.

Представимъ себѣ, кромѣ того, сферу радіуса равнаго единицѣ, имѣющую центръ также въ началѣ координатъ.

Пусть Σ есть величина площади той части поверхности сферы, которая заключается внутри вышеозначенной конической поверхности.

Величина тѣлеснаго угла, образуемаго коническою поверхностью при ея вершинѣ, измѣряется отношеніемъ площади Σ въ единицѣ площади.

Отношеніе:

$$\frac{\Sigma}{S}\frac{1}{(\text{един. длины})^2}$$

называется *среднею кривизною* площади S.

Кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея A есть величина средней кривизны безконечно-малой площадки, заключающей въ себѣ (или на своемъ контурѣ) точку A.

Означимъ черезъ ν_x, ν_y, ν_z косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности съ осями координатъ; координаты точки, находящейся на поверхности вышеозначенной сферы, выразятся величинами:

$$(\text{един. длины})\,\nu_x = \frac{(\text{един. длины})}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(\text{един. длины})\,\nu_y = \frac{(\text{един. длины})}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(\text{един. длины})\,\nu_z = \frac{(\text{един. длины})}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Площади Σ и S выразятся слѣдующими интегралами:

$$\Sigma = (\text{един. длины})^2 \int\int \frac{d\nu_x d\nu_y}{\nu_z}; \quad S = \int\int \frac{dxdy}{\nu_z}.$$

Косинусы ν_x и ν_y могутъ быть выражены функціями отъ x и y; поэтому:

$$\Sigma = (\text{един. длины})^2 \int\int \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial x}\frac{\partial \nu_y}{\partial y} - \frac{\partial \nu_x}{\partial y}\frac{\partial \nu_y}{\partial x}\right)\frac{dxdy}{\nu_z}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея выразится такъ:

$$\textbf{кривизна поверхности} = \frac{\partial \nu_x}{\partial x}\frac{\partial \nu_y}{\partial y} - \frac{\partial \nu_x}{\partial y}\frac{\partial \nu_y}{\partial x}.$$

Если ось Z параллельна нормали, возстановленной изъ точки A поверхности, то, для этой точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \nu_x}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial \nu_y}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots.$$

а поэтому кривизна въ точкѣ A выразится второю частью равенства (300); изъ этого слѣдуетъ, что во всякой точкѣ поверхности:

$$(\text{кривизна поверхности}) = \mathfrak{K}_M \mathfrak{K}_m \ldots\ldots\ \textbf{(301)}$$

10. Нетрудно составить для суммы кривизнъ ортогональныхъ сѣченій и для кривизны поверхности болѣе общія выраженія, чѣмъ тѣ, которыя приведены выше (формулы (299) (300)); а именно, легко убѣдиться, что:

$$\mathfrak{K}_M + \mathfrak{K}_m = -\frac{\Delta_2 f}{\Delta f} + \frac{f_2\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{(\Delta f)^3}, \ldots\ldots\ \textbf{(302)}$$

$$\mathfrak{K}_M \mathfrak{K}_m = -\frac{1}{(\Delta f)^4}\begin{vmatrix} 0, & f_x, & f_y, & f_z \\ f_x, & f_{xx}, & f_{xy}, & f_{xz} \\ f_y, & f_{xy}, & f_{yy}, & f_{yz} \\ f_z, & f_{xz}, & f_{yz}, & f_{zz} \end{vmatrix}; \ldots\ \textbf{(303)}$$

здѣсь, въ опредѣлителѣ, производныя означены сокращенными знаками; въ выраженіи же (302):

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

11. Если уравненіе поверхности будетъ рѣшено относительно z и мы пожелаемъ выразить вышесказанныя величины въ p, q, r, s, t, то получимъ:

$$\mathfrak{K}_M+\mathfrak{K}_m=-\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \ldots\ldots \quad (304)$$

$$\mathfrak{K}_M\mathfrak{K}_m=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (305)$$

§ 37. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной неудерживающей поверхности.

Когда точка сходитъ съ поверхности, тогда та изъ ряда производныхъ:

$$\frac{df}{dt}, \ \frac{d^2f}{dt^2}, \ \frac{d^3f}{dt^3}, \ldots\ldots$$

которая первая не обращается въ нуль, получаетъ значеніе положительное.

Слѣдовательно, если

$$\frac{df}{dt}=0,$$

то ускореніе точки, находящейся на данной неудерживающей поверхности, должно удовлетворять условію:

$$\frac{d^2f}{dt^2} \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (306)$$

Это условіе при неподвижной поверхности принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v},N) \geqslant -\frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \ldots\ldots\ldots \quad (307)$$

при подвижной поверхности неизмѣняемой формы — слѣдующій:

$$\dot{u}\cos(\dot{u},N) \geqslant -\frac{u^2 \Phi_2(\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta)}{\Delta \Phi}, \ldots\ldots\ldots \quad (308)$$

а при деформирующейся поверхности — слѣдующій:

$$\dot{u}\cos(\dot{u},N) \geqq -\frac{u^2 f_2(c_1, c_2, c_3)}{\Delta f} \ldots\ldots\ldots (309)$$

Если же скорость точки составляетъ острый уголъ съ нормалью, то есть, если

$$\frac{df}{dt} > 0,$$

то ускореніе ея не подлежитъ никакому ограниченію.

§ 38. Итакъ, абсолютная скорость и абсолютное ускореніе матерьяльной точки, стѣсненной въ своемъ движеніи поверхностью:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0,$$

должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ.

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку:

$$\Delta f \,.\, v\cos(v,N) = -\frac{\partial f}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots (258)$$

$$\Delta f \,.\, \dot{v}\cos(\dot{v},N) = -Kf, \ldots\ldots\ldots\ldots (310)$$

гдѣ Kf есть сокращенное обозначеніе слѣдующаго выраженія:

$$v^2 f_2(a_x,\ a_y,\ a_z) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t dx}x' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial t dz}z'\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \ldots (271)$$

$$v^2 f_2(a_x,\ a_y,\ a_z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x')^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}x'y'.$$

2. Если точка находится на поверхности неудерживающей, то абсолютная скорость должна удовлетворять условію:

$$\Delta f \,.\, v\cos(v,N) \geqq -\frac{\partial f}{\partial t}; \ldots\ldots\ldots (275)$$

a) если скорость удовлетворяетъ равенству:

$$\Delta f \,.\, v\cos(v,N) = -\frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускореніе точки должно удовлетворять условію:

$$\Delta f \,.\, \dot{v} \cos(\dot{v}, N) \geqq -Kf; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (311)$$

b) если же скорость удовлетворяетъ неравенству:

$$\Delta f \,.\, v \cos(v, N) > -\frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускореніе точки не подлежитъ никакому ограниченію.

3. Если точка находится внѣ неудерживающей поверхности, то ни скорость, ни ускоренія ея не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ.

§ 39. Реакція поверхности.

Три основныя начала (§ 14), *положенныя въ основаніе механики свободной точки, составляютъ также основаніе механики несвободной матерьяльной точки.*

На основаніи этихъ началъ, абсолютное ускореніе, сообщаемое несвободной матерьяльной точкѣ всѣми силами, одновременно приложенными къ ней, имѣетъ направленіе равнодѣйствующей этихъ силъ и равно величинѣ равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки.

Въ силу тѣхъ же началъ, зная абсолютное ускореніе несвободной матерьяльной точки, мы дѣлаемъ заключеніе о величинѣ и направленіи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Изъ этого и изъ условій, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, стѣсненной въ своихъ движеніяхъ поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку, то проэкція на нормаль къ поверхности *равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, равна*

$$-m\frac{Kf}{\Delta f} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (312)$$

2. Если поверхность неудерживающая и точка находится на ней и если

a) скорость точки перпендикулярна къ нормали, то проэкція вышесказанной равнодѣйствующей на нормаль

$$\text{не} < -m\frac{Kf}{\Delta f}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (313)$$

b) если же скорость точки составляетъ острый уголъ съ нормалью, то вышесказанная равнодѣйствующая не подлежитъ никакому ограниченію.

Разсматриваемая поверхность преграждаетъ всякія движенія матерьяльной точки, несогласныя съ существованіемъ преграды.

Причина такого дѣйствія преграды должна заключаться въ образованіи силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, и появляющейся только тогда, когда прочія причины движенія побуждаютъ матерьяльную точку преодолѣть преграду *); такая сила называется *реакціею преграды.*

Реакція преграды развивается до такой величины и получаетъ такое направленіе, что равнодѣйствующая, составленная изъ нея и изъ всѣхъ *прочихъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ, удовлетворяетъ тому изъ условій (312), (313), которое свойственно имѣющейся преградѣ.

Эти *прочія* силы мы условимся называть *задаваемыми силами.*

Итакъ, равнодѣйствующая изъ задаваемой силы F, приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся на удерживающей поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

и изъ реакціи R этой преграды, должна удовлетворить условію (312), то есть:

$$F\cos(F,N) + R\cos(R,N) = -m\frac{Kf}{\Delta f} \ldots\ldots \quad (312)$$

---

*) Причинами движенія, побуждающими къ этому матерьяльную точку, могутъ быть не только всѣ прочія (за исключеніемъ реакціи преграды) силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, но также и инерція ея.

Это равенство опредѣляетъ только величину проэкціи реакціи на нормаль; проэкція же реакціи на касательную плоскость остается неопредѣленною, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Такой результатъ получили мы, разсматривая преграду, какъ кинематическое условіе стѣсняющее свободу движенія точки нѣкоторою поверхностью, и не дѣлая никакихъ предположеній, ни относительно вида и физической природы тѣлъ, образующихъ преграду, ни относительно природы вещества матерьяльной точки; поэтому то мы получили вполнѣ опредѣленную величину для той части реакціи, которая существенно необходима для удовлетворенія условію, положенному преградою.

Вслѣдствіе этого мы вправѣ принять, что сила $R \cos (R,N)$, направленная по нормали къ поверхности, есть собственно *реакція поверхности*; составляющую же $R \sin (R,N)$, дѣйствующую въ касательной плоскости, мы отнесемъ къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ тѣлъ, образующихъ преграду; объ этой составляющей будемъ говорить ниже.

Въ силу вышесказаннаго, мы будемъ принимать, что

РЕАКЦІЯ ПОВЕРХНОСТИ НА МАТЕРЬЯЛЬНУЮ ТОЧКУ, НАХОДЯЩУЮСЯ НА ЭТОЙ ПОВЕРХНОСТИ, НАПРАВЛЕНА ПО НОРМАЛИ КЪ ПОВЕРХНОСТИ.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена по положительной или по отрицательной нормали; въ первомъ случаѣ величина ея $\mathfrak{R}$, опредѣляемая по формулѣ:

$$\mathfrak{R} = -m\frac{Kf}{\Delta f} - F\cos(F,N), \ldots\ldots\ldots \quad (312)$$

выразится числомъ положительнымъ, во второмъ—отрицательнымъ; сообразно съ этимъ, мы будемъ называть реакцію, направленную по положительной нормали—*положительною*, а направленную по отрицательной нормали—*отрицательною*.

Если движеніе матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности будетъ извѣстно, то формула (312) дастъ намъ величину реакціи во всякій моментъ движенія.

§ 40. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ.

Пусть

$$f(x, y, z, t)=0$$

есть уравненіе поверхности, m — масса матерьяльной точки, X, Y, Z — проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей приложенныхъ къ ней задаваемыхъ силъ.

Проэкціи реакціи на оси координатъ будутъ:

$$\frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой точки (въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ) будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (314)$$

гдѣ

$$\lambda=\frac{\mathfrak{R}}{\Delta f}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (315)$$

$$\Delta f=+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

и гдѣ координаты x, y, z связаны уравненіемъ поверхности:

$$f(x, y, z, t)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (316)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ изъ уравненій (314), вслѣдствіе чего получатся два дифференціальныя уравненія, не заключающія λ; эти уравненія интегрировать, принимая во вниманіе, что x, y, z и t связаны уравненіемъ (316).

Для опредѣленія же λ имѣемъ формулу:

$$\lambda = -\frac{\left(mKf + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{(\Delta f)^2}, \ldots\ldots (317)$$

или же можно опредѣлить λ изъ котораго либо изъ уравненій (314).

§ 41. Законъ живой силы для точки, движущейся по поверхности.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (314) можно составить уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt} = Xx' + Yy' + Zz' + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'\right),$$

если поступить такъ, какъ во второй половинѣ параграфа 21-го.

Это уравненіе получитъ видъ уравненія (111) того же параграфа, если поверхность неподвижна, потому что тогда при всякомъ положеніи точки имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0.$$

Разсуждая затѣмъ такъ же, какъ въ § 26, мы придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матерьяльная точка находится на неподвижной поверхности неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы, выражаемому интеграломъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \ldots\ldots\ldots\ldots (150)$$

§ 42. Геодезическая линія.

Положимъ, что данная поверхность неподвижна и что приложенныя къ матерьяльной точкѣ *задаваемыя силы* взаимно уравновѣшиваются во все время движенія ея, тогда единственная

сила, приложенная къ точкѣ, будетъ реакція поверхности, величина и знакъ которой опредѣляется по формулѣ:

$$\mathfrak{R}=\lambda\Delta f=-m\frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \ldots\ldots \quad (318)$$

или (см. формулу 294):

$$\mathfrak{R}=mv^2\mathfrak{K},$$

гдѣ $\mathfrak{K}$ есть величина кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости точки.

Дифференціальныя уравненія (314) получатъ, въ этихъ случаяхъ, слѣдующій общій видъ:

$$mx''=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad my''=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad mz''=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}; \ldots\ldots \quad (319)$$

интегралъ, выражающій законъ живой силы, будетъ:

$$\frac{mv^2}{2}=h,$$

или

$$v^2=v_0;$$

это означаетъ, что *скорость матерьяльной точки сохраняетъ постоянную величину.*

Такъ какъ скорость постоянна, то проэкція ускоренія на касательную къ траэкторіи равна нулю, а потому проэкціи ускоренія на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$x''=v_0^2\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{v_0^2}{\rho}\cos(\rho X)$$

$$y''=v_0^2\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{v_0^2}{\rho}\cos(\rho Y)$$

$$z''=v_0^2\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{v_0^2}{\rho}\cos(\rho Z).$$

Подставивъ эти выраженія въ дифференціальныя уравненія (319), найдемъ, что они получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\lambda}{mv_0^2}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\lambda}{mv_0^2}\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\lambda}{mv_0^2}\frac{\partial f}{\partial z};\qquad (320)$$

изъ нихъ слѣдуетъ:

$$\frac{\cos(\rho,X)}{\cos(N,X)}=\frac{\cos(\rho,Y)}{\cos(N,Y)}=\frac{\cos(\rho,Z)}{\cos(N,Z)},$$

то есть, что *радіусъ кривизны траэкторіи направленъ по нормали къ поверхности, а, слѣдовательно, плоскость кривизны ея проходитъ черезъ нормаль.*

Кривая линія, проведенная по поверхности такимъ образомъ, чтобы плоскость кривизны во всякой точкѣ ея заключала въ себѣ нормаль къ поверхности, возстановленную въ той же точкѣ, называется *геодезическою линіею.*

Слѣдовательно, *если къ матерьяльной точкѣ, удерживаемой неподвижною поверхностью, не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ, то точка, или находится въ покоѣ, или движется съ постоянною скоростью, описывая геодезическую линію;* эта линія проходитъ черезъ начальное положеніе точки и касается къ направленію начальной скорости.

Такимъ образомъ, каждая задача этого рода сводится на задачу о проведеніи по данной поверхности геодезической линіи черезъ данную точку и по данному направленію, проведенному изъ этой точки.

При рѣшеніи какъ этихъ, такъ и многихъ другихъ задачъ о движеніи точки по поверхности, выборъ системы координатъ, наиболѣе подходящей къ вопросу, играетъ весьма существенную роль, такъ какъ очень часто, при удачномъ выборѣ координатъ, формулы не только упрощаются, но и получаютъ бо́льшую наглядность.

Конечно, слѣдуетъ отдавать предпочтеніе такой системѣ координатъ, при которой заданная поверхность есть одна изъ координатныхъ поверхностей; напримѣръ, при движеніи точки по цилиндрической поверхности съ круговымъ сѣченіемъ, перпендикулярнымъ къ оси, слѣдуетъ отдать предпочтеніе кругово-цилиндрической системѣ координатъ, ось которой совпадаетъ съ осью данной поверхности; движе-

ніе же точки по поверхности шара или по поверхности прямого кругового конуса удобнѣе разматривать въ сферическихъ координатахъ.

Примѣръ 25. Опредѣлимъ движеніе матерьяльной точки по боковой поверхности прямого круговаго конуса, предполагая, что къ ней не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ.

Возьмемъ вершину и ось конуса за полюсъ и за полярную ось сферической системы координатъ; пусть φ_0 есть уголъ между производящими и осью конической поверхности.

Нормалью къ поверхности будетъ служить координатная ось β; реакція $\mathfrak{R}$ будетъ направлена вдоль по β или по ея продолженію.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$r'' - r\sin^2\varphi_0 \, . \, (\psi')^2 = 0,$$

$$- r\sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \, . \, (\psi')^2 = \frac{\mathfrak{R}}{m},$$

$$\frac{1}{r\sin\varphi_0} \frac{d(r^2\sin^2\varphi_0 . \psi')}{dt} = 0.$$

(Проэкціи ускоренія на координатныя оси сферическихъ координатъ: см. стр. 255, формулы (203) кинематической части).

Третье изъ этихъ уравненій дастъ интегралъ:

$$r^2\psi' = C_1 = r_0 . \frac{v_0\cos(v_0\gamma)}{\sin\varphi_0},$$

второе служитъ для опредѣленія величины и знака реакціи:

$$\mathfrak{R} = -\frac{mC_1^2}{r^3}\sin\varphi_0\cos\varphi_0,$$

первымъ же мы не воспользуемся теперь вовсе, такъ какъ уже имѣемъ еще одинъ интегралъ:

$$v^2 = (r')^2 + r^2\sin^2\varphi_0(\psi')^2 = v_0^2.$$

Изъ этихъ первыхъ интеграловъ, слѣдуя обычному пріему, получимъ слѣдующее уравненіе траэкторіи:

$$r\cos(\psi\sin\varphi_0 + \Gamma_1) = \frac{C_1\sin\varphi_0}{v_0}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (321)$$

гдѣ Γ_1 — произвольная постоянная.

Если коническая поверхность будетъ развернута на плоскость, положеніе точекъ на которой будетъ выражено въ полярныхъ координатахъ:

$$\rho = r,\quad \theta = \psi \sin \varphi_0,$$

то геодезическая кривая (321) обратится въ прямую линію:

$$\rho \cos(\theta + \Gamma_1) = \frac{C_1 \sin \varphi_0}{v_0}.$$

Величина завитія *) геодезической линіи въ какой либо точкѣ ея можетъ быть выражена произведеніемъ изъ полуразности главныхъ кривизнъ поверхности въ этой точкѣ и синуса удвоеннаго угла, составляемаго плоскостью кривизны геодезической линіи съ плоскостью одного изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій; для вывода этой формулы, возьмемъ общее выраженіе завитія какой либо кривой, приведенное на стр. 260 кинематической части, (формулы (311) и (312)), и примѣнимъ его къ геодезической линіи, для которой:

$$\rho \frac{d^2x}{ds^2} = \cos(N,X);\quad \rho \frac{d^2y}{ds^2} = \cos(N,Y);\quad \rho \frac{d^2z}{ds^2} = \cos(N,Z).$$

Положимъ, что плоскость XY параллельна касательной плоскости къ поверхности въ той точкѣ, къ которой относится нашъ выводъ; тогда, въ этой точкѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\quad \cos(\rho, X) = 0,\quad \cos(\rho, Y) = 0,$$

$$\frac{dx_b}{ds} = 0,\quad \frac{dy_b}{ds} = 0;$$

(послѣднія два равенства слѣдуютъ изъ формулъ (313), стр. 261 кинематической части).

---

*) См. стр. 259 кинематической части.

Поэтому:

$$\frac{1}{l}=\frac{dzb}{ds}=\frac{dx}{ds}\,\frac{d\cos(N,Y)}{ds}-\frac{dy}{ds}\,\frac{d\cos(N,X)}{ds}=$$

$$=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}}\cos 2\varphi;$$

введя же сюда величины $\mathfrak{D}$ и φ_0, входящія въ формулы параграфа 36-го настоящей главы, получимъ:

$$\frac{1}{l}=-\frac{\mathfrak{D}}{2}\sin 2(\varphi-\varphi_0);\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad\textbf{(322)}$$

то есть, завитіе геодезической кривой, плоскость кривизны которой составляетъ уголъ $-(\varphi-\varphi_0)$ съ плоскостью нормальнаго сѣченія наименьшей кривизны, равняется:

$$-\frac{\mathfrak{K}_M-\mathfrak{K}_m}{2}\sin 2(\varphi-\varphi_0)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad\textbf{(322 bis)}$$

§ 43. Геодезическая кривизна кривой линіи, проведенной по поверхности.

По поверхности проведена какая либо кривая линія, плоскость кривизны которой въ точкѣ M составляетъ съ нормалью N, возстановленною къ поверхности изъ этой точки, нѣкоторый уголъ; пусть MT есть направленіе касательной линіи, проведенной къ кривой черезъ ту же точку M.

Проведемъ, черезъ ту же точку M, геодезическую линію, касательную къ MT, а слѣдовательно и къ данной кривой въ точкѣ M.

Вдоль по обѣимъ кривымъ отложимъ отъ точки M равныя дуги безконечно-малой длины ds; пусть MM_1 есть дуга данной кривой, а MM'— дуга геодезической кривой.

Черезъ точку M_1 проведемъ касательную къ данной кривой, а черезъ точку M'— касательную къ геодезической линіи; уголъ $d\eta$, заключающійся между направленіями этихъ касательныхъ, называется *геодезическимъ угломъ смежности* дуги MM_1.

При приближеніи точки M_1 къ точкѣ M, величина отношенія геодезическаго угла смежности къ длинѣ дуги MM_1 приближается къ предѣлу, называемому *геодезическою кривизною* кривой въ точкѣ M_1:

$$\text{геодезическая кривизна}=\frac{d\eta}{ds}.$$

Представимъ себѣ, что изъ какой либо точки O проведены три направленія: OT — параллельно касательной MT, OT_1 — параллельно касательной къ данной кривой въ точкѣ M_1, и OT'' — параллельно касательной къ геодезической линіи въ точкѣ M'; кромѣ того, представимъ себѣ сферу радіуса равнаго единицѣ, имѣющую центръ въ точкѣ O; на поверхности этой сферы образуется сферическій треугольникъ съ безконечно-малыми сторонами:

$$TT_1 = d\varepsilon = \frac{ds}{\rho}; \quad TT' = d\varepsilon_1 = \frac{ds}{\mathfrak{R}} = \frac{ds}{\rho}\cos(\rho N)$$

$$T_1T' = d\eta.$$

Изъ извѣстной формулы сферической тригонометріи:

$$\cos(T_1T') = \cos(TT_1)\cos(TT') + \sin(TT_1)\sin(TT')\cos(T_1TT'),$$

пренебрегая безконечно-малыми величинами порядка выше 2-го, получимъ.

$$1 - \frac{(d\eta)^2}{2} = 1 - \frac{(d\varepsilon)^2}{2} - \frac{(d\varepsilon_1)^2}{2} + d\varepsilon\, d\varepsilon_1 \cos(T_1TT');$$

а отсюда:

$$\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon_1}{ds}\right)^2 - 2\frac{d\varepsilon}{ds}\frac{d\varepsilon_1}{ds}\cos(\rho N),$$

такъ какъ уголъ (T_1TT') обращается, въ предѣлѣ, въ уголъ между плоскостями кривизнъ обѣихъ кривыхъ.

Далѣе, какъ легко видѣть, получимъ:

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{\sin(\rho N)}{\rho}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (323)$$

это значитъ, *что геодезическая кривизна кривой равняется кривизнѣ ея, помноженной на синусъ угла, составляемаго плоскостью кривизны кривой съ нормалью къ поверхности.*

Длина:

$$g = \frac{ds}{d\eta}$$

называется радіусомъ геодезической кривизны кривой въ точкѣ M; слѣдовательно:

$$\frac{\sin(\rho N)}{\rho} = \frac{1}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (324)$$

Кромѣ того, замѣтимъ, что между тремя радіусами кривизны: ρ, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{g}$ существуетъ слѣдующая зависимость:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\mathfrak{R}^2}+\frac{1}{\mathfrak{g}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (325)$$

§ 44. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи по данной удерживающей поверхности матерьяльной точки, подверженной заданнымъ силамъ.

Примѣръ 26-й. На боковой поверхности прямого круговаго конуса находится матерьяльная точка, притягиваемая къ оси конуса силою, пропорціональною разстоянію отъ нея; опредѣлить движеніе точки.

Воспользуемся сферическими координатами также, какъ и въ примѣрѣ 25-мъ.

Разстояніе точки до полярной оси выразится произведеніемъ изъ r на синусъ угла φ_0; очевидно, что потенціалъ данной притягивающей силы будетъ:

$$-m\frac{\mu^2}{2}r^2\sin^2\varphi_0,$$

гдѣ μ^2 есть постоянный коэффиціентъ.

По закону живой силы:

$$(r')^2+r^2\sin^2\varphi_0(\psi')^2=2h-\mu^2r^2\sin^2\varphi_0 \quad \ldots\ldots \quad (326)$$

Другой интегралъ, такой же, какъ въ примѣрѣ 25-мъ, получается изъ дифференціальнаго уравненія, выражающаго, что проэкція ускоренія на ось γ равна нулю; этотъ интегралъ:

$$r^2\sin^2\varphi_0 . \psi'=C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (327)$$

Такъ какъ проэкція силы на ось β равна отрицательно-взятой величинѣ ея, помноженной на $\cos\varphi_0$, то реакція по положительной оси β выразится слѣдующею формулою:

$$\mathfrak{N}=-mr\sin\varphi_0\cos\varphi_0((\psi')^2-\mu^2),$$

то есть слѣдующею функціею отъ r:

$$\mathfrak{N}=-m\cos\varphi_0\left(\frac{C_1^2}{(r\sin\varphi_0)^3}-\mu^2r\sin\varphi_0\right) \quad \ldots\ldots \quad (328)$$

Изъ интеграловъ (326) и (327), при помощи обычнаго пріема, получимъ уравненіе траэкторіи и опредѣлимъ движеніе точки по ней.

Слѣдуетъ замѣтить, что, если развернуть боковую поверхность конуса на плоскость, то точка на поверхности конуса, имѣющая сферическія координаты r, ψ, изобразится на плоскости точкою, имѣющею полярныя координаты r, $\theta = \psi \sin \varphi_0$; для того же, чтобы всякая неразрывная линія, находящаяся на поверхности конуса, изобразилась неразрывною же линіею на плоскости, необходимо представить себѣ, что боковая поверхность конуса состоитъ изъ безчисленнаго множества безконечно-тонкихъ слоевъ, составляющихъ цѣлую поверхность, навернутую на боковую поверхность конуса безчисленное число разъ.

Введя θ въ интегралы (326) и (327), приведемъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$(r')^2 + r^2(\theta')^2 = 2h - (\mu \sin \varphi_0)^2 r^2, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(329)}$$

$$r^2\theta' = \frac{C_1}{\sin \varphi_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(330)}$$

а это суть первые интегралы движенія на плоскости матерьяльной точки, подверженной притяженію:

$$(\mu \sin \varphi_0)^2 \cdot r = \mu^2 (r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$$

къ началу координатъ *).

Отсюда видно, что рѣшеніе данной задачи сводится на рѣшеніе другой задачи о движеніи матерьяльной точки той же массы на плоскости подъ вліяніемъ силы, направленной по радіусу вектору и равной проэкціи заданной силы на производящую конической поверхности.

Эту вторую точку мы назовемъ изображеніемъ данной. При рѣшеніи задачи о движеніи этого изображенія на плоскости, надо имѣть въ виду, что начальное положеніе его имѣетъ слѣдуюшія координаты: r_0 и $(\psi_0 \sin \varphi_0)$, гдѣ r_0 и ψ_0 суть начальныя координаты данной точки; кромѣ того, данная точка и ея изображеніе имѣютъ начальныя скорости одинаковой величины и составляющія одинаковые углы съ производящею.

Рѣшивъ задачу о движеніи изображенія на плоскости, можемъ перейти къ рѣшенію данной задачи, представивъ себѣ, что плоскость, съ движущимся по ней изображеніемъ, снова навернута на поверхность конуса;

---

*) Эта сила есть проэкція заданной силы на производящую конуса.

тогда изображеніе будетъ совершать на поверхности конуса то самое движеніе, которое совершаетъ данная точка.

Въ настоящемъ случаѣ изображеніе движется на плоскости по эллипсу, имѣющему центръ въ началѣ координатъ.

Примѣчаніе. Такимъ же образомъ могутъ быть рѣшены и многіе другіе вопросы о движеніи матерьяльной точки по развертываемой на плоскость линейчатой поверхности подъ вліяніемъ заданной силы, направленной вдоль по той производящей, на которой точка находится. Каждая такая задача сводится на задачу о движеніи изображенія точки по поверхности, развернутой на плоскость, и при дѣйствіи той же силы, направленной по той прямой линіи, которою производящая изобразится.

Предлагаемъ читателю рѣшить, напримѣръ, вопросъ о движеніи по данной конической поверхности матерьяльной точки, притягиваемой къ вершинѣ поверхности силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея.

Примѣръ 27-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по поверхности неподвижной сферы.

Возьмемъ полюсъ сферическихъ координатъ въ центрѣ сферы, полярную ось направимъ параллельно направленію силы тяжести.

Такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенціалъ mgz, поверхность же неподвижна, то движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2 = 2h + 2gz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (331)$$

или:

$$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (332)$$

Проэкція силы тяжести на координатную ось γ равна нулю; поэтому:

$$R^2 \sin^2\varphi \,.\, \frac{d\psi}{dt} = C = Rv_0 \sin\varphi_0 \cos(v_0\gamma); \ldots\ldots \quad (333)$$

(332) и (333) суть первые интегралы движенія.

Реакція, направленная по координатной оси α или противоположно ей, выразится формулою:

$$\frac{\mathfrak{N}}{m} = -g\cos\varphi - \frac{v^2}{R} = -\frac{(gz+v^2)}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (334)$$

Далѣе, для опредѣленія движенія точки, произведемъ слѣдующія дѣйствія:

Исключимъ ψ' изъ интеграла (331):

$$R^2(\varphi')^2 + R^2 \sin^2 \varphi(\psi')^2 = 2h + 2gz$$

и изъ интеграла (333): получимъ:

$$(R \sin \varphi \,.\, \varphi')^2 = \frac{2g}{R^2} U, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(335)}$$

гдѣ U есть слѣдующій многочленъ третьей степени отъ z:

$$U = \left(\frac{h}{g} + z\right)(R^2 - z^2) - \frac{C^2}{2g}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(336)}$$

а координата z равняется $R \cos \varphi$.

Изъ дифференціальнаго уравненія (335) видно, что координата z движущейся точки не можетъ сдѣлать многочленъ U отрицательнымъ, такъ какъ это противорѣчило бы знаку первой части этого уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что движущаяся точка не можетъ пройти ни черезъ нижнюю, ни черезъ верхнюю точку сферы, потому что въ нихъ $z^2 = R^2$ и многочленъ (336) получаетъ отрицательное значеніе.

При $z = z_0$ многочленъ получаетъ положительное значеніе, а именно:

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2g} R^2 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 (v_0 \gamma).$$

Изъ этого видно, что U должно имѣть одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между $z = -R$ и $z = z_0$ и одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между z_0 и $z = +R$; первый корень означимъ черезъ z_2 или $R \cos \alpha$, второй — чрезъ z_1 или $R \cos \beta$.

Многочленъ U получаетъ положительныя значенія для всякихъ z, заключающихся между предѣлами z_1 и z_2, а потому траэкторія движенія расположена между параллельными кругами: нижнимъ $\varphi_1 = \beta$ и верхнимъ $\varphi_2 = \alpha$ *).

Третій корень z_3 многочлена U имѣетъ величину отрицательную, меньшую $(-R)$; это видно изъ того, что при $z = -\infty$ многочленъ обращается въ $+\infty$, а при $z = -R$ получаетъ отрицательное значеніе.

Изъ двухъ параллельныхъ круговъ, служащихъ предѣлами траэкторіи,

---

*) При $\cos (v_0 \gamma) = 1$ можетъ быть три случая:

1) $z_0 = z_1$, 2) $z_0 = z_2$, 3) $z_1 = z_2 = z_0$.

верхній можетъ находиться на верхней или на нижней полусферѣ (т.-е. z_1 можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ), нижній же параллельный кругъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть на верхней полусферѣ, что сейчасъ докажемъ.

Между коэффиціентами многочлена U и корнями уравненія $U=0$ существуетъ зависимость, выражаемая тремя равенствами:

$$z_1+z_2+z_3=-\frac{h}{g}$$

$$z_1z_2+(z_1+z_2)z_3=-R^2$$

$$z_1z_2z_3=\frac{h}{g}R^2-\frac{C^2}{2g}.$$

Изъ втораго получимъ:

$$z_3=-\frac{z_1z_2+R^2}{z_1+z_2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (337)$$

исключивъ же изъ всѣхъ трехъ, какъ z_3, такъ и $\frac{h}{g}$, найдемъ слѣдующее равенство:

$$-\frac{(z_1z_2+R^2)^2}{z_1+z_2}+(z_1+z_2)R^2=-\frac{C^2}{2g},$$

или:

$$\frac{(R^2-z_1^2)(R^2-z_2^2)}{z_1+z_2}=\frac{R^4\sin^2\beta\sin^2\alpha}{z_1+z_2}=\frac{C^2}{2g} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (338)$$

Отсюда видно, что сумма (z_1+z_2) должна быть непремѣнно величиною положительною; а такъ какъ и разность (z_1-z_2) болѣе нуля, то z_1 не можетъ быть величиною отрицательною.

Такъ какъ z, находящееся въ уравненіи (335), должно быть не болѣе z_1 и не менѣе z_2, то выразимъ его слѣдующимъ образомъ:

$$z=z_1\cos^2\eta+z_2\sin^2\eta=z_1-(z_1-z_2)\sin^2\eta; \; . \; . \; . \quad (339)$$

тогда будутъ:

$$z-z_1=-(z_1-z_2)\sin^2\eta, \quad z-z_2=(z_1-z_2)\cos^2\eta,$$

$$z-z_3=\frac{R^2+2z_1z_2+z_1^2}{z_1+z_2}(1-k^2\sin^2\eta),$$

$$-R\sin\varphi d\varphi=dz=-2(z_1-z_2)\sin\eta\cos\eta d\eta, \; . \; . \; . \quad (340)$$

гдѣ:

$$k^2=\frac{z_1^2-z_2^2}{R^2+2z_1z_2+z_1^2};\dots\dots\dots\dots (341)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (335) получитъ такой видъ:

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2=\frac{g}{R}\left(\frac{R^2+2z_1z_2+z_1^2}{2R(z_1+z_2)}\right)(1-k^2\sin^2\eta),$$

откуда:

$$\frac{d\eta}{dt}=\pm\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}\sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{(R^2+2z_1z_2+z_1^2)}{2R(z_1+z_2)}}\dots (342)$$

Разность $(1-k^2\sin^2\eta)$ не можетъ обратиться въ нуль ни при какомъ дѣйствительномъ η, потому что, какъ сейчасъ покажемъ, k^2 менѣе единицы, если только корни z_1 и z_2 не равны.

Въ самомъ дѣлѣ, составивъ выраженіе для $(1-k^2)$:

$$1-k^2=\frac{R^2+2z_1z_2+z_2^2}{R^2+2z_1z_2+z_1^2}=\frac{R^2-z_1^2+(z_1+z_2)^2}{R^2-z_2^2+(z_1+z_2)^2}$$

и принявъ во вниманіе, что z_1^2 болѣе z_2^2, мы заключимъ, что k^2 менѣе единицы.

Такъ какъ вторая часть уравненія (342) не можетъ обратиться въ нуль, то производная η' не можетъ измѣнить своего знака ни разу во все время движенія; такъ что знакъ начальнаго значенія ея η'_0 опредѣляетъ знакъ корня второй части уравненія (342).

Начальное значеніе производной η' выражается формулою:

$$\eta_0'=\frac{-z_0'}{2(z_1-z_2)\sin\eta_0\cos\eta_0},$$

а начальная величина z_0 опредѣляетъ величину квадрата синуса η_0:

$$\sin^2\eta_0=\frac{z_1-z_0}{z_1-z_2};\dots\dots\dots\dots (343)$$

знаки же величинъ $\sin\eta_0$ и $\cos\eta_0$ предыдущими формулами не опредѣляются и могутъ быть выбраны по нашему произволу; если мы условимся, что:

$$\left.\begin{aligned}0>\eta_0>-\tfrac{\pi}{2}\text{ при } z_0'>0,\\ 0<\eta_0<\tfrac{\pi}{2}\text{ при } z_0'<0,\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots (344)$$

то η'_0 будетъ во всякомъ случаѣ болѣе нуля, а потому корню второй части уравненія (342) должны будемъ приписать знакъ положительный.

Слѣдовательно, при соблюденіи условій (344), уголъ η будетъ непрерывно возрастать вмѣстѣ съ временемъ по закону, выражаемому формулою:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{2B(z_1+z_2)}{R^2+2z_1z_2+z_1^2}} \Big(F(\eta, k) - F(\eta_0, k)\Big), \;.\;.\; (345)$$

гдѣ $F(\eta,k)$ означаетъ слѣдующій интегралъ:

$$F(\eta, k) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (346)$$

$F(\eta_0,k)$ — такой же интегралъ, имѣющій η_0 верхнимъ предѣломъ.

Интегралъ $F(\eta,k)$, называемый эллиптическимъ интеграломъ перваго рода, выражаетъ нѣкоторую трансцендентную функцію отъ η; намъ должно ознакомиться съ нѣкоторыми свойствами этого интеграла.

1) Во первыхъ, очевидно:

$$F(-\eta, k) = -F(\eta, k) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (347)$$

2) Во вторыхъ, замѣнивъ, подъ интеграломъ (346), η черезъ $(\zeta-\pi)$ получимъ слѣдующее равенство:

$$\int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}} = \int_\pi^{\eta+\pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}},$$

или:

$$F(\eta, k) = \int_0^{\eta+\pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}} - \int_0^{\pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}},$$

то есть:

$$F(\eta, k) = F(\eta+\pi, k) - F(\pi, k)$$

$$F(\eta+\pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (348)$$

3) Положивъ въ послѣдней формулѣ η равнымъ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и принявъ во вниманіе, что на основаніи формулы (347):

$$F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) = -F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{1}{2} F(\pi, k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (349)$$

4) Далѣе, изъ формулъ (348) и (349) найдемъ:

$$F\left(\frac{3\pi}{2}, k\right) = 3F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

и такъ далѣе; такъ что, если n есть цѣлое число, то:

$$F\left(\frac{n\pi}{2}, k\right) = nF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (350)$$

5) Пусть $\eta = n\pi + \lambda\pi$, гдѣ n есть цѣлое число, а λ — дробь, меньшая единицы; примѣняя n разъ формулу (348), найдемъ:

$$F(\eta, k) = F(\lambda\pi, k) + nF(\pi, k) \ldots\ldots\ldots \quad (351)$$

6) Наконецъ, положимъ въ формулѣ (348) $\eta = -\lambda\pi$, гдѣ λ — дробь, меньшая половины:

$$F(\pi - \lambda\pi, k) = F(-\lambda\pi, k) + F(\pi, k);$$

отсюда, на основаніи равенствъ (347) и (349), получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\lambda\pi, k) = F(\pi - \lambda\pi, k) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \ldots \quad (352)$$

Знаніе этихъ свойствъ интеграла (346) позволяетъ намъ вывести слѣдующія заключенія изъ равенствъ (346) и (339).

Назовемъ черезъ τ тотъ моментъ времени, въ который, при отрицательномъ η_0, уголъ η обращается въ нуль; при положительномъ η_0 моментъ τ будетъ отрицательнымъ.

Проэкція скорости движущейся точки на ось β будетъ обращаться въ нуль каждый разъ, какъ она приходитъ на одну изъ крайнихъ параллелей; это будетъ въ слѣдующіе моменты:

$$t = \tau,\ \tau + \frac{T}{2},\ \tau + T,\ \tau + \frac{3}{2}T,\ \tau + 2T,\ \tau + \frac{5}{2}T, \ldots.$$

гдѣ:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{2R(z_1 + z_2)}{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}}\, F\left(\frac{\pi}{2}, k\right);$$

въ эти моменты уголъ φ получаетъ слѣдующія значенія:

$$\varphi=\beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \ldots\ldots$$

такъ что переходъ точки отъ нижняго круга къ верхнему совершается всегда въ теченіи промежутка времени $\frac{T}{2}$ и такое же время требуется для обратнаго движенія.

Пусть η_1 есть нѣкоторый уголъ, меньшій $\frac{\pi}{2}$, которому соотвѣтствуетъ уголъ φ_1, опредѣляемый по формулѣ:

$$\cos\varphi_1=\cos\beta-(\cos\beta-\cos\alpha)\sin^2\eta_1;\ldots\ldots, \quad \textbf{(353)}$$

наконецъ, пусть t_1 есть соотвѣтствующій моментъ времени. (Этотъ моментъ заключается въ промежуткѣ между моментами τ и $\tau+\frac{T}{2}$).

Въ дальнѣйшемъ своемъ движеніи матерьяльная точка поднимется до параллели α, гдѣ будетъ въ моментъ $\left(\tau+\frac{T}{2}\right)$, затѣмъ начнетъ опускаться и снова придетъ на параллель φ_1 въ тотъ моментъ t_2, въ который η возрастетъ до величины $\eta_2=(\pi-\eta_1)$, такъ какъ тогда будетъ: $\sin\eta_2=\sin\eta_1$; на основаніи свойства (352) интеграла F мы заключимъ, что:

$$\left(\tau+\frac{T}{2}\right)-t_1=t_2-\left(\tau+\frac{T}{2}\right),$$

то есть, что поднятіе точки отъ параллели φ_1 до параллели α и обратное нисхожденіе ея отъ α до φ_1 совершаются въ теченіи равныхъ промежутковъ времени.

Затѣмъ точка, коснувшись нижней параллели $\varphi=\beta$, снова начнетъ подыматься и снова достигнетъ параллели φ_1 въ такой моментъ t_3, въ который η возрастетъ до величины $\eta_3=\pi+\eta_1$, потому что тогда тоже $\sin\eta_3=\sin\eta_1$; изъ равенства (348) заключимъ, что:

$$t_3-t_1=T.$$

Чтобы опредѣлить законъ измѣненія угла ψ, возьмемъ дифференціальное уравненіе (333) и подставимъ въ него вмѣсто C его выраженіе (338); получимъ:

$$\frac{d\psi}{dt}=\pm\frac{R^2\sqrt{2g}\sin\beta\sin\alpha}{(R^2-z^2)\sqrt{z_1+z_2}},\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(354)}$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ $\cos(v_0\gamma)$ болѣе нуля, нижній — тѣмъ, въ которыхъ этотъ косинусъ менѣе нуля.

Исключивъ dt изъ (342) и (354), будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\psi = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \left(\frac{2Rd\eta}{(R^2 - z^2)\Delta\eta} \right) \ldots\ldots (355)$$

гдѣ, для краткости, принято временно обозначеніе:

$$\Delta\eta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\eta};$$

(этотъ знакъ не слѣдуетъ смѣшивать съ такимъ же знакомъ, служившимъ намъ для обозначенія величины, встрѣчавшейся въ предыдущихъ параграфахъ).

Въ полученномъ дифференціальномъ уравненіи (355) произведемъ слѣдующее разложеніе:

$$\frac{2R}{R^2 - z^2} = \frac{1}{R+z} + \frac{1}{R-z}, \ldots\ldots\ldots (355\text{ bis})$$

затѣмъ выразимъ z въ η по формулѣ (339) и наконецъ произведемъ интегрированіе въ предѣлахъ отъ $\eta = 0$ до η; получимъ:

$$\psi - \Psi = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \left[\frac{1}{(R+z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_1 \sin^2\eta)\Delta\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(R-z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_2 \sin^2\eta)\Delta\eta} \right], \ldots\ldots\ldots (356)$$

гдѣ:

$$n_1 = -\frac{z_1 - z_2}{R + z_1}, \quad n_2 = \frac{z_1 - z_2}{R - z_1},$$

а Ψ есть координата той меридіональной плоскости, въ которой движущаяся точка заключается въ моментъ τ.

Входящіе въ это выраженіе интегралы, называемые эллиптическими интегралами третьяго рода, обладаютъ, подобно интегралу F, свойствами, выражаемыми формулами:

$$L(-\eta) = -L(\eta); \quad L(\eta + \pi) = L(\eta) + L(\pi), \quad L(\pi) = 2L\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ L означаетъ такой интегралъ третьяго рода.

На основанін этихъ свойствъ, можемъ вывести изъ предыдущихъ уравненій слѣдующее заключеніе относительно закона измѣненія угла ψ.

Во время каждаго перехода точки отъ одной изъ крайнихъ параллелей до другой, уголъ ψ возрастаетъ на одну и ту же величину ω, выражаемую опредѣленнымъ интеграломъ:

$$\omega = \pm \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{(R^2 - z^2)\Delta\eta} \ldots\ldots \quad (357)$$

Можно показать, что абсолютная величина угла ω болѣе прямаго угла.

Для того, чтобы доказать это, мы примемъ во вниманіе, что:

$$\frac{2R}{R^2 \sin^2\varphi} \cdot \frac{1}{\Delta\eta} > \frac{2R}{R^2 \sin^2\varphi},$$

такъ какъ $\Delta\eta$ менѣе единицы; поэтому:

$$+\sqrt{\omega^2} > \frac{R^2 \sin\beta \sin\alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - z^2};$$

примѣнивъ, къ подъинтегральной функціи этого интеграла, разложеніе (355 bis) и выразивъ z функціею отъ η по формулѣ (339), мы легко опредѣлимъ величину каждаго изъ получившихся интеграловъ и найдемъ слѣдующее:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - z^2} = \frac{\pi}{R} \frac{\cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)}{\sin\alpha \cos\beta},$$

поэтому:

$$+\sqrt{\omega^2} > \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2R^2 + 2z_1 z_2 + 2R^2 \sin\alpha \sin\beta}{2R^2 + 2z_1 z_2 - R^2 \sin^2\beta}};$$

но этотъ корень, очевидно, болѣе единицы, такъ какъ $(+2\sin\alpha)$ болѣе, чѣмъ $(-\sin\beta)$, а потому и подавно абсолютная величина угла ω болѣе, чѣмъ $\frac{\pi}{2}$.

На чертежѣ 19-мъ представлена проэкція на горизонтальную плоскость траэкторіи, описываемой точкою въ одномъ изъ такихъ движеній; наружный и внутренній круги суть проэкціи предѣльныхъ параллелей; углы a_1Ob_1, b_1Oa_2, a_2Ob_2, . . . равны ω.

Реакція $\mathfrak{R}$ по координатной оси a (т.-е. по продолженію радіуса вектора) выразится функціею одного z, если v^2, заключающееся въ формулѣ (334), будетъ исключено изъ нея при помощи выраженія (331); тогда получимъ:

$$\mathfrak{R}=-m\frac{(3gz+2h)}{R}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (358)$$

Обратимъ вниманіе на слѣдующіе случаи движенія точки.

Если корни z_1 и z_2 равны другъ другу, то многочленъ U можетъ быть представленъ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$U=-(z-z_1)^2\frac{(R^2-z^2+(z+z_1)^2)}{2z_1},$$

а такъ какъ z_1 болѣе нуля, то при всякихъ z, относящихся къ точкамъ поверхности сферы, многочленъ U получаетъ отрицательныя значенія; исключеніе составляютъ лишь точки параллельнаго круга $z=z_1$, для которыхъ U обращается въ нуль.

Такъ какъ изъ уравненія (335) слѣдуетъ, что тогда (при $z=z_1$) производная φ' равна нулю, то точка будетъ двигаться по параллельному кругу и уголъ φ будетъ постоянно равенъ своей начальной величинѣ $\varphi_0 (z_1=R\cos\varphi_0)$.

Изъ выраженія (338) слѣдуетъ тогда:

$$C^2=gR^3\frac{\sin^4\varphi_0}{\cos\varphi_0},$$

съ другой же стороны, такъ какъ начальная скорость должна быть касательною къ кругу параллели $\varphi=\varphi_0$, изъ выраженія (333) получимъ

$$C^2=v_0^2R^2\sin^2\varphi_0;$$

изъ сравненія этихъ выраженій найдемъ, что квадратъ начальной скорости долженъ имѣть слѣдующую величину:

$$v_0^2=gR\frac{\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0};$$

эта скорость остается постоянною во все время движенія.

Движеніе по углу ψ опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{C}{R^2\sin^2\varphi_0}=\sqrt{\frac{g}{R\cos\varphi_0}};$$

слѣдовательно, движеніе равномѣрно и продолжительность одного полнаго оборота по окружности равна:

$$2\pi\sqrt{\frac{R\cos\varphi_0}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (359)$$

§ 15. Реакція неудерживающей поверхности. Мѣсто схода движущейся точки съ такой поверхности.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена какъ по положительной, такъ и по отрицательной нормали.

Реакція направлена по положительной нормали тогда, когда:

$$F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}<0; \ldots\ldots\ldots (360)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по отрицательную сторону ея; а точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F, такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы слѣдующему неравенству:

$$\Delta f\,.\,\dot{v}\cos(\dot{v},N)+Kf<0,$$

то есть:

$$\frac{d^2f}{dt^2}<0.$$

Реакція направлена по отрицательной нормали тогда, когда:

$$F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}>0; \ldots\ldots\ldots\ldots (361)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по положительную сторону ея; точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F, такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы неравенству:

$$\Delta f\,.\,\dot{v}\cos(\dot{v},N)+Kf>0,$$

то есть:

$$\frac{d^2f}{dt^2}>0,$$

Неудерживающая поверхность не оказываетъ никакого противодѣйствія причинамъ, побуждающимъ точку сойти съ поверхности по положительную сторону ея; а потому, если скорость точки, находящейся на поверхности, удовлетворяетъ равенству (258) (§ 38), а задаваемыя силы — неравенству (361), то реакція будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, *неудерживающая поверхность не оказываетъ реакціи, направленной по отрицательной нормали; реакція ея можетъ быть направлена только по положительной нормали.*

Если скорость точки удовлетворяетъ равенству (258), а задаваемыя силы — неравенству (360), то неудерживающая поверхность оказываетъ реакцію по положительной нормали, противодѣйствуя точкѣ сойти внутрь непроницаемаго тѣла (дѣйствительнаго или воображаемаго), ограниченнаго этою поверхностью; величина реакціи, выражаемая формулою:

$$\mathfrak{R}=-F\cos(F,N)-m\frac{Kf}{\Delta f}, \quad \ldots\ldots\ldots (312)$$

такова, что ускореніе точки, сообщаемое ей равнодѣйствующею силы F и реакціи $\mathfrak{R}$, удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=0.$$

Точка движется по неудерживающей поверхности до тѣхъ поръ, пока задаваемыя силы удовлетворяютъ неравенству (360); въ той точкѣ A поверхности, въ которой скорость точки и задаваемыя силы удовлетворятъ равенству:

$$F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}=0,$$

реакція обращается въ нуль.

Если, при дальнѣйшемъ движеніи точки по поверхности, сумма

$$F\cos(F,N)+m\frac{Kf}{\Delta f}$$

становится положительною, то движеніе точки по поверхности возможно только при существованіи реакціи, направленной по отрицательной нормали; но такой реакціи неудерживающая поверхность оказать не можетъ, а потому *точка должна сойти съ поверхности.*

Она сходитъ съ поверхности въ точкѣ A и движется далѣе свободно внѣ поверхности подъ вліяніемъ приложенныхъ къ ней заданныхъ силъ; начальною скоростью на этомъ свободномъ движеніи матерьяльной точки служитъ та скорость, съ которою она пришла въ точку A.

Такое движеніе продолжается до встрѣчи точки съ поверхностью.

Положимъ, что сфера, по которой движется тяжелая матерьяльная точка (примѣръ 27-й), не удерживаетъ точку отъ перемѣщеній внутрь ея полости; по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го, положительная нормаль въ этомъ случаѣ должна быть направлена къ центру сферы, то есть противоположно направленію положительной координатной оси α; въ примѣрѣ 27-мъ мы получили выраженіе (334) для реакціи по этой оси, поэтому реакція $\mathfrak{R}_N$ по положительной нормали къ сферѣ:

$$R^2-(x^2+y^2+z^2)=0$$

выразится слѣдующею формулою:

$$\mathfrak{R}_N=\frac{m}{R}(v^2+gz)\ldots\ldots\ldots\ldots\ (362)$$

Изъ этой формулы видно, что движущаяся точка можетъ сойти съ поверхности сферы только въ тѣхъ точкахъ ея, въ которыхъ сумма (v^2+gz) обращается въ нуль, и послѣ того становится отрицательною.

Поэтому, если $z_2>0$, такъ что все движеніе точки совершается по нижней полусферѣ, то точка не оставитъ сферы.

Если же $z_2<0$ и притомъ сумма $(v_2^2+gz_2)$ тоже менѣе нуля, то движущаяся точка должна будетъ оставить поверхность, еще не дойдя до этой верхней параллели.

§ 46. Тренie матерьяльной точки о поверхность.

При движенiи одного тѣла по другому, будетъ ли это скольженie или катанie, является сопротивленie движенiю, называемое тренiемъ.

Свѣдѣнiя наши о законахъ тренiя почерпнуты изъ наблюденiй.

Разсматривая матерьяльную точку, находящуюся на данной поверхности, какъ неизмѣримо-малое тѣло, а поверхность — какъ поверхность реальнаго тѣла, и примѣняя къ нимъ законы тренiя, найденныя изъ наблюденiй, можемъ высказать эти законы въ слѣдующемъ видѣ.

1) Тренie есть сопротивленie движенiю матерьяльной точки по поверхности, приложенное къ точкѣ и направленное противоположно относительной скорости точки по отношенiю къ поверхности.

2) Тренie можетъ дѣйствовать и на точку, покоющуюся на поверхности, если проэкцiя на касательную плоскость равнодѣйствующей всѣхъ прочихъ задаваемыхъ силъ не равна нулю; тогда тренie противоположно этой проэкцiи.

3) Величина тренiя, приложеннаго къ движущейся точкѣ, пропорцiональна абсолютной величинѣ нормальной реакцiи

$$\mathfrak{T}=k\sqrt{\mathfrak{N}^2}=k\Delta f.\sqrt{\lambda^2},\ldots\ldots\ldots\ldots (363)$$

гдѣ квадратные корни предполагаются положительными.

Коэффицiентъ k есть отвлеченное число, величина котораго зависитъ отъ физической природы трущихся тѣлъ.

4) Величина тренiя, приложеннаго къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ относительномъ покоѣ по отношенiю къ данной поверхности, выражается тою же формулою (363), но численный коэффицiентъ можетъ принимать всякiя величины, отъ нуля до нѣкотораго числа k_1, большаго k; такъ что тренie между взаимно-покоющимися тѣлами можетъ достигать бóльшей величины, чѣмъ тренie между тѣми же тѣлами, находящимися въ относительномъ движенiи.

Предположивъ существованie тренiя, опредѣляемаго этими выведенными изъ опыта законами, можемъ составить слѣдующiя диффе-

ренціальныя уравненія (365) движенія матерьяльной точки, находящейся на неподвижной поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z)=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(364)}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}-k\sqrt{\lambda^2}\cdot\frac{\Delta f}{v}\frac{dx}{dt}\ldots\ldots\ldots \mathbf{(365, a)}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}-k\sqrt{\lambda^2}\cdot\frac{\Delta f}{v}\frac{dy}{dt}\ldots\ldots\ldots \mathbf{(365, b)}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}-k\sqrt{\lambda^2}\cdot\frac{\Delta f}{v}\frac{dz}{dt}, \ldots\ldots\ldots \mathbf{(365, c)}$$

гдѣ X, Y, Z суть проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей изъ приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ задаваемыхъ силъ.

Нормальная реакція выразится здѣсь тою же самою формулою (317) *), какъ и для точки, неподверженной тренію; чтобы получить эту формулу изъ дифференціальныхъ уравненій, помножимъ каждое на ту частную производную отъ f, которая заключается во второмъ членѣ второй части этого уравненія, по сложеніи, воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

и (279); тогда получимъ:

$$-mf_2(x', y', z')=X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda(\Delta f)^2,$$

откуда слѣдуетъ такое выраженіе для реакціи по положительной нормали (въ случаѣ поверхности неподвижной):

$$\mathfrak{R}=\lambda\Delta f=-\frac{X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+mf_2(x', y', z')}{\Delta f}\ldots\ldots \mathbf{(366)}$$

Если поверхность находится въ движеніи, или деформируется,

---

*) Примѣненною къ неподвижной поверхности.

то треніе будетъ противоположно относительной скорости матерьяльной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность; поэтому тогда въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (365), вмѣсто отношеній:

$$\frac{x'}{v},\ \frac{y'}{v},\ \frac{z'}{v},$$

должны входить косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ относительной скорости съ неподвижными осями координатъ.

Примѣръ 28. По наклонной неподвижной плоскости движется тяжелая матерьяльная точка; опредѣлить движеніе, принимая въ разсчетъ треніе между точкою и плоскостью.

Пусть J есть уголъ наклоненія плоскости къ горизонту; расположимъ оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ въ наклонной плоскости, ось $X^{овъ}$—горизонтально, положительную ось $Y^{овъ}$ по линіи наибольшаго ската внизъ, положительную ось $Z^{овъ}$ направимъ перпендикулярно къ наклонной плоскости и притомъ вверхъ.

Здѣсь:

$$X=0,\ Y=mg\sin J,\ Z=-mg\cos J,$$

а уравненіе поверхности есть: $z=0$; поэтому формула (366) дастъ слѣдующую величину для реакціи по положительной оси $Z^{овъ}$:

$$\mathfrak{R}=\lambda=mg\cos J.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ слѣдующія:

$$x''=-\frac{kg\cos J}{v}x',\ y''=g\sin J-\frac{kg\cos J}{v}y';$$

они тождественны съ дифференціальными уравненіями движенія свободной тяжелой матерьяльной точки въ вертикальной плоскости, если ускореніе силы тяжести равно $g\sin J$ и если движеніе происходитъ въ средѣ, оказывающей сопротивленіе постоянной величины $mkg\cos J$. Рѣшеніе такой задачи приведено на страницахъ 143—144 этой книги; примѣняя это рѣшеніе къ нашему примѣру, надо замѣнить: g—черезъ $g\sin J$, а k—черезъ $k\operatorname{cotg} J$.

§ 47. Дифференціальныя уравненія, получающіяся чрезъ проэктированіе силъ и ускоренія на направленіе скорости, на нормаль къ поверхности и на бинормаль нормальнаго сѣченія.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ о движеніи точки по неподвижной поверхности оказывается полезною слѣдующая форма дифференціальныхъ уравненій:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(F,v)-k\sqrt{\mathfrak{R}^2}\ldots\ldots\ldots \textbf{(367, a)}$$

$$\pm m\frac{v^2}{\mathfrak{g}}=F\cos(F,B)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(367, b)}$$

$$mv^2\mathfrak{K}=F\cos(F,N)+\mathfrak{R};\ldots\ldots\ldots \textbf{(367, c)}$$

гдѣ N означаетъ направленіе положительной нормали, $\mathfrak{R}$ — реакцію по этой нормали, B — направленіе, перпендикулярное къ v и N, и имѣющее то же самое положеніе по отношенію къ направленіямъ v и N, какое имѣетъ положительная ось $Y_{ов}$ по отношенію къ положительнымъ осямъ $X_{ов}$ (v) и $Z_{ов}$ (N); $\mathfrak{K}$ есть кривизна нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости v; отношеніе $(1:\mathfrak{g})$ есть геодезическая кривизна траэкторіи.

Дифференціальныя уравненія (367) получаются изъ равенствъ, выражающихъ, что проэкція ускоренія движущейся точки на каждое изъ направленій v, B, N равняется, дѣленной на массу точки, проэкціи на то же направленіе равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ; изъ числа этихъ силъ, реакція направлена по N (или противоположно), а треніе — противоположно скорости. Въ самомъ дѣлѣ, проэкціи ускоренія на эти направленія выразятся такъ:

$$\dot{v}\cos(\dot{v},v)=\frac{dv}{dt},\quad \dot{v}\cos(\dot{v},B)=\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,B)$$

$$\dot{v}\cos(\dot{v},N)=\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,N),$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траэкторіи.

Но намъ извѣстно, что:

$$\frac{\cos(\rho,N)}{\rho}=\mathfrak{K}\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(294 bis)}$$

(см. § 36 формулы (293) и (294)).

Далѣе, $\cos(\rho,B) = \pm \sin(\rho,N)$; гдѣ верхній знакъ долженъ быть въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе ρ составляетъ съ направленіемъ B острый уголъ; намъ же извѣстно (§ 43), что:

$$\frac{\sin(\rho,N)}{\rho} = \frac{1}{\mathfrak{g}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (324)$$

а потому:

$$\dot{v}\cos(\dot{v},B) = \pm\frac{v^2}{\mathfrak{g}};\quad \dot{v}\cos(\dot{v},N) = v^2\mathfrak{K}.$$

Примѣчаніе: Исключивъ величину ρ изъ равенствъ (294 bis) и (324), получимъ слѣдующее выраженіе геодезической кривизны:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{K}\,\mathrm{tg}(\rho,N), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (368)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (367, b) можно писать и такъ:

$$\pm mv^2\mathfrak{K}\,\mathrm{tg}(\rho,N) = F\cos(F,B) \ldots\ldots \quad (367, \mathrm{b}, \mathrm{bis})$$

Этими уравненіями воспользуемся въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 29. Движеніе матерьяльной точки по какой либо неподвижной поверхности, предполагая, что, за исключеніемъ нормальной реакціи и тренія, никакихъ другихъ силъ не приложено къ точкѣ.

Въ этомъ случаѣ $F=0$, а потому изъ уравненія (367, b, bis) будетъ слѣдовать:

$$\mathrm{tg}(\rho,N) = 0,$$

то есть, что плоскость кривизны траэкторіи проходитъ черезъ нормаль; значитъ траэкторія есть геодезическая линія.

Уравненіе (367, c) получитъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{N} = mv^2\mathfrak{K} = \pm\frac{mv^2}{\mathfrak{R}},$$

а поэтому уравненіе (367, a) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dv}{dt} = -k\frac{v^2}{\mathfrak{R}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (369)$$

гдѣ $\mathfrak{R}$ есть величина радіуса кривизны нормальнаго сѣченія.

Если v разсматривать, какъ функцію отъ s, то уравненіе (369) представится такъ:

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = -2k\frac{v^2}{2\mathfrak{R}};$$

въ такомъ видѣ оно можетъ быть интегрируемо по s; получимъ:

$$v^2 = v_0^2 e^{f(s)}; \quad f(s) = -2k \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\mathfrak{R}} \ldots \ldots \ldots \quad (370)$$

Изъ этого выраженія видно, что скорость точки непрерывно уменьшается, приближаясь къ нулю ассимптотически; уменьшеніе это тѣмъ быстрѣе, чѣмъ болѣе коэффиціентъ тренія и чѣмъ болѣе кривизна геодезической линіи.

§ 48. При изложеніи механики отдѣльной несвободной точки, приходится принимать въ разсчетъ силовое дѣйствіе преграды на эту точку, состоящее изъ нормальной реакціи и тренія, приложенныхъ къ точкѣ; притомъ мы задаемъ себѣ движеніе, или кинематическое состояніе поверхности, образующей преграду, не принимая во вниманіе того, что матерьяльная точка оказываетъ, въ свою очередь, нѣкоторое силовое дѣйствіе на тѣла, образующія преграду.

Если, по характеру вопроса, окажется необходимымъ принять въ разсчетъ это дѣйствіе, то мы встрѣтимся съ однимъ изъ вопросовъ, относящихся къ механикѣ системы точекъ, потому что намъ придется тогда разсматривать преграду не какъ кинематическое условіе, но какъ систему движущихся матерьяльныхъ тѣлъ, или, по крайней мѣрѣ, какъ систему матерьяльныхъ точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что только при изложеніи механики системы точекъ представится настоятельная необходимость установить понятіе о силовомъ дѣйствіи матерьяльной точки на преграду; но мы сдѣлаемъ это теперь.

На время предположимъ, что матерьяльная точка m есть тѣло неизмѣримо-малыхъ размѣровъ.

При дѣйствіи преграды на точку m, одно изъ тѣлъ, образующихъ преграду, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ точкою m; напримѣръ, если преграда образуется поверхностью непроницаемаго тѣла, то матерьяльная точка m, когда она несвободна, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ этимъ тѣломъ, или, если матерьяльная точка находится на одномъ концѣ твердаго стержня, а другой конецъ его находится въ неподвижной

точкѣ, вокругъ которой стержень можетъ вращаться, то матерьяльная точка находится въ непосредственномъ прикосновенiи съ концомъ стержня. То тѣло преграды, которое находится въ непосредственномъ прикосновенiи съ несвободною матерьяльною точкою, назовемъ тѣломъ B.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть та точка преграждающей поверхности, въ которой матерьяльная точка m къ ней прикасается; эта точка $\mathfrak{M}$ принадлежитъ тѣлу B.

Относительно силоваго дѣйствiя точки m на преграду, въ аналитической механикѣ дѣлается предположенiе, что это дѣйствiе есть сила, приложенная къ точкѣ $\mathfrak{M}$ тѣла B и направленная противоположно дѣйствiю преграды на точку m.

Такимъ образомъ, взаимнодѣйствiя между преградою и точкою m разсматриваются, какъ противоположныя взаимнодѣйствiя между точкою m и точкою $\mathfrak{M}$ тѣла B; въ силу основнаго начала C (стр. 19) они суть силы равныя *).

Опредѣляя же матерьяльную точку, какъ массу, сосредоточенную въ геометрической подвижной точкѣ, мы должны будемъ придать слѣдующую форму опредѣленiю понятiя о силовомъ дѣйствiи точки m на преграду.

§ 49. Дѣйствiе матерьяльной точки на преграду. Давленiе точки на поверхность.

Опредѣленiе. Дѣйствiе матерьяльной точки m на преграду есть сила, приложенная къ той точкѣ $\mathfrak{M}$ преграждающей поверхности, съ которою m совпадаетъ; предполагается, что точка $\mathfrak{M}$

---

*) Съ точки зрѣнiя молекулярной физики, взаимнодѣйствiе между двумя тѣлами A и B (черт. 20), являющееся при ихъ прикосновенiи, есть результатъ молекулярныхъ взаимнодѣйствiй между каждою такою частицею a тѣла A и каждою такою частицею b тѣла B, разстоянiе между которыми не болѣе радiуса дѣйствiя частичныхъ силъ. Вслѣдствiе крайней малости этого радiуса, взаимнодѣйствiе между тѣлами, прикасающимися въ одной точкѣ K, приводится къ взаимнодѣйствiю между весьма малыми частями α и β этихъ тѣлъ. Кромѣ того, такъ какъ молекулярныя силы взаимнодѣйствiя между каждою парою частицъ предполагаются равными и прямо противоположными, то и взаимнодѣйствiя между α и β оказываются равными и прямо противоположными.

есть вмѣстѣ съ тѣмъ одна изъ точекъ одного изъ тѣлъ, образующихъ преграду.

Сила, приложенная къ точкѣ $\mathfrak{M}$, состоитъ: изъ давленія точки m на поверхность, равнаго и противоположнаго реакціи по нормали, и изъ силы тренія, равной и противоположной силѣ тренія, приложенной къ точкѣ m.

Реакція неудерживающей поверхности можетъ быть направлена только по положительной нормали (§ 45), поэтому давленіе матерьяльной точки на такую поверхность можетъ быть направлено только по отрицательной нормали.

Полная величина силы дѣйствія матерьяльной точки на поверхность равна:

$$D=\sqrt{\mathfrak{N}^2+\varkappa^2\mathfrak{N}^2}=\mathfrak{N}\sqrt{1+\varkappa^2};\ldots\ldots\ldots \quad (371)$$

направленіе ея составляетъ съ нормалью уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\varkappa$. Величина $\varkappa$ равняется коэфиціенту тренія k, если точка движется по поверхности; если же точка покоится на поверхности, то $\varkappa$ можетъ получать величины, заключающіяся въ предѣлахъ отъ нуля до k_1 (§ 46).

§ 50. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, свобода движенія которой ограничена двумя пересѣкающимися поверхностями.

Если обѣ поверхности — удерживающія, то матерьяльная точка можетъ имѣть движеніе только по линіи пересѣченія поверхностей, а, слѣдовательно, скорость точки будетъ направлена по касательной къ этой кривой линіи.

Пусть:

$$f_1(x, y, z, t)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (372)$$

$$f_2(x, y, z, t)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (373)$$

суть уравненія поверхностей; положимъ, что нѣтъ тренія между матерьяльною точкою и поверхностями и что X, Y, Z суть проэкціи

на оси координатъ равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Кромѣ задаваемыхъ силъ, къ матерьяльной точкѣ приложены еще нормальныя реакціи обѣихъ поверхностей.

Проэкціи на оси координатъ реакціи первой поверхности суть:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x},\ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y},\ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z};$$

проэкціи реакціи второй поверхности равны:

$$\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x},\ \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y},\ \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой матерьяльной точки будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (374)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), вслѣдствіе чего получится одно дифференціальное уравненіе, не заключающее этихъ множителей; полученное уравненіе надо интегрировать, принимая во вниманіе, что x, y, z и t связаны уравненіями (372) и (373). Постоянныя произвольныя опредѣлятся по начальному положенію точки и по начальной скорости ея.

Для опредѣленія величинъ реакцій поверхностей, составимъ, изъ дифференціальныхъ уравненій (374), слѣдующія два уравненія:

$$\lambda_1(\Delta f_1)^2 + \lambda_2 \Delta f_1 \Delta f_2 \cos(N_1, N_2) = m\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x'' + \frac{\partial f_1}{\partial y}y'' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z''\right) - \\ - \left(X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right), \dots (375)$$

$$\lambda_1 \Delta f_1 . \Delta f_2 \cos(N_1, N_2) + \lambda_2(\Delta f_2)^2 = m\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x'' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y'' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z''\right) - \\ - \left(X\frac{\partial f_2}{\partial x} + Y\frac{\partial f_2}{\partial y} + Z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \dots\dots (376)$$

Видъ вторыхъ частей этихъ уравненій показываетъ, какимъ образомъ они получились изъ уравненій (374); N_1 и N_2 означаютъ направленія положительныхъ нормалей къ поверхностямъ (372) и (373).

Члены, заключающіе ускореніе, могутъ быть исключены изъ уравненій (375) и (376), если принять во вниманіе, что ускореніе точки должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2}=0,\ \frac{d^2 f_2}{dt^2}=0,$$

то есть равенствамъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}x''+\frac{\partial f_1}{\partial y}y''+\frac{\partial f_1}{\partial z}z''+Kf_1=0 \ldots\ldots\ldots (377)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}x''+\frac{\partial f_2}{\partial y}y''+\frac{\partial f_2}{\partial z}z''+Kf_2=0; \ldots\ldots\ldots (378)$$

вслѣдствіе этого, уравненія (375) и (376) получатъ такой видъ:

$$\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2\cos(N_1,N_2)=-\frac{\left(mKf_1+X\frac{\partial f_1}{\partial x}+Y\frac{\partial f_1}{\partial y}+Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)}{\Delta f_1}. \quad (379,\ a)$$

$$\mathfrak{R}_1\cos(N_1,N_2)+\mathfrak{R}_2=-\frac{\left(mKf_2+X\frac{\partial f_2}{\partial x}+Y\frac{\partial f_2}{\partial y}+Z\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)}{\Delta f_2}, \quad (379,\ b)$$

гдѣ:

$$\mathfrak{R}_1=\lambda_1\Delta f_1,\ \mathfrak{R}_2=\lambda_2\Delta f_2.$$

Если первая поверхность есть неудерживающая, то матерьяльная точка не оставляетъ ее, пока реакція $\mathfrak{R}_1$ имѣетъ величину положительную (т.-е. направлена по положительной нормали N_1); въ той точкѣ кривой линіи, въ которой реакція $\mathfrak{R}_1$ обращается въ нуль, а при дальнѣйшемъ движеніи по кривой должна была бы стать отрицательною, въ такой точкѣ кривой линіи матерьяльная точка оставляетъ первую поверхность и кривую линію, не сходя со второй поверхности; при дальнѣйшемъ движеніи матерьяльной точки, λ_1 равно нулю.

Если обѣ поверхности неудерживающія, то матерьяльная точка можетъ оставить и ту и другую.

§ 51. Законъ живой силы для матерьяльной точки, движущейся по кривой линіи.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (374) составимъ уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt}=Xx'+Yy'+Zz'+\lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x'+\frac{\partial f_1}{\partial y}y'+\frac{\partial f_1}{\partial z}z'\right)+$$
$$+\lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x'+\frac{\partial f_2}{\partial y}y'+\frac{\partial f_2}{\partial z}z'\right).$$

Если кривая неподвижна, то есть, если уравненія (372) и (373) не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то тогда условія:

$$\frac{df_1}{dt}=0 \quad \frac{df_2}{dt}=0$$

выразятся такъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}x'+\frac{\partial f_1}{\partial y}y'+\frac{\partial f_1}{\partial z}z'=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial x}x'+\frac{\partial f_2}{\partial y}y'+\frac{\partial f_2}{\partial z}z'=0,$$

и тогда первое уравненіе настоящаго параграфа получитъ видъ уравненія (111) параграфа 21-го.

Разсуждая далѣе такъ же, какъ въ § 26, придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линіи неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы.

§ 52. Реакція неподвижной кривой линіи, удерживающей матерьяльную точку на себѣ. Давленіе точки на кривую.

Когда удерживающая кривая неподвижна, тогда то самое дифференціальное уравненіе, которое получается по исключеніи множителей λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), составится прямо, если выразимъ, что произведеніе изъ массы точки и проэкціи

ускоренія на направленіе скорости равняется проэкціи на то же направленіе равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ; получимъ:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(F,v)\ *) \quad\dots\dots\dots\dots (380, a)$$

Выраженія (379, a, b) тоже могутъ быть составлены прямо; они выражаютъ проэкціи на направленія нормалей N_1 и N_2 равнодѣйствующей изъ реакцій $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$; означимъ черезъ $\mathfrak{P}$ величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

Составимъ равенство, выражающее, что сумма проэкцій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на направленіе радіуса кривизны кривой равняется проэкціи ускоренія на то же направленіе, помноженной на массу точки:

$$m\frac{v^2}{\rho}=F\cos(F,\rho)+\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\rho)\dots\dots\dots (380, b)$$

Кромѣ того, сумма проэкцій тѣхъ же силъ на направленіе бинормали равна нулю, такъ какъ бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны кривой, а ускореніе движущейся точки заключается въ плоскости кривизны.

$$0=F\cos(F,b)+\mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},b);\dots\dots\dots (380, c)$$

направленіе бинормали b предполагается здѣсь проведеннымъ въ ту сторону, въ которую была бы направлена положительная ось $Z^{овъ}$, если бы положительная ось $X^{овъ}$ имѣла направленіе скорости, а положительная ось $Y^{овъ}$ направленіе главной нормали (черт. 21).

Такъ какъ $\mathfrak{P}$ заключается въ нормальной плоскости къ кривой, то какъ величина, такъ и направленіе ея вполнѣ опредѣляются изъ равенствъ (380, b, c).

Черезъ одну и ту же кривую линію можно провести безчисленное множество поверхностей и эта кривая можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія которыхъ либо двухъ изъ нихъ.

---

*) Предоставляемъ читателю убѣдиться, что дифференціальное уравненіе (380, a) есть то самое, которое, въ случаѣ неподвижности кривой, получается изъ дифференціальнаго уравненія (374) послѣ исключенія множителей λ_1 и λ_2.

Если обѣ поверхности, выражаемыя уравненіями (372) (373) — удерживающія, то мы можемъ замѣнить ихъ двумя другими поверхностями, проходящими черезъ ту же кривую линію и такихъ паръ поверхностей — безчисленное множество.

Какъ дифференціальное уравненіе (380, a), такъ и равенства (380, b, c), совершенно не зависятъ отъ вида этихъ поверхностей, поэтому можно, оставивъ въ сторонѣ всякія разсужденія, относящіяся къ этимъ поверхностямъ, предположить, что сама кривая линія удерживаетъ на себѣ матерьяльную точку, оказывая реакцію $\mathfrak{P}$ тѣмъ причинамъ, которыя побуждаютъ матерьяльную точку сойти съ этой кривой.

Интегрируя дифференціальное уравненіе (380, a), опредѣлимъ движеніе точки по кривой; изъ равенствъ же (380, b, c) опредѣлится *реакція* $\mathfrak{P}$ *кривой линіи*, заключающаяся въ нормальной плоскости кривой.

Означимъ черезъ F_n величину и направленіе проэкціи силы F на нормальную плоскость; величина ея равна:

$$F_n = F \sin(F,v),$$

а проэкціи ея на направленія ρ и b равны проэкціямъ силы F на тѣ же направленія; поэтому равенства (380, b, c) можно представить такъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},\rho) &= m\frac{v^2}{\rho} - F_n\cos(F_n,\rho) \\ \mathfrak{P}\cos(\mathfrak{P},b) &= \qquad\; - F_n\cos(F_n,b) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (381)$$

Реакція $\mathfrak{P}$ есть сила дѣйствія кривой линіи на матерьяльную точку m, приложенная къ этой точкѣ; обратно, силовое дѣйствіе точки m на кривую линію, такъ называемое *давленіе матерьяльной точки на кривую линію*, предполагается приложеннымъ къ той точкѣ M кривой, въ которой M находится и предполагается равнымъ и противоположнымъ реакціи $\mathfrak{P}$.

Поэтому давленіе также заключается въ нормальной плоскости,

а величина и направленіе его опредѣлятся по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{array}{l} D\cos(D,\rho)=F_n\cos(F_n,\rho)-m\frac{v^2}{\rho} \\ D\cos(D,b)=F_n\cos(F_n,b) \end{array}\right\} \ldots\ldots (382)$$

Эти формулы выражаютъ, что *давленіе D есть равнодѣйствующая изъ силы F_n* (проэкціи силы F на нормальную плоскость), *и изъ силы $m\frac{v^2}{\rho}$, направленной противоположно главной нормали.*

Эта, направленная отъ центра кривизны кривой, сила представляетъ ту часть давленія точки на кривую, которая производится стремленіемъ матерьяльной точки сохранить направленіе своего движенія; сила эта называется *центробѣжною силою.*

Реакція неподвижной кривой линіи есть равнодѣйствующая изъ силы, равной и противоположной силѣ F_n и изъ силы, равной и противоположной центробѣжной силѣ.

(На чертежѣ 21 изображены: сила F_n линіею $\overline{MF_n}$, противоположная ей — линіею $\overline{MQ}$; центробѣжная сила — линіею $\overline{MЦ}$; сила, противоположная центробѣжной, изображена линіею $\overline{MK}$).

§ 53. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи матерьяльной точки по данной кривой линіи.

Примѣръ 30-й. Матерьяльная точка движется по какой либо неподвижной кривой линіи, касательная къ которой измѣняетъ свое направленіе непрерывнымъ образомъ вдоль по всей кривой; никакихъ силъ, кромѣ реакціи кривой, не приложено къ точкѣ.

Въ этихъ случаяхъ движеніе удовлетворяетъ закону живой силы, а потому v имѣетъ постоянную величину; далѣе, легко найдемъ: $s=s_0+v_0t$, если движеніе направлено въ сторону возрастающихъ s.

Давленіе точки на кривую приводится здѣсь къ одной только центробѣжной силѣ, которая, вслѣдствіе постоянства скорости, обратно пропорціональна радіусу кривизны.

Примѣръ 31-й. По какой либо кривой линіи движется матерьяльная точка, къ которой приложена сила, направленная по

касательной, и стремящаяся приблизить движущуюся точку къ нѣкоторой точкѣ S_0 кривой; величина силы пропорціональна величинѣ разстоянія движущейся точки отъ точки S_0.

Дифференціальное уравненіе (380, а) получитъ здѣсь слѣдующій видъ:

$$m\frac{dv}{dt}=-m\mu^2 s,\ \text{когда}\ v=\frac{ds}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt}=\quad m\mu^2 s,\ \text{когда}\ v=-\frac{ds}{dt};$$

такъ что, во всякомъ случаѣ:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-m\mu^2 s.$$

Интегралы этого дифференціальнаго уравненія:

$$v^2=\mu^2(q^2-s^2);\quad q^2=s_0^2+\frac{v_0^2}{\mu^2},$$

$$s=q\sin(\mu t+c),\quad c=\text{arc}\sin\frac{s_0}{q};$$

(см. стр. 66, примѣръ 8-й).

Давленіе матерьяльной точки на кривую и здѣсь приводится къ одной центробѣжной силѣ.

Примѣръ 32-й. Движеніе тяжелой точки по циклоидѣ, заключающейся въ вертикальной плоскости XY, и расположенной такъ, какъ показано на чертежахъ 11 и 31 кинематической части; положительная ось Yовъ имѣетъ направленіе силы тяжести.

Уравненія кривой (см. стр. 14 кинематической части):

$$x=R(\omega+\sin\omega),\quad y=R(1+\cos\omega).$$

Такъ какъ потенціалъ силы тяжести: $U=mgy$, то выраженіе закона живой силы будетъ, въ этомъ случаѣ, слѣдующее:

$$v^2-v_0^2=2gR(\cos\omega-\cos\omega_0),$$

или:

$$v^2-v_0^2=4gR\left(\sin^2\frac{\omega_0}{2}-\sin^2\frac{\omega}{2}\right),$$

или

$$v^2-v_0^2=\frac{g}{4R}(s_0^2-s^2), \ldots\ldots\ldots\ldots (383)$$

(см. стр. 53 и 54 кинематической части).

Равенству (383) дадимъ видъ:

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{4R}}\sqrt{q^2-s^2};\quad q^2=s_0^2+\frac{4Rv_0^2}{g};$$

интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$s=q\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{4R}}+c\right);\quad c=\arcsin\frac{s_0}{q}\ldots\ldots (384)$$

Давленіе на кривую состоитъ изъ центробѣжной силы и проэкціи силы тяжести на нормаль къ кривой:

$$D=m\left(\frac{v_0^2}{\rho}+g\cos(N,У)\right),$$

гдѣ N означаетъ направленіе нормали, проведенной въ выпуклую сторону циклоиды.

По свойству циклоды, уголъ $(N,У)$ равенъ $\frac{\omega}{2}$ (см. стр. 54 и черт. 31 кинематической части) и радіусъ кривизны вдвое болѣе длины $\overline{MN}$ (см. тотъ-же чертежъ);

$$\overline{MN}=2R\cos\frac{\omega}{2},\quad \rho=4R\cos\frac{\omega}{2}.$$

Такъ какъ:

$$\cos\frac{\omega}{2}=\frac{\sqrt{16R^2-s^2}}{4R},$$

то D выразится въ s слѣдующимъ образомъ:

$$D=\frac{mg}{4R}\,\frac{q^2+16R^2-s^2-s_0^2}{\sqrt{16R^2-s^2}}.$$

Изъ выраженія (384) видно, что тяжелая матерьяльная точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе по циклоидѣ, отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ отъ нижней точки циклоиды; время T, потребное для

перехода точки изъ положенія $s = +q$ въ положеніе $s = -q$, или для обратнаго движенія, не зависитъ отъ величины q и равно

$$T = \pi \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Примѣръ 33-й. Движеніе матерьяльной тяжелой точки по удерживающей окружности, заключающейся въ вертикальной плоскости.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось $Y^{овъ}$ направимъ вертикально внизъ, ось $X^{овъ}$ горизонтально въ плоскости круга.

По закону живой силы:

$$v^2 = (2gy + v_0^2 - 2gy_0),$$

или

$$v^2 = 2g(y - b), \qquad (385)$$

гдѣ:

$$b = y_0 - H, \quad H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Величины H и b имѣютъ слѣдующія значенія. Если представить себѣ, что свободная тяжелая матерьяльная точка будетъ брошена снизу вверхъ съ начальною скоростью v_0, то она поднимется на высоту H надъ тѣмъ уровнемъ, съ котораго она была брошена; если этотъ начальный уровень былъ $y = y_0$, то свободная тяжелая точка, брошенная вверхъ со скоростью v_0, поднимется до уровня $y = b$.

Если этотъ уровень пересѣкаетъ окружность (т.-е. если $b > -R$), то скорость обращается въ нуль въ точкахъ пересѣченія, какъ видно изъ уравненія (385); движеніе совершается только по той части окружности, которая ниже уровня $y = b$.

Если же этотъ уровень не пересѣкаетъ окружности (т.-е. если $b < -R$), то скорость движущейся точки не обращается въ нуль ни въ какой точкѣ окружности; въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$b = -R - l,$$

гдѣ l болѣе нуля, тогда уравненіе (385) получитъ слѣдующій видъ:

$$v^2 = 2g(y + R + l),$$

а отсюда уже ясно видно, что v^2 не обращается въ нуль, пока точка

остается на окружности. Въ этихъ случаяхъ движеніе совершается по всей окружности безъ остановокъ и безъ перемѣны направленія скорости.

Эти два рода случаевъ разсмотримъ отдѣльно.

I. $b > -R$.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ движущейся точки съ положительною осью $Y^{\text{овъ}}$, тогда уравненіе (385) получитъ слѣдующій видъ:

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(R\cos\varphi - b), \quad \ldots\ldots\ldots (386)$$

или:

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gR(\cos\varphi - \cos\beta) = 4gR\left(\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

гдѣ:

$$\cos\beta = \frac{b}{R}.$$

Такъ какъ уголъ φ не можетъ быть болѣе β и не можетъ быть менѣе $(-\beta)$, то выразимъ синусъ половины этого угла слѣдующимъ образомъ:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\eta; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (387)$$

тогда будетъ:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\eta\cdot\frac{d\eta}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (388)$$

дифференціальное же уравненіе (386) получитъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$\frac{\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}{\left(1 - \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta\right)} = \frac{g}{R},$$

или по извлеченіи корня и по отдѣленіи перемѣнныхъ:

$$\frac{d\eta}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta}} = dt\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots (389)$$

Корень, находящійся въ знаменателѣ первой части, не обращается въ нуль ни при какихъ дѣйствительныхъ величинахъ η, если только $\beta<\pi$, а потому этотъ корень долженъ сохранять свой знакъ во все время движенія; изъ этого слѣдуетъ, что и знакъ дифференціала $d\eta$ остается, во все время движенія, постояннымъ; знакъ этотъ опредѣлится изъ равенства (388), примѣненнаго къ начальному моменту.

Въ это равенство входитъ, однако, нѣкоторая величина, которой мы можемъ придать знакъ плюсъ или минусъ, по желанію, это именно:

$$\cos\eta_0=\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}};$$

если же мы условимся придавать этой величинѣ тотъ же самый знакъ, какой имѣетъ величина φ_0', то тогда знакъ величины η_0', слѣдовательно и производной η' будетъ во всѣхъ случаяхъ и всегда — положительный; тотъ же самый знакъ долженъ будетъ имѣть и корень знаменателя первой части дифференціальнаго уравненія (389).

И такъ:

$$\eta_0<\frac{\pi}{2},\ \text{если}\ \varphi_0'>0,$$

$$\eta_0>\frac{\pi}{2},\ \text{если}\ \varphi_0'<0;$$

уголъ η непрерывно возрастаетъ отъ своего начальнаго значенія и законъ возрастанія выражается равенствомъ:

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta}},\ \ldots\ldots \quad \textbf{(390)}$$

или:

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}\left(F\left(\eta,\sin\frac{\beta}{2}\right)-F\left(\eta_0,\sin\frac{\beta}{2}\right)\right),\ \ldots\ldots \quad \textbf{(391)}$$

гдѣ $F(\eta,k)$ есть тотъ самый интегралъ (формула (346)), который

встрѣтился намъ при рѣшеніи примѣра 27-го; разница заключается только въ выраженіи величины k, которая здѣсь равняется $\sin\frac{\beta}{2}$.

Въ примѣрѣ 27-мъ были доказаны нѣкоторыя свойства интеграла $F(\eta, k)$, а затѣмъ, на основаніи этихъ свойствъ, оказалось возможнымъ получить понятіе о періодическомъ характерѣ движенія; то же самое можетъ быть сдѣлано и здѣсь.

Изъ формулы (387) видно, что слѣдующимъ величинамъ η соотвѣтствуютъ слѣдующія величины φ:

$$\text{когда } \eta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{тогда } \varphi = 0,\ \beta,\ 0,\ -\beta,\ 0,\ \beta,\ 0,\ -\beta,\ldots\ldots\ldots$$

а такъ какъ φ измѣняется непрерывно, то радіусъ векторъ точки совершаетъ качанія, отклоняясь на уголъ β въ положительную сторону и на такой же уголъ — въ отрицательную.

Изъ того свойства интеграла (346), которое выражается равенствомъ:

$$F(\eta+\pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k) \ldots\ldots\ldots \textbf{(348)}$$

слѣдуетъ, что переходъ точки изъ одного крайняго положенія B (черт. 22) въ другое B_1, или обратный переходъ изъ B_1 въ B, совершается въ теченіи промежутка времени

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}}\, F\left(\pi, \sin\frac{\beta}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \textbf{(392)}$$

и что такое же время потребно для движенія отъ середины дуги S_0 до одной изъ крайнихъ точекъ и обратно въ S_0.

Изъ свойства, выражаемаго равенствомъ

$$F(\pi, k) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \ldots\ldots\ldots \textbf{(349)}$$

слѣдуетъ, что матерьяльная точка совершаетъ переходъ отъ точки S_0 до одной изъ крайнихъ точекъ въ теченіи времени $\frac{T}{2}$; столько же времени требуетъ и обратное движеніе.

Далѣе, изъ свойства (348) и на основаніи формулъ (387) и (391) слѣдуетъ, что, если въ нѣкоторый моментъ времени радіусъ векторъ OM (черт. 22) отклоненъ на уголъ φ отъ вертикальной линіи, то, по истеченіи промежутка времени, равнаго T, онъ будетъ отклоненъ на уголъ $(-\varphi)$, то есть, на тотъ же самый уголъ, но по другую сторону отъ вертикальной линіи; значитъ, въ теченіи этого промежутка времени, матерьяльная точка совершитъ движеніе отъ M къ B и отъ B къ M_1 или отъ M къ B_1 и отъ B_1 къ M_1.

Величина промежутка времени T, называемая продолжительностью размаха круговаго маятника, вычисляется по формулѣ:

$$T=2\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\eta}} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(393)}$$

Примѣнивъ къ подъинтегральной функціи слѣдующее разложеніе въ рядъ:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\ldots$$

$\left(\text{гдѣ } x \text{ надо замѣнить произведеніемъ } \sin\frac{\beta}{2}\sin\eta\right)$, и принявъ во вниманіе, что:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\eta d\eta=\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots\ldots 2n}\frac{\pi}{2},$$

получимъ слѣдующее выраженіе для T:

$$T=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\beta}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\beta}{2}+\ldots\ldots\right]\ldots \quad \textbf{(394)}$$

При достаточно-маломъ β можно ограничиться двумя первыми членами этого ряда.

Если же уголъ этотъ столь малъ, что можно положить:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\beta''}{2}\sin 1'',$$

гдѣ β'' означаетъ число секундъ, заключающееся въ этомъ углѣ, то T выразится такъ:

$$T=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{(\beta'')^2}{16}\sin^2 1''\right)\text{. . . . . (395)}$$

II. $b<-R$.

Положимъ $b=-R-l$, тогда уравненіе живой силы получитъ слѣдующій видъ:

$$v^2=2g(R\cos\varphi+R+l),$$

или:

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2g\left(2R+l-2R\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

отсюда, по извлеченіи корня, по отдѣленіи перемѣнныхъ и по интегрированіи, получимъ:

$$t=\pm\frac{2R}{\sqrt{2g(2R+l)}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{2R}{2R+l}\sin^2\frac{\varphi}{2}}},\text{. . . . (396)}$$

гдѣ знакъ плюсъ долженъ быть взятъ въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ начальная скорость направлена въ сторону увеличивающихся φ, а знакъ минусъ — въ случаяхъ противоположнаго направленія начальной скорости.

Изъ этого равенства видно, что уголъ φ непрерывно возрастаетъ или убываетъ и что возрастаніе угла φ на 2π совершается въ теченіи времени:

$$T=\frac{4R}{\sqrt{2g(2R+l)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\frac{2R}{2R+l}\sin^2\eta}},\text{. . . . . (397)}$$

такъ что въ теченіи этого времени точка пройдетъ всю окружность одинъ разъ.

III. $b = -R$.

Если положимъ $\beta = \pi$ въ случаяхъ I рода или $l = 0$ къ случаяхъ II рода, то получимъ формулы, выражающія движеніе, совершаемое матерьяльною точкою въ томъ случаѣ, когда $b = -R$; такъ какъ

$$\int \frac{d\psi}{\cos\psi} = -\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right),$$

то равенство (396) получитъ, при $l = 0$, слѣдующій видъ:

$$t = \pm\sqrt{\frac{R}{g}} \log\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi_0}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right)}\right], \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(398)}$$

гдѣ верхній знакъ долженъ быть взятъ при $\varphi'_0 > 0$, нижній — при $\varphi'_0 < 0$.

Если $\varphi'_0 > 0$, то φ возрастаетъ; это возрастаніе становится все болѣе и болѣе медленнымъ, по мѣрѣ приближенія къ π; изъ (398) видно, что при $\varphi = \pi$, $t = \infty$.

Если $\varphi'_0 < 0$, то φ убываетъ и быстрота убыванія становится все менѣе, по мѣрѣ приближенія къ $(-\pi)$; изъ (398) видно, что тогда при $\varphi = -\pi$, $t = \infty$.

Во всякомъ случаѣ, при $b = -R$, движущаяся точка ассимптотически приближается къ высшей точкѣ окружности.

Примѣръ 34. Кривая та же самая, что и въ предыдущемъ примѣрѣ, но она предполагается теперь неудерживающею для перемѣщеній матерьяльной точки внутрь площади, ею ограничиваемой; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матерьяльной точки съ этой окружности и дальнѣйшее движеніе.

Согласно съ условіями, сдѣланными въ началѣ параграфа 34-го, напишемъ уравненіе неудерживающей кривой слѣдующимъ образомъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2) = 0;$$

затѣмъ составимъ выраженіе для λ по формулѣ (317) (§ 40).

Здѣсь:

$$X=0,\ \ Y=mg,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}=-2x,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y,\ \ \Delta f=2R,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,\ \ Kf=-2v^2,$$

поэтому:

$$\lambda=m\frac{v^2+gy}{2R^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(399)}$$

Но движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2=2g(y-b),\ \ b=y_0-H,\ \ H=\frac{v_0^2}{2g},$$

а потому:

$$\lambda=m\frac{3g}{2R^2}\left(y-\frac{2}{3}b\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(400)}$$

Изъ уравненія живой силы видно, что y не можетъ быть менѣе b.

Поэтому, если $b>0$, то разность $\left(y-\frac{2}{3}b\right)$ не можетъ быть менѣе $\frac{1}{3}b$; слѣдовательно, при $b>0$ точка движется по кривой линіи, не оставляя ея; если она прикрѣплена къ концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ къ началу координатъ, то нить остается натянутою во все время движенія; величина натяженія нити равна $2\lambda R$.

Если $b<0$, но $\frac{2}{3}b>-R$, то λ обращается въ нуль при:

$$y_1=\frac{2}{3}b,$$

(уровень $y=y_1$ ниже уровня $y=b$, если $b<0$), а при дальнѣйшемъ движеніи точки по окружности, λ должно сдѣлаться отрицательнымъ; поэтому въ точкѣ окружности:

$$x_1=\sqrt{R^2-\frac{4}{9}b^2}\ \ \ y_1=\frac{2}{3}b$$

движущаяся точка оставитъ кривую и станетъ описывать нѣкоторую параболу, касательную къ окружности въ этой точкѣ.

Опредѣлимъ видъ этой параболы и движенiе матерьяльной точки послѣ того, какъ она оставитъ окружность.

Пусть t_1 есть моментъ времени, въ который движущаяся точка оставляетъ кривую; въ этотъ моментъ скорость движущейся точки имѣетъ слѣдующую величину и слѣдующее направленiе:

$$v_1 = \sqrt{-\frac{2}{3}gb} = \sqrt{-gy_1}, \quad \cos(v_1X) = \frac{y_1}{R} = \frac{2}{3}\frac{b}{R}$$

$$\cos(v_1Y) = -\frac{x_1}{R} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}\frac{b^2}{R^2}}.$$

Свободное движенiе точки будетъ слѣдующее:

$$x = x_1 + v_1\frac{y_1}{R}(t - t_1)$$

$$y = y_1 - v_1\frac{x_1}{R}(t - t_1) + g\frac{(t-t_1)^2}{2};$$

высшiй уровень, до котораго она достигнетъ, будетъ ниже уровня $y=b$, а именно:

$$y_2 = y_1 - \frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{x_1}{R}\right)^2 = b - \frac{4}{27}\frac{b^3}{R^2}.$$

На чертежѣ 23-мъ линiя B_1B изображаетъ уровень $y=b$, линiя K_1K — уровень $y=\frac{2}{3}b$, точка C — высшую точку параболы, точка D — мѣсто встрѣчи параболы съ окружностью.

Если $b<0$ и $\frac{2}{3}b<-R$, то тогда разность $\left(y-\frac{2}{3}b\right)$ остается положительною при всякомъ положенiи точки на окружности, а потому движущаяся точка нигдѣ не сойдетъ съ окружности.

Примѣръ 35. Та же окружность предполагается неудерживающею для перемѣщенiй матерьяльной точки внаружу круга; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матерьяльной точки.

Въ этомъ случаѣ уравненiе круга слѣдуетъ писать такъ:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

а потому:

$$\lambda = -m\frac{v^2+gy}{2R^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (401)$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что на нижней полусферѣ точка находиться не можетъ.

Изъ выраженія же:

$$\lambda = -m\frac{3g}{2R^2}\left(y - \frac{2}{3}b\right)$$

можно заключить слѣдующее.

Если $y_0 < 0$ и притомъ $y_0 < \frac{2}{3}b$, то λ будетъ болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока движущаяся точка не опустится до уровня $y = \frac{2}{3}b$; на этомъ уровнѣ точка сходитъ съ окружности (см. черт. 24-й, на которомъ точка A изображаетъ начальное положеніе движущейся точки, линія K_1K — уровень $y = \frac{2}{3}b$).

Если $y_0 = \frac{2}{3}b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность уже въ начальномъ своемъ положеніи, если скорость ея направлена внизъ.

Если $y_0 > \frac{2}{3}b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность съ самаго начала движенія, какъ при направленіи начальной скорости внизъ, такъ и при направленіи ея вверхъ.

§ 54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной матерьяльной точки, которыя могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ.

Задачи о движеніи матерьяльной точки по данной движущейся поверхности или линіи могутъ быть рѣшены, или такъ, какъ показано выше, или еще слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ движущуюся среду, которой принадлежитъ данная поверхность или линія, и составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ этой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, найдемъ рѣшеніе задачи.

Если движущаяся поверхность или линія не измѣняетъ своего вида, то среда будетъ неизмѣняемая, неизмѣнно связанная съ этою поверхностью или линіею.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія несвободной матерьяльной точки будутъ отличаться отъ дифференціальныхъ уравненій (233) (стр. 149—150) тѣмъ, что теперь во вторыхъ частяхъ уравненій будутъ заключаться еще члены:

$$\lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi},\quad \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta},\quad \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\zeta},$$

выражающіе суммы проекцій на оси Ξ, Υ, **Z** реакцій поверхностей

$$\Phi_1(\xi,\eta,\zeta)=0,\quad \Phi_2(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

образующихъ своимъ пересѣченіемъ ту линію, по которой должна двигаться матерьяльная точка.

Если матерьяльная точка ограничена въ своемъ движеніи негладкою поверхностью:

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія должны будутъ заключаться слѣдующіе члены:

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-k\sqrt{\lambda^2}\,\frac{\Delta\Phi}{u}\,\frac{d\xi}{dt},$$

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}-k\sqrt{\lambda^2}\,\frac{\Delta\Phi}{u}\,\frac{d\eta}{dt},$$

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}-k\sqrt{\lambda^2}\,\frac{\Delta\Phi}{u}\,\frac{d\zeta}{dt}.$$

Примѣръ 36-й. Матерьяльная тяжелая точка движется по линіи, составляющей съ горизонтомъ уголъ J; эта линія движется поступательно, причемъ всѣ точки ея движутся вертикально съ постояннымъ ускореніемъ j по положительной оси Z, направленной внизъ. Въ началѣ движенія (т.-е. при $t=0$) скорости всѣхъ точекъ линіи равны нулю; въ этотъ моментъ матерьяльная точка находилась въ точкѣ *Ю* движущейся линіи и абсолютная скорость ея была равна нулю.

Возьмемъ положительную ось Y по направленію линіи, внизъ; ось **Z** — перпендикулярно къ линіи, вверхъ. Уравненія линіи будутъ:

$$\zeta=0,\ \xi=0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2}=mg\sin J-mj\sin J$$

$$0=-mg\cos J+\lambda+mj\cos J.$$

Второе изъ этихъ уравненій опредѣляетъ реакцію по положительной оси **Z**; равное и противоположное реакціи давленіе матерьяльной точки на линію равно:

$$D=m(g-j)\cos J.$$

Если j есть величина положительная, то это давленіе менѣе давленія $mg\cos J$, производимаго вѣсомъ точки; если же j будетъ величиною отрицательною, то давленіе будетъ болѣе вѣса точки; слѣдовательно, при равномѣрно-ускоренномъ движеніи линіи сверху внизъ давленіе матерьяльной точки на линію уменьшается, а при равномѣрно-ускоренномъ движеніи снизу вверхъ — увеличивается сравнительно съ давленіемъ, производимымъ тою же точкою на неподвижную линію.

Первое изъ предыдущихъ уравненій, по сокращеніи на m и по интегрированіи, даетъ законъ движенія точки по прямой:

$$\eta=\frac{(g-j)}{2}t^2\sin J;$$

это — равноускоренное движеніе съ ускореніемъ $(g-j)\sin J$; если j будетъ болѣе g, то точка будетъ подниматься вверхъ по линіи.

Примѣръ 37-й. Движеніе матерьяльной тяжелой точки по какой бы то ни было кривой линіи движущейся поступательно.

Относительное движеніе матерьяльной точки совершается такъ, какъ совершалось бы абсолютное движеніе по той же неподвижной кривой линіи, если бы, кромѣ силы тяжести, была еще прило-

жена къ матерьяльной точкѣ сила, равная $m\dot{w}_ю$ и противоположная ускоренію $\dot{w}_ю$ точки $Ю$.

Примѣръ 38-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по прямой линіи, принадлежащей неизмѣняемой средѣ, вращающейся равномѣрно вокругъ горизонтальной оси.

Проведемъ кратчайшее разстояніе между осью вращенія и движущеюся линіею и возьмемъ неподвижный конецъ его O за начало неподвижныхъ осей координатъ, а тотъ конецъ его, который находится на движущейся линіи — за начало $Ю$ координатныхъ осей Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$; за положительную ось Υ возьмемъ продолженіе направленія $OЮ$ (см. черт. 25), ось Ξ расположимъ по данной линіи, ось $X^{овъ}$ по направленію оси вращенія и угловой скорости, а ось $Y^{овъ}$ вертикально внизъ. При такомъ выборѣ осей, ось Υ будетъ заключаться въ вертикальной плоскости QQ, проведенной черезъ ось $Y^{овъ}$. Черезъ точку $Ю$ проведемъ направленіе $ЮX'$ параллельное положительной оси $X^{овъ}$; пусть J есть постоянный уголъ $\Xi ЮX'$, образуемый направленіями осей X и Ξ. Плоскость PP, проведенная черезъ направленія $Ю\Xi$ и $ЮX'$, перпендикулярна къ направленію $OЮ\Upsilon$, а потому въ этой плоскости заключается ось $Ю\mathbf{Z}$.

Угловая скорость направлена по оси $X^{овъ}$ или по линіи $ЮX'$, поэтому проэкціи ея на подвижныя оси равны:

$$p = \omega \cos J, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin J.$$

Ускореніе точки $Ю$ направлено по $ЮO$ и равно $\omega^2 l$, если l означаетъ длину $ЮO$, поэтому:

$$\dot{w}_ю \cos(\dot{w}_ю \Xi) = 0, \quad \dot{w}_ю \cos(\dot{w}_ю \Upsilon) = -\omega^2 l, \quad \dot{w}_ю \cos(\dot{w}_ю \mathbf{Z}) = 0.$$

Реакція $\mathfrak{P}$ прямой линіи заключается въ плоскости $\mathbf{Z}\Upsilon$.

Проэкціи силы тяжести на направленіе оси Υ и на направленіе $ЮK$ (линія пересѣченія плоскостей QQ и PP) равны:

$$\Upsilon = mg \cos \omega t, \quad -mg \sin \omega t,$$

гдѣ ωt есть уголъ $YO\Upsilon$; поэтому проэкціи силы тяжести на направленія осей Ξ и $\mathbf{Z}$ равны:

$$\Xi = -mg \sin \omega t \sin J, \quad \mathbf{Z} = -mg \sin \omega t \cos J.$$

Кромѣ того, такъ какъ матерьяльная точка движется по оси Ξ, то η и ζ равны нулю.

Составимъ теперь дифференціальныя уравненія; они будутъ слѣдующія:

$$m\xi'' = -mg \sin J \sin \omega t + m\omega^2 \xi \sin^2 J, \; . \; . \; . \quad \textbf{(402, a)}$$

$$O = \mathfrak{P} \cos(\mathfrak{P}, \Upsilon) + mg \cos \omega t + m\omega^2 l + 2m\omega\xi' \sin J. \; . \; . \quad \textbf{(402, b)}$$

$$O = \mathfrak{P} \cos(\mathfrak{P}, \mathbf{Z}) - mg \cos J \sin \omega t + m\omega^2 \xi \sin J \cos J. \quad \textbf{(402, c)}$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, получимъ выраженіе движенія точки по прямой; второе и третье уравненія послужатъ для опредѣленія величины и направленія реакціи прямой линіи.

Сократимъ уравненіе (402, a) на m и положимъ:

$$\xi = \chi + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t,$$

тогда это уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\chi'' = (\omega \sin J)^2 \chi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(403)}$$

Интегрированіе такого уравненія показано на страницахъ 63-й и 64-й этой части; замѣнивъ, въ выраженіи (72), k — величиною $\omega \sin J$, a — величиною $\chi_0 = \xi_0$ и α — величиною χ'_0:

$$\chi'_0 = \xi'_0 - \frac{g}{\omega} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J},$$

получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\xi = \xi_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t +$$

$$+ \left(\frac{\xi'_0}{\omega \sin J} - \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{1 + \sin^2 J} \right) \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(404)}$$

гдѣ

$$k = \omega \sin J.$$

Если $\xi_0 = 0$ и $\chi'_0 = 0$, то движеніе матерьяльной точки по оси Ξ будетъ колебательное по обѣ стороны точки $Ю$, такъ какъ тогда выраженіе этого движенія будетъ слѣдующее:

$$\xi = \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t.$$

Ни это, ни общее выраженіе (404) не заключаютъ въ себѣ величины l; слѣдовательно, движеніе точки по оси Ξ не зависитъ отъ разстоянія этой прямой линіи отъ оси вращенія.

Примѣръ 39-й. Тяжелая точка движется по прямой линіи, находящейся въ плоскости истиннаго горизонта нѣкоторой точки $Ю$ земной поверхности, пренебрегая тѣми же величинами, какъ и на страницѣ 166, опредѣлить проэкцію на горизонтальную плоскость давленія, производимаго движущеюся точкою на прямую линію.

Давленіе движущейся точки на прямую равно и противоположно реакціи прямой; означимъ черезъ D_1 проэкцію давленія на горизонтальную плоскость; направленіе D_1 должно быть перпендикулярно къ направленію прямой.

Относя положеніе движущейся точки къ тѣмъ самымъ осямъ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, которыя были выбраны нами на страницѣ 159 при разсмотрѣніи примѣра 21-го, означимъ черезъ $\mathfrak{x}$, η координаты движущейся точки ($\mathfrak{z} = 0$) и черезъ β — азимутъ прямой линіи; этотъ азимутъ мы будемъ отсчитывать отъ положительной оси $\mathfrak{X}$ къ положительной оси $\mathfrak{Y}$.

Если направленіе давленія D_1 будетъ имѣть азимутъ $\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, то проэкціи D_1 на оси $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ будутъ равны:

$$-D_1 \sin \beta, \qquad D_1 \cos \beta;$$

если окажется, что D_1 есть величина отрицательная, то это будетъ значить, что оно имѣетъ направленіе противоположное, азимутъ котораго равенъ $\beta - \frac{\pi}{2}$.

Чтобы составить дифференціальныя уравненія движенія точки по данной прямой, въ которыхъ отброшены члены, заключающіе величины:

$$\omega^2 \mathfrak{x},\ \omega^2 \eta,\ \frac{\mathfrak{x}}{R},\ \frac{\eta}{R},$$

возьмемъ дифференціальныя уравненія (252) и прибавимъ къ ихъ вторымъ частямъ проэкціи реакціи прямой на оси координатъ; проэкціи реакціи на оси $\mathfrak{X}$ и Υ будутъ равны:

$$D_1 \sin\beta, \qquad -D_1 \cos\beta,$$

поэтому первыя два дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующаго вида:

$$m\mathfrak{x}'' = D_1 \sin\beta - 2m\omega\eta' \sin\Lambda$$

$$m\eta'' = -D_1 \cos\beta + 2m\omega\mathfrak{x}' \sin\Lambda.$$

Но движеніе точки совершается по данной прямой линіи, поэтому:

$$\mathfrak{x} = s\cos\beta,\ \ \eta = s\sin\beta,$$

если s означаетъ разстояніе движущейся точки отъ точки $Ю$; вслѣдствіе этого предыдущія уравненія получатъ такой видъ:

$$ms'' \cos\beta = \quad (D_1 - 2m\omega s' \sin\Lambda)\sin\beta$$

$$ms'' \sin\beta = -(D_1 - 2m\omega s' \sin\Lambda)\cos\beta.$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos\beta$, второе на $\sin\beta$ и сложивъ, получимъ:

$$s'' = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0;$$

это выражаетъ, что движеніе точки совершается (по крайней мѣрѣ близъ точки $Ю$) равномѣрно.

Послѣ этого, изъ предыдущихъ уравненій слѣдуетъ:

$$D_1 = 2m\omega s' \sin\Lambda \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (405)$$

Если s' есть величина положительная, то и D_1 будетъ величиною положительною, то есть направленіе его будетъ имѣть азимутъ $\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$, стало быть *движущаяся точка давитъ вправо на линію, по которой она движется; давленіе это, происходящее вслѣдствіе вращенія земли вокругъ оси, пропорціонально величинѣ скорости точки и синусу истинной широты мѣста; но не зависитъ отъ азимута* β.

Примѣръ 40-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по наклонной плоскости, равномѣрно вращающейся вокругъ вертикальной оси.

Пусть J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью съ горизонтальною плоскостью. Возьмемъ за точку $Ю$ — точку пересѣченія вращающейся плоскости съ осью вращенія; положительную ось Υ направимъ внизъ по линіи наибольшаго наклона по плоскости, ось $\mathbf{Z}$ перпендикулярно къ плоскости, вверхъ; ось Ξ будетъ тогда горизонтальна.

Положимъ, что угловая скорость ω направлена вверхъ; проэкціи ея на подвижныя оси будутъ равны:

$$p=0,\ q=-\omega\sin J,\ r=\omega\cos J.$$

Ускореніе точки $Ю$ равно нулю; проэкціи силы тяжести на подвижныя оси:

$$\Xi=0,\ \Upsilon=mg\sin J,\ \mathbf{Z}=-mg\cos J.$$

Наконецъ, уравненіе плоскости: $\zeta=0$.

Дифференціальныя уравненія движенія точки по плоскости будутъ, по сокращеніи на m, имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\omega^2\xi+2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos J, \ldots\ldots\ldots\ \mathbf{(406,\, a)}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=g\sin J+\omega^2\eta\cos^2 J-2\omega\frac{d\xi}{dt}\cos J \ldots\ \mathbf{(406,\, b)}$$

Изъ третьяго уравненія:

$$O = -mg\cos J + \lambda + m\omega^2\eta\sin J\cos J - 2m\omega\frac{d\xi}{dt}\sin J \ldots \quad \textbf{(406, c)}$$

опредѣлится величина и знакъ реакціи λ.

Положимъ:

$$\eta + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{\cos^2 J} = \mathfrak{y},$$

тогда уравненія (406, a, b) получатъ слѣдующій видъ:

$$\xi'' = 2\omega\mathfrak{y}'\cos J = \omega^2\xi, \quad \mathfrak{y}'' = -2\omega\xi'\cos J + \omega^2\mathfrak{y}\cos^2 J.$$

Какъ извѣстно, такая совокупность линейныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\xi = Ce^{kt}, \quad \mathfrak{y} = C\varkappa e^{kt},$$

гдѣ k и $\varkappa$ суть постоянныя величины, удовлетворяющія слѣдующимъ равенствамъ:

$$k^2 = 2\omega\varkappa k\cos J + \omega^2, \quad \varkappa k^2 = -2\omega k\cos J + \omega^2\varkappa\cos^2 J.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ величину $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{k^2 - \omega^2}{2\omega k\cos J} = -\frac{2\omega k\cos J}{k^2 - \omega^2\cos^2 J},$$

получимъ уравненіе:

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{k}{\omega}\right)^2(1 - 3\cos^2 J) + \cos^2 J = 0,$$

служащее для опредѣленія k; изъ него получимъ четыре значенія для этой величины:

$$1)\ k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 3\cos^2 J + \sin J\sqrt{1 - 9\cos^2 J}}, \quad 3)\ -k_1$$

$$2)\ k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 3\cos^2 J - \sin J\sqrt{1 - 9\cos^2 J}}, \quad 4)\ -k_2;$$

каждому изъ этихъ k соотвѣтствуетъ опредѣленная величина $\varkappa$:

$$1)\ \varkappa_1 = \frac{k_1^2 - \omega^2}{2\omega k_1 \cos J},\quad 3)\ -\varkappa_1$$

$$2)\ \varkappa_2 = \frac{k_2^2 - \omega^2}{2\omega k_2 \cos J},\quad 4)\ -\varkappa_2.$$

Поэтому совокупность (406, a), (406, b) будетъ имѣть слѣдующее полное рѣшеніе.

$$\xi = C_1 e^{k_1 t} + C_3 e^{-k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_4 e^{-k_2 t} \ldots . \quad (407, a)$$

$$\eta = -\frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{\cos^2 J} + \varkappa_1 (C_1 e^{k_1 t} - C_3 e^{-k_1 t}) + \varkappa_2 (C_2 e^{k_2 t} - C_4 e^{-k_2 t}). \quad (407, b)$$

Значенія произвольныхъ постоянныхъ опредѣлятся по начальнымъ координатамъ ξ_0 и η_0 движущейся точки и по проэкціямъ на оси Ξ и Υ ея начальной относительной скорости (ξ'_0, η'_0).

Корни k_1 и k_2 могутъ быть дѣйствительными или мнимыми. Если:

$$\cos J < \frac{1}{3},$$

то тогда:

$$\cos J < \frac{1}{3}\sqrt{3},\ 1 - 3\cos^2 J > 0,$$

$$(1 - 3\cos^2 J)^2 - \sin^2 J(1 - 9\cos^2 J) = 4\cos^2 J,$$

а потому тогда обѣ величины k_1 и k_2 — дѣйствительныя. Въ такихъ случаяхъ ξ и η при $t=\infty$ становятся безконечно-большими, если только C_1 и C_2 неравны нулю; если же эти постоянныя равны нулю, то движущаяся точка ассимптотически приближается къ точкѣ:

$$\xi_1 = 0,\ \eta_1 = -\frac{g}{\omega^2}\frac{\sin J}{\cos^2 J}$$

плоскости $\Xi\Upsilon$.

Если:

$$\cos J > \frac{1}{3},$$

то тогда k_1 и k_2 суть комплексныя взаимно-сопряженныя величины:

$$k_1 = \alpha + \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i,$$

а такъ какъ:

$$2\omega\varkappa_1 \cos J = k_1 - \frac{\omega^2}{k_1},\quad 2\omega\varkappa_2 \cos J = k_2 - \frac{\omega^2}{k_2},$$

то рѣшеніе получитъ въ этихъ случаяхъ слѣдующій видъ:

$$\xi = e^{\alpha t}(\Gamma_1 \cos\beta t + \Gamma_2 \sin\beta t) + e^{-\alpha t}(\Gamma_3 \cos\beta t + \Gamma_4 \sin\beta t)$$

$$\eta = -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + \frac{e^{\alpha t}}{2\omega \cos J}\Big[\Big(\Gamma_1\alpha + \Gamma_2\beta - \omega^2\frac{\Gamma_1\alpha - \Gamma_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\cos\beta t +$$

$$+\Big(\Gamma_2\alpha - \Gamma_1\beta - \omega_2\frac{\Gamma_2\alpha + \Gamma_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\sin\beta t\Big] + \ldots\ldots$$

Въ этихъ случаяхъ, если Γ_1 и Γ_2 неравны нулю, то движеніе точки, при весьма большихъ величинахъ t, принимаетъ слѣдующій характеръ:

$$\xi = ae^{\alpha t}\cos(\beta t + b),\quad \eta = -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + a_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t + b_1),$$

т.-е. движущаяся точка описываетъ спираль логариѳмическаго вида, по которой она удаляется въ безконечность.

Если же Γ_1 и Γ_2 равны нулю, то движущаяся точка ассимптотически приближается по спирали къ точкѣ (ξ_1, η_1).

Примѣръ 41-й. Разсмотрѣть, какое движеніе по отношенію къ землѣ совершаетъ математическій маятникъ при малыхъ отклоненіяхъ отъ вертикальной линіи (маятникъ Фуко).

Примемъ точку привѣса маятника за начало $Ю$ осей координатъ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, неизмѣнно связанныхъ съ землею; эти оси направлены такъ, какъ объяснено на страницѣ 159.

Если l есть длина нити маятника, то уравненіе той сферы, на которой должна оставаться движущаяся точка будетъ:

$$l^2 - \mathfrak{x}^2 - \eta^2 - \mathfrak{z}^2 = 0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія этого маятника полу-

чатся изъ дифференціальныхъ уравненій (243) страницы 159, если ко вторымъ частямъ этихъ уравненій присоединимъ члены:

$$-2\lambda\mathfrak{x},\ -2\lambda\eta,\ -2\lambda\mathfrak{z};$$

отбросивъ же члены, заключающіе:

$$\omega^2\mathfrak{x},\ \omega^2\eta,\ \omega^2\mathfrak{z},\ \frac{\mathfrak{x}}{R},\ \frac{\eta}{R},\ \frac{\mathfrak{z}}{R}$$

и всѣ члены высшаго порядка малости, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$m\mathfrak{x}'' = -2\lambda\mathfrak{x} - 2m\eta'\omega\sin\Delta, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (408, a)$$

$$m\eta'' = -3\lambda\eta + 2m\omega(\mathfrak{x}'\sin\Delta + \mathfrak{z}'\cos\Delta), \ldots\ldots \quad (408, b)$$

$$m\mathfrak{z}'' = -2\lambda\mathfrak{z} - 2m\eta'\omega\cos\Delta - mG \ldots\ldots\ldots \quad (408, c)$$

Помноживъ первое изъ нихъ на $\mathfrak{x}'$, второе — на η', третье — на $\mathfrak{z}'$ и сложивъ, получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{mu^2}{2}\right)}{dt} = -mG\frac{d\mathfrak{z}}{dt}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (409)$$

такъ какъ:

$$-2\lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \eta\eta' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}') = 0,$$

потому что точка остается на поверхности сферы. Уравненіе (409) имѣетъ интегралъ:

$$\frac{u^2}{2} = h - G\mathfrak{z}\ ^{*)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (410)$$

Исключивъ теперь λ изъ первыхъ двухъ уравненій (408, a) и (408, b), получимъ:

$$\frac{d(\mathfrak{x}\eta' - \eta\mathfrak{x}')}{dt} = \omega\sin\Delta\,\frac{d(\mathfrak{x}^2 + \eta^2)}{dt} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}'\omega\cos\Delta.$$

---

*) Это интегралъ приближенныхъ дифференціальныхъ уравненій (408); не трудно убѣдиться, что интегралъ точныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{mu^2}{2} = H + mg\frac{R^2}{\rho} + \frac{m\omega^2}{2}(\mathfrak{z}^2 + \eta^2) \ldots\ldots \quad (410\ \text{bis})$$

Если отклоненія маятника отъ вертикальной линіи столь малы, что можно пренебречь членами, заключающими вторыя степени угла отклоненія, сравнительно съ членами, заключающими только первыя степени этого угла, то можно будетъ въ предыдущемъ уравненіи отбросить членъ, заключающій $\mathfrak{z}'$. Въ самомъ дѣлѣ, выразимъ прямоугольныя координаты движущейся точки въ сферическихъ координатахъ l, φ, ψ:

$$\mathfrak{x}=l\sin\varphi\cos\psi,\quad \eta=l\sin\varphi\sin\psi,\quad \mathfrak{z}=-l\cos\varphi,$$

тогда предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d(l^2\sin^2\varphi\,.\,\psi')}{dt}=2l^2\omega\varphi'(\cos\varphi\sin\varphi\sin\Delta+\sin^2\varphi\cos\Delta\cos\psi);$$

замѣнивъ здѣсь $\sin\varphi$ — чрезъ φ и $\cos\varphi$ — чрезъ 1, увидимъ, что вторая часть этого уравненія получитъ такой видъ:

$$2l^2\omega\varphi'(\varphi\sin\Delta+\varphi^2\cos\Delta\cos\psi);$$

а потому вторымъ членомъ этой части можно пренебречь.

Отбросивъ членъ, заключающій $\mathfrak{z}'$, получимъ другой изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія маятника:

$$(\mathfrak{x}\eta'-\eta\mathfrak{x}')=C+(\mathfrak{x}^2+\eta^2)\omega\sin\Delta;\quad\ldots\ldots\ldots\ (411)$$

но не надо забывать, что этотъ интегралъ найденъ при предположеніи, что отклоненія маятника отъ вертикальной линіи весьма малы.

Если выразимъ прямоугольныя координаты въ сферическихъ, то первые интегралы (410) и (411) получатъ такой видъ:

$$l^2((\varphi')^2+\sin^2\varphi(\psi')^2)=2Gl\cos\varphi+2h\ldots\ldots\ (412)$$

$$l^2\sin^2\varphi\,.\,\psi'=C+l^2\omega\sin\Delta\sin^2\varphi\ldots\ldots\ldots\ (413)$$

Въ этихъ уравненіяхъ пренебрежемъ третьими и высшими степенями угла φ и дальнѣйшія интегрированія произведемъ для слѣдующихъ двухъ частныхъ случаевъ.

1) Въ начальный моментъ маятникъ отклоненъ въ плоскости $\psi=0$ на малый уголъ φ_0, причемъ матерьяльной точкѣ сообщена слѣдующая относительная скорость u_0 по параллели $\varphi=\varphi_0$ къ западу.

$$\varphi'_0=0,\ \ u_0=l\sin\varphi_0\cdot\psi'_0=l\omega\sin\Lambda\sin\varphi_0.$$

Въ этомъ случаѣ постоянныя C и $2h$ будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$C=0,\ \ 2h=l^2\omega^2\sin^2\Lambda\sin^2\varphi_0-2Gl\cos\varphi_0;$$

уравненіе (413) приметъ видъ:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}-\omega\sin\Lambda\right)\sin^2\varphi=0;$$

откуда слѣдуетъ:

$$\psi'=\omega\sin\Lambda;\ \ \psi=t\omega\sin\Lambda.$$

Уравненіе (412) получитъ вслѣдствіе этого слѣдующій видъ:

$$(\varphi')^2=2\frac{G}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)+\omega^2\sin^2\Lambda(\sin^2\varphi_0-\sin^2\varphi),$$

или, пренебрегая кубами и высшими степенями φ:

$$(\varphi')^2=\varepsilon^2(\varphi_0^2-\varphi^2);\ \ \varepsilon=\sqrt{\frac{G}{l}+\omega^2\sin^2\Lambda}.$$

Отсюда видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0, а потому φ' должна имѣть, въ началѣ движенія, знакъ отрицательный.

$$\frac{-d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}}=\varepsilon dt;$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$\varphi=\varphi_0\cos\varepsilon t.$$

Стало быть, движеніе точки совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi=\varphi_0\cos\varepsilon t,\ \ \psi=t\omega\sin\Lambda,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (414)$$

то есть *колебанія маятника совершаются въ вертикальной*

плоскости, которая равномѣрно вращается съ угловою скоростью $\omega \sin \Delta$ *вокругъ вертикальной линіи: на сѣверномъ полушаріи вращеніе совершается по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ, на южномъ — обратно* *).

2) Начальное положеніе маятника то же самое, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, но начальная относительная скорость равна нулю:

$$\varphi'_0=0,\ \psi'_0=0,\ u_0=0.$$

Въ этомъ случаѣ:

$$C=-l^2\omega\sin\Delta\sin^2\varphi_0,\quad 2h=-2Gl\cos\varphi_0.$$

Дифференціальныя уравненія будутъ:

$$\psi'=\omega\sin\Delta\left(1-\frac{\sin^2\varphi_0}{\sin^2\varphi}\right)$$

$$(\varphi')^2=2\frac{G}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)-\frac{\omega^2\sin^2\Delta}{\sin^2\varphi}(\sin^2\varphi-\sin^2\varphi_0)^2.$$

Послѣднее уравненіе, если пренебречь кубами и высшими степенями φ, получитъ слѣдующій видъ:

$$(\varphi\varphi')^2=\varepsilon^2(\varphi_0{}^2-\varphi^2)(\varphi^2-\varphi_1{}^2),\ \ldots\ldots\ldots \quad (415)$$

гдѣ:

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{G}{l}+\omega^2\sin^2\Delta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (416)$$

$$\varphi_1=\frac{\omega\varphi_0\sin\Delta}{\varepsilon}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (417)$$

Изъ уравненія (415) видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0 и не можетъ быть менѣе φ_1, поэтому можно положить:

$$\varphi^2=\varphi_0{}^2-(\varphi_0{}^2-\varphi_1{}^2)\sin^2\eta;\ \ldots\ldots\ldots \quad (418)$$

---

*) Продолжительность одного розмаха равна

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{G}{l}+\omega^2\sin^2\Delta}}\quad \text{или}\quad \pi\sqrt{\frac{l}{G}},$$

такъ какъ ω^2 есть ничтожная дробь сравнительно съ $\frac{G}{l}$.

тогда уравненіе (415) получитъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$(\eta')^2=\varepsilon^2,\quad \eta'=\pm\varepsilon;$$

изъ этихъ двухъ знаковъ мы выберемъ верхній, вслѣдствіе чего η будетъ непрерывно возрастать отъ своего начальнаго значенія $\eta_0=0$; возрастаніе η будетъ равномѣрное:

$$\eta=\varepsilon t.$$

Дифференціальное уравненіе, заключающее ψ', получитъ такой видъ:

$$d\psi=\omega dt\sin\Lambda-\frac{\omega\sin\Lambda}{\varepsilon}\frac{\varphi_0^2}{\varphi^2}d\eta$$

$$d\psi=\omega dt\sin\Lambda-\frac{\omega\sin\Lambda}{\varepsilon}\frac{d\,\mathrm{tg}\,\eta}{\left(1+\frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2}\mathrm{tg}^2\eta\right)};$$

отсюда, интегрируя, получимъ:

$$\psi=\omega t\sin\Lambda-\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\sin\Lambda\,\mathrm{tg}\,\eta\right).$$

Стало быть движеніе маятника въ этомъ случаѣ совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi=\varphi_0\sqrt{\cos^2\varepsilon t+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\sin^2\Lambda\sin^2\varepsilon t},\ \ldots\ldots\ (419)$$

$$\frac{\omega}{\varepsilon}\sin\Lambda\,\mathrm{tg}\,\varepsilon t=\mathrm{tg}\,(\omega t\sin\Lambda-\psi)\ \ldots\ldots\ (420)$$

Представимъ себѣ вертикальную плоскость, вращающуюся вокругъ вертикальной линіи съ угловою скоростью $\omega\sin\Lambda$ по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ; означимъ черезъ θ уголъ:

$$\theta=\psi-\omega t\sin\Lambda,$$

составляемый съ этою вертикальною плоскостью тою вертикальною плоскостью, въ которой заключается нить маятника; какъ видно изъ уравненія (420), этотъ уголъ θ — отрицательный.

Введя уголъ θ, можно исключить εt изъ выраженій (419) и (420); получимъ:

$$\frac{\varphi^2 \cos^2 \theta}{\varphi_0^2} + \frac{\varphi^2 \sin^2 \theta}{\varphi_1^2} = 1.$$

Замѣнивъ здѣсь малые углы φ_0, φ, φ_1 ихъ синусами, получимъ уравненіе:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(421)}$$

гдѣ:

$$\xi_1 = l \sin\varphi \cos\theta, \quad \eta_1 = l \sin\varphi \sin\theta; \quad a = l \sin\varphi_0, \quad b = l \sin\varphi_1.$$

Чтобы объяснить себѣ значеніе уравненія (421), представимъ себѣ горизонтальную плоскость $\Xi_1 Ю \Upsilon_1$ (черт. 26), вращающуюся вокругъ вертикальной оси $ЮЗ$ съ угловою скоростью $\omega \sin \Lambda$ въ сторону, указанную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ. Оси $Ю\Xi_1$ и $Ю\Upsilon_1$ неизмѣнно связаны съ этою вращающеюся плоскостью, причемъ ось Ξ_1 составляетъ съ осью $\mathfrak{X}$ уголъ $t\omega \sin \Lambda$. Величины ξ_1 и η_1 суть координаты, относительно осей Ξ_1 и Υ_1, проэкціи M движущейся точки на горизонтальную плоскость.

Уравненіе (421) выражаетъ, что точка M чертитъ на вращающейся плоскости $\Xi_1 \Upsilon_1$ эллипсъ, большая полуось котораго, равная $l \sin \varphi_0$, направлена по оси Ξ_1, а малая полуось равна:

$$b = \frac{\omega \sin \Lambda}{\sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Lambda}} \, l \sin \varphi_0.$$

Движеніе по этому эллипсу совершается въ сторону, указанную неоперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ.

§ 55. Положенія равновѣсія несвободной матерьяльной точки.

Матерьяльная точка, находящаяся на данной неподвижной поверхности или линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ поверхности или линіи, въ которыхъ всѣ силы, приложенныя къ точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такія положенія матерьяльной

несвободной точки называются *положеніями равновѣсія ея на данной неподвижной поверхности или линіи*.

Равенства, выражающія, что всѣ силы, приложенныя къ несвободной покоющейся матерьяльной точкѣ, взаимно уравновѣшиваются, называются *уравненіями равновѣсія силъ*, приложенныхъ къ этой точкѣ.

Изъ этихъ уравненій выведемъ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы матерьяльная точка могла имѣть положенія равновѣсія на данной поверхности или линіи; эти условія мы будемъ называть *условіями равновѣсія*.

Если эти условія удовлетворены, то изъ тѣхъ же уравненій опредѣлятся положенія равновѣсія матерьяльной точки.

Условія равновѣсія различны, смотря по степени ограниченія свободы движенія точки и смотря потому, существуетъ ли треніе, или нѣтъ.

Поэтому мы разсмотримъ отдѣльно различныя степени стѣсненія свободы матерьяльной точки.

1) *Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной удерживающей поверхности.*

Пусть

$$f(x, y, z)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (422)$$

есть уравненіе поверхности; поверхность гладкая, то есть, нѣтъ тренія между нею и матерьяльною точкою.

Въ тѣхъ точкахъ этой поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ, задаваемыя силы должны уравновѣшиваться съ реакціею поверхности; поэтому уравненія равновѣсія будутъ:

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0 \ldots\ldots (423)$$

Исключивъ λ изъ этихъ уравненій, получимъ два уравненія:

$$X\frac{\partial f}{\partial y}-Y\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ Y\frac{\partial f}{\partial z}-Z\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

или

$$\frac{X}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{Y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}=\frac{Z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (424)$$

Эти два равенства выражаютъ условія равновѣсія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.

Условіе, выражаемое равенствами (424), состоитъ въ томъ, что *равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ должна быть нормальна къ поверхности въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.*

Если задаваемыя силы не удовлетворяютъ этому условію ни въ какой точкѣ поверхности, то матерьяльная точка не имѣетъ вовсе положеній равновѣсія на этой поверхности при дѣйствіи на нее такихъ силъ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка не можетъ находиться въ равновѣсіи на гладкой плоскости, наклонной къ горизонту.

Тѣ точки поверхности, въ которыхъ условія (424) удовлетворяются, суть положенія равновѣсія матерьяльной точки; координаты такихъ точекъ опредѣлятся изъ равенствъ (424) и изъ уравненія (422).

Напримѣръ, положенія равновѣсія тяжелой точки, находящейся на поверхности удерживающей сферы, опредѣлятся изъ равенствъ:

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

$$2mgx=0,\ 2mgz=0,$$

если положительная ось $Y^{\text{въ}}$ направлена вертикально внизъ.

Эти уравненія имѣютъ слѣдующія два рѣшенія:

$$1)\ x=0,\ z=0,\ y=+R$$

$$2)\ x=0,\ z=0,\ y=-R,$$

слѣдовательно, положеній равновѣсія въ этомъ случаѣ два, одно на самой нижней, другое на самой верхней точкахъ сферы.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказывается, что положеній равновѣсія безчисленное множество и что они образуютъ сплошныя линіи на поверхности или занимаютъ собою цѣлыя площади на поверхности и даже иногда всю поверхность; напримѣръ:

Примѣръ 42-й. Матерьяльная точка, находящаяся на той же сферической поверхности и подверженная силѣ тяжести и силѣ:

$$m\mu^2\sqrt{x^2+z^2},$$

притягивающей ее къ оси $Y^{овъ}$, будетъ имѣть положенія равновѣсія, опредѣляемыя изъ равенствъ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$\frac{-\mu^2 x}{2x}=\frac{g}{2y}=\frac{-\mu^2 z}{2z},$$

или:

$$x(g+\mu^2 y)=0,\quad z(g+\mu^2 y)=0.$$

Эти положенія равновѣсія слѣдующія:

1) точка: $x=0$, $z=0$, $y=+R$,

2) точка: $x=0$, $z=0$, $y=-R$,

и 3) всякая изъ точекъ параллельнаго круга:

$$y=-\frac{g}{\mu^2},\quad x^2+z^2=R^2-\frac{g^2}{\mu^4}.$$

Тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на горизонтальной плоскости, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ плоскости.

Матерьяльная точка, находящаяся на удерживающей сферѣ и притягиваемая къ центру сферы силою пропорціональною разстоянію отъ него, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ сферы.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, имѣютъ потенціалъ U, то уравненія (423) примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0; \ldots \quad (425)$$

исключивъ изъ нихъ λ, получимъ уравненія:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}p=0,\quad \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}q=0,\ldots\ldots\ldots(426)$$

гдѣ:

$$p=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)},\quad q=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

Изъ уравненій (426) и уравненія поверхности (422) опредѣлятся координаты положеній равновѣсія матерьяльной точки.

Пусть M_e есть одна изъ такихъ точекъ, U_e численное значеніе, получаемое функціею U въ этой точкѣ; x_e, y_e, z_e — координаты этой точки, удовлетворяющія уравненію поверхности (422) и уравненіямъ (426).

Пусть M есть другая точка поверхности, безконечно-близкая къ M_e; координаты этой точки M: $x_e+\delta x$, $y_e+\delta y$, $z_e+\delta z$ также удовлетворяютъ уравненію (422), а потому:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,\ldots\ldots\ldots(427)$$

гдѣ въ производныя подставлены координаты точки M_e.

Изъ равенства (427) слѣдуетъ, что

$$\delta z=p\delta x+q\delta y\ldots\ldots\ldots(428)$$

Въ точкѣ M потенціальная функція U имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_e+\delta U+\delta^2 U+\ldots,$$

гдѣ

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z$$

и гдѣ въ производныя подставлены координаты x_e, y_e, z_e точки M.

Кромѣ того, δz связано съ δx и δy равенствомъ (428), поэтому

$$\delta U=\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}p\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}q\right)\delta y;$$

а такъ какъ координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяютъ равенствамъ (426), то въ этой точкѣ:

$$\delta U = 0,$$

если только δx, δy, δz удовлетворяютъ равенству (427).

Изъ этого слѣдуетъ, что U_0 есть, либо максимумъ тѣхъ значеній, которыя получаетъ U на поверхности (422), либо минимумъ этихъ значеній, либо такое значеніе, для котораго

$$\delta U = 0$$

при всякихъ перемѣщеніяхъ изъ этой точки M_0 по поверхности.

И такъ, *если матерьяльная точка, подверженная силамъ, имѣющимъ потенціалъ U, находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то положенія равновѣсія матерьяльной точки суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ значенія функціи U на поверхности имѣютъ максимумъ или минимумъ, и вообще всѣ тѣ точки поверхности, въ которыхъ*

$$\delta U = 0.$$

Напримѣръ:

Примѣръ 43-й. Матерьяльная точка, находящаяся на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (429)$$

и притягиваемая къ центру эллипсоида силою, пропорціональною разстоянію отъ этой точки, имѣетъ положенія равновѣсія во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ:

$$\delta U = \delta\left(-\frac{\mu^2}{2} r^2\right) = -\mu^2(x\delta x + y\delta y + z\delta z) = 0, \ldots \quad (430)$$

причемъ δx, δy, δz удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{x\delta x}{a^2} + \frac{y\delta y}{b^2} + \frac{z\delta z}{c^2} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (431)$$

а x, y, z, — уравненію (429).

Такихъ точекъ шесть:

Двѣ — на концахъ малой оси, въ которыхъ значенія функціи U на поверхности эллипсоида имѣютъ максимумъ.

Двѣ — на концахъ большой оси, въ которыхъ U имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности эллипсоида.

Кромѣ того, точки, находящіяся на концахъ средней оси, суть также положенія равновѣсія; въ самомъ дѣлѣ, исключивъ изъ (430) и (431) произведеніе $y\delta y$, получимъ слѣдующее выраженіе для δU:

$$\delta U = -\mu^2\left(\frac{(a^2-b^2)}{a^2}x\delta x + \frac{(c^2-b^2)}{c^2}z\delta z\right),$$

изъ него слѣдуетъ, что δU обращается въ нуль въ точкахъ:

$$x=0,\ z=0,\ y=\pm b.$$

Линіи пересѣченія поверхностей уровня функціи $U(x, y, z)$ съ поверхностью (422) называются *линіями уровня* значеній функціи U на этой поверхности.

Мы знаемъ (стр. 113), что сила, имѣющая потенціалъ U и приложенная къ матерьяльной точкѣ, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ положеніе, занимаемое матерьяльною точкою; величина силы равна ΔU.

Изъ этого слѣдуетъ, что если матерьяльная точка будетъ находиться на поверхности (422), то сила ΔU будетъ перпендикулярна къ той линіи уровня, на которой находится матерьяльная точка; сила эта направлена въ сторону поверхностей уровня, имѣющихъ параметры бóльшіе, чѣмъ параметръ C той линіи уровня, на которой находится матерьяльная точка. Проэкція этой силы на касательную плоскость къ поверхности будетъ, поэтому, перпендикулярна къ линіи уровня C и будетъ направлена въ ту сторону, гдѣ находятся на поверхности линіи уровня съ параметрами, большими C.

Если въ точкѣ M_0 значенія потенціальной функціи U на поверхности имѣютъ наибольшую величину U_0, то во всѣхъ точкахъ поверхности, безконечно-близкихъ къ M, функція U имѣетъ численныя значенія, меньшія U_0; такъ какъ въ точкѣ M_0 вели-

чина δU обращается въ нуль, то численное значеніе функціи U въ точкѣ M будетъ:

$$U_{\circ}+\delta^2 U+\ldots\ldots,$$

а такъ какъ $U_{\circ}$ есть максимумъ, то δU *должна быть отрицательною* для всякихъ безконечно-малыхъ перемѣщеній $\overline{M_{\circ}M}$ по поверхности.

Изъ этого слѣдуетъ, что если $U_{\circ}$ есть максимумъ, то линіи уровня, ближайшія къ точкѣ $M_{\circ}$, окружаютъ эту точку со всѣхъ сторонъ и имѣютъ параметры меньшіе $U_{\circ}$.

Поэтому во всѣхъ точкахъ поверхности, сосѣднихъ съ точкою $M_{\circ}$, проэкція силы на касательную плоскость стремится приблизить матерьяльную точку къ точкѣ $M_{\circ}$; напримѣръ, на чертежѣ 27-мъ, на которомъ изображены линіи уровня потенціальной функціи:

$$U=-\frac{\mu^2}{2}r^2$$

на поверхности эллипсоида (примѣръ 43-й), точка C, находящаяся на концѣ малой оси эллипсоида, есть мѣсто наибольшаго значенія функціи U; эта точка окружена линіями уровня, параметры которыхъ менѣе величины

$$U_{\circ}=-\frac{\mu^2}{2}c^2;$$

притомъ, чѣмъ далѣе линія уровня отъ точки C, тѣмъ менѣе ея параметръ. Если помѣстить матерьяльную точку въ одну изъ точекъ M', M'', M''', ... по сосѣдству съ точкою C, то проэкція силы на матерьяльную плоскость будетъ направлена внутрь площади, ограничиваемой линіею уровня и будетъ, слѣдовательно, стремиться приблизить матерьяльную точку къ точкѣ C.

Положимъ, что $U_{\circ}$ есть максимумъ значеній функціи U на данной поверхности; если матерьяльная точка, находившаяся въ покоѣ въ точкѣ $M_{\circ}$, будетъ отклонена въ точку M_0 поверхности, весьма близкую къ $M_{\circ}$, и здѣсь ей будетъ сообщена весьма малая

начальная скорость v_0, то она станетъ совершать на поверхности движеніе, удовлетворяющее закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=U-U_0.$$

Такъ какъ U и U_0 менѣе U_e, то:

$$U_0=U_e-k_0^2,\quad U=U_e-k^2,$$

поэтому:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}+k_0^2-k^2\ldots\ldots\ldots\ldots (432)$$

Изъ этой формулы видно, что матерьяльная точка не можетъ вступить въ тѣ мѣста поверхности, въ которыхъ

$$k^2>\frac{mv_0^2}{2}+k_0^2;$$

слѣдовательно, точка будетъ совершать свое движеніе вблизи точки M_e, не выходя за предѣлы площади, ограниченной тою линіею уровня, параметръ которой равенъ:

$$U_1=U_e-\left(\frac{mv_0^2}{2}+k_0^2\right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенціальная функція имѣетъ максимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія устойчиваго равновѣсія* матерьяльной точки.

Напротивъ, тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенціальная функція имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія неустойчиваго равновѣсія* матерьяльной точки. Въ каждой такой точкѣ:

$$\delta U=0,\quad \delta^2 U>0,$$

для всякихъ безконечно-малыхъ перемѣщеній по поверхности; поэтому, въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ такою точкою, линія

уровня имѣютъ параметры бóльшіе этого минимума и притомъ каждая линія уровня окружаетъ точку минимума со всѣхъ сторонъ (см. на чертежѣ 27-мъ, линіи уровня, окружающія точку A, находящуюся на концѣ большой полуоси эллипсоида).

Въ сосѣдствѣ съ такою точкою неустойчиваго равновѣсія, сила, имѣющая потенціалъ U, стремится удалить матерьяльную точку отъ положенія равновѣсія (см. черт. 27-й).

Въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ $\delta U=0$, но величина $\delta^2 U$ имѣетъ знакъ положительный или отрицательный, смотря по направленію перемѣщенія, въ такихъ точкахъ положеніе равновѣсія устойчиво для однихъ перемѣщеній и неустойчиво—для другихъ.

Примѣромъ такихъ положеній равновѣсія можетъ служить, въ примѣрѣ 43-мъ, точка B (чертежъ 27-й), находящаяся на концѣ средней оси эллипсоида. Въ сосѣдствѣ съ этою точкою линіи уровня имѣютъ слѣдующее расположеніе.

Черезъ самую точку B проходятъ два круговыя сѣченія kBk' и $k_1Bk'_1$ эллипсоида, это суть линіи уровня съ параметромъ:

$$U_b = -\frac{\mu^2}{2} b^2;$$

внутри угловъ k_1Bk и $k'Bk'_1$ находятся линіи уровня съ параметрами большими U_b, внутри же угловъ $k'Bk_1$ и k'_1Bk — линіи уровня съ параметрами меньшими U_b.

Если матерьяльная точка будетъ отклонена изъ точки B въ точку g (см. черт. 27), то сила, приложенная къ ней, будетъ стремиться удалить ее отъ B; напротивъ, при отклоненіи матерьяльной точки въ точку h, сила будетъ стремиться приблизить ее къ B.

Подобныя точки причисляются къ положеніямъ неустойчиваго равновѣсія.

Итакъ, можемъ сказать, что *если матерьяльная точка, подверженная силамъ имѣющимъ потенціалъ U, находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то поло-*

женія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U=0,\ \delta^2 U<0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (433)$$

Въ каждомъ изъ положеній равновѣсія реакція поверхности равна и противоположна равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, когда матерьяльная точка находится въ покоѣ.

2) *Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной неудерживающей поверхности.*

Реакція такой поверхности не можетъ быть отрицательною, а потому матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ только въ тѣхъ точкахъ неудерживающей поверхности, въ которыхъ равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ нормальна къ поверхности и направлена *по отрицательной нормали, или равна нулю.*

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой неподвиженъ, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія: въ самой нижней точкѣ сферы радіуса, равнаго длинѣ нити.

Обратно, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности неподвижнаго непроницаемаго шара, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія въ самой верхней точкѣ шара.

Если задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ U, то положенія равновѣсія на неудерживающей поверхности находятся въ такихъ точкахъ ея, въ которыхъ:

$$\delta U=0$$

для безконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности и притомъ

$$\delta U\leqslant 0$$

для безконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки въ свободную сторону пространства.

Положенія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U=0,\ \delta^2 U<0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (434)$$

для перемѣщеній вдоль по поверхности, и притомъ

$$\delta U < 0, \text{ или } \delta U = 0, \ \delta^2 U < 0 \ldots\ldots\ldots (435)$$

для перемѣщеній въ свободную сторону пространства.

Напримѣръ, положеніе равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на сферѣ, не удерживающей внутрь своей полости, есть положеніе устойчивое, потому что въ этой точкѣ, для перемѣщеній по поверхности сферы:

$$\delta U = mg\delta y = 0, \ \delta^2 U = mg\delta^2 y < 0 \text{ *)},$$

для всякихъ же перемѣщеній въ свободную сторону y уменьшается, а слѣдовательно, для такихъ перемѣщеній:

$$\delta U = mg\delta y < 0.$$

Положеніе же равновѣсія на верхней точкѣ непроницаемаго шара есть положеніе неустойчивое, потому что въ этой точкѣ:

$$x = 0, \ z = 0, \ y = -l$$

$$\delta U = mg\delta y = 0, \ \delta^2 U = mg\frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2}{l} > 0$$

для перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ опредѣленія положеній равновѣсія матерьяльной точки на удерживающихъ и неудерживающихъ поверхностяхъ.

Примѣръ 44-й. Тяжелая матерьяльная точка прикрѣплена къ одному концу гибкой нерастяжимой нити; эта нить перекинута черезъ безконечно-

---

*) $$y^2 = l^2 - x^2 - z^2; \ y\delta y = -x\delta x - z\delta z$$

$$y\delta^2 y = -(\delta y)^2 - (\delta x)^2 - (\delta z)^2$$

Въ точкѣ: $x = 0$, $z = 0$, $y = l$:

$$\delta y = 0, \ \delta^2 y = -\frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2}{l} < 0.$$

малый блокъ съ неподвижною осью и имѣетъ на другомъ концѣ гирю, масса которой равна Q, между тѣмъ, какъ масса матерьяльной точки равна m. Опредѣлить положенія равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, составляющей уголъ J съ горизонтомъ и проходящей черезъ точку K (черт. 28) вертикальной линіи, проведенной внизъ черезъ центръ O блока; разстояніе OK равно c.

Натяженіе нити или реакцію ея, приложенную къ матерьяльной точкѣ M, можно разсматривать, какъ силу постоянной величины gQ, направленную къ точкѣ O.

Въ этомъ случаѣ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ:

Точка M можетъ находиться въ равновѣсіи только въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точку O и перпендикулярной къ наклонной плоскости; въ этой плоскости она будетъ находиться въ покоѣ въ такомъ положеніи, при которомъ проэкція силы тяжести точки M на направленіе ML (черт. 28) равна проэкціи реакціи нити на направленіе MK; означая уголъ OMK чрезъ φ, будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$gQ\cos\varphi = mg\sin J,$$

которое должно быть удовлетворено въ положеніяхъ равновѣсія матерьяльной точки.

Изъ этого уравненія опредѣлится величина косинуса угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{m}{Q}\sin J;$$

чтобы рѣшеніе было возможно, необходимо, чтобы Q было болѣе $m\sin J$.

Если наклонная плоскость не удерживаетъ матерьяльную точку отъ перемѣщеній вверхъ, то, для равновѣсія точки на плоскости, необходимо, чтобы было

$$mg\cos J \geqslant gQ\sin\varphi.$$

Это условіе будетъ удовлетворено во всякомъ случаѣ, если φ отрицательное, то есть, если точка O ниже точки K; если же O выше точки K, то оно будетъ удовлетворено въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{m^2}{Q^2}\cos^2 J \geqslant \sin^2\varphi,$$

то есть, когда:

$$\frac{m^2}{Q^2}\cos^2 J \geqslant 1 - \frac{m^2}{Q^2}\sin^2 J,\quad \frac{m}{Q} \geqslant 1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что на неудерживающей плоскости равновѣсіе возможно при условіи, что Q не болѣе m и не менѣе $m \sin J$.

Если равновѣсіе возможно, то оно будетъ навѣрно устойчивое. Въ самомъ дѣлѣ, при перемѣщеніи точки M по $\overline{MK}$ уголъ φ увеличивается, а, слѣдовательно, проэкція силы gQ на это направленіе уменьшается, между тѣмъ, какъ проэкція силы mg на направленіе $\overline{ML}$ остается постоянною; поэтому дѣйствіе послѣдней силы становится преобладающимъ и матерьяльная точка побуждается къ возвращенію назадъ. Напротивъ, при перемѣщеніи точки по $\overline{ML}$ уголъ φ уменьшается, а, слѣдовательно, дѣйствіе силы gQ становится преобладающимъ надъ дѣйствіемъ силы mg; поэтому и при такомъ перемѣщеніи, силы побуждаютъ матерьяльную точку возвратиться въ положеніе равновѣсія.

Примѣръ 45-й. Положенія равновѣсія тяжелой матерьяльной точки на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если къ матерьяльной точкѣ, кромѣ силы тяжести, приложена сила постоянной величины gQ, направленная къ центру эллипсоида; ось $Z^{овъ}$ предполагается направленною вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U=g(mz-Qr);\ \ r^2=x^2+y^2+z^2;$$

а поэтому:

$$\delta U=g(m\delta z-Q\delta r);\ \ \delta^2 U=g(m\delta^2 z-Q\delta^2 r),$$

гдѣ:

$$z\delta z=-\frac{c^2}{a^2}x\delta x-\frac{c^2}{b^2}y\delta y;$$

$$z\delta^2 z+(\delta z)^2=-\frac{c^2}{a^2}(\delta x)^2-\frac{c^2}{b^2}(\delta y)^2,$$

$$\delta r=\frac{x\delta x+y\delta y+z\delta z}{r}=\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x\delta x}{r}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y\delta y}{r}$$

$$\delta^2 r=\frac{(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2+z\delta^2 z}{r}-\frac{(\delta r)^2}{r}=$$

$$=\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{(\delta x)^2}{r}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{(\delta y)^2}{r}-\frac{(\delta r)^2}{r}.$$

Исключивъ δz изъ δU, получимъ:

$$\delta U = -g\left[\left(\frac{m}{z}c^2 + \frac{Q}{r}(a^2 - c^2)\right)\frac{x\delta x}{a^2} + \left(\frac{m}{z}c^2 + \frac{Q}{r}(b^2 - c^2)\right)\frac{y\delta y}{b^2}\right],$$

гдѣ r означаетъ положительную величину разстоянія точки отъ центра эллипсоида.

Мы найдемъ слѣдующія положенія равновѣсія:

1) Точки $x=0$, $y=0$ $z=\pm c$; въ нихъ:

$$\delta^2 U = -\frac{g}{c}\left[\left((a^2 - c^2)Q \pm c^2 m\right)\left(\frac{\delta x}{a}\right)^2 + \left((b^2 - c^2)Q \pm c^2 m\right)\left(\frac{\delta y}{b}\right)^2\right],$$

гдѣ знаки $+$ соотвѣтствуютъ нижней, а знаки $(-)$ — верхней точкѣ; слѣдовательно, нижняя точка есть всегда положеніе устойчиваго равновѣсія, верхняя же — только тогда, когда

$$Q \geqq \frac{c^2 m}{b^2 - c^2}.$$

2) точки $x=0$,

$$\frac{z_1}{c} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}}\frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + Q^2(b^2 - c^2)}}, \quad \frac{y}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}};$$

здѣсь:

$$\delta^2 U = -g\left[(a^2 - b^2)\frac{Q(\delta x)^2}{ra^2} - (b^2 - c^2)\frac{Qc^2}{r^3}\frac{y^2(\delta y)^2}{z^2 b^2}\right],$$

поэтому въ этихъ точкахъ положеніе равновѣсія не представляетъ полной устойчивости.

3) Точки:

$$y=0, \quad \frac{z_2}{e} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}\frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + Q^2(a^2 - e^2)}}$$

$$\frac{x}{a} = \pm\sqrt{1 - \frac{z_2^2}{c^2}},$$

въ которыхъ

$$\delta^2 U = gQ\left[(a^2 - b^2)\frac{(\delta y)^2}{rb^2} + (a^2 - c^2)\frac{c^2 x^2(\delta x)^2}{r^3 z^2 a^2}\right];$$

положенія равновѣсія — неустойчивыя.

3) *Матерьяльная точка находится на неподвижной негладкой поверхности.*

Для того, чтобы матерьяльная точка могла оставаться въ покоѣ на негладкой неподвижной поверхности, нужно, чтобы сила тренія, приложенная къ матерьяльной точкѣ, уравновѣшивалась съ проэкціею равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ на касательную плоскость. Величина силы тренія равна $\varkappa\sqrt{\mathfrak{N}^2}$, гдѣ $\sqrt{\mathfrak{N}^2}$ есть положительно взятая величина нормальной реакціи поверхности, а $\varkappa$ есть численный коэфиціентъ, заключающійся между нулемъ и наибольшимъ коэфиціентомъ k_1 тренія покоющейся матерьяльной точки о неподвижную данную поверхность. Реакція $\mathfrak{N}$ по направленію положительной нормали равна проэкціи равнодѣйствующей F задаваемыхъ силъ на направленіе отрицательной нормали.

На удерживающей поверхности реакція $\mathfrak{N}$ можетъ быть положительною или отрицательною; при равновѣсіи матерьяльной точки на такой поверхности:

$$F\sin(F,N)=\varkappa\sqrt{\mathfrak{N}^2},\quad -F\cos(F,N)=\mathfrak{N},$$

гдѣ $\varkappa$ не менѣе нуля и не болѣе k_1.

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\operatorname{tg}(F,N)=\pm\varkappa,\quad \varkappa\leqq k_1,\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(436)}$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ положительною нормалью, знакъ $(-)$ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ отрицательною нормалью.

Число или дробь k_1 можно разсматривать, какъ тангенсъ нѣкотораго угла ε_1, называемаго *угломъ тренія* между данною поверхностью и данною матерьяльною точкою при взаимномъ ихъ покоѣ.

Изъ предыдущаго видно, что, для равновѣсія матерьяльной точки на неподвижной негладкой удерживающей поверхности, необходимо, чтобы острый уголъ, составляемый направленіемъ силы F съ положительною или отрицательною нормалью, былъ не болѣе ε_1, гдѣ

$$k_1=\operatorname{tg}\varepsilon_1\dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(437)}$$

Реакція неудерживающей поверхности не можетъ быть отрицательною; поэтому, на негладкой неудерживающей поверхности матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ мѣстахъ поверхности, въ которыхъ направленіе силы F составляетъ съ отрицательною нормалью уголъ, не большій ε_1.

Представимъ себѣ коническую поверхность, вершина которой находится въ какой либо точкѣ M данной неудерживающей поверхности, и производящія которой составляютъ острый уголъ ε_1 съ отрицательною нормалью къ поверхности. Точка M будетъ положеніемъ равновѣсія матерьяльной точки, если сила F, приложенная къ послѣдней, будетъ имѣть направленіе, не выходящее за предѣлы вышеозначеннаго конуса; такой конусъ называется конусомъ тренія.

Вслѣдствіе такого простора условій равновѣсія, мѣста положеній равновѣсія матерьяльной точки на негладкой поверхности занимаютъ на ней цѣлые пояса или площади, во всѣхъ точкахъ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности твердаго негладкаго неподвижнаго шара, можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ направленіе нормали, проведенной къ центру шара, составляетъ съ направленіемъ силы тяжести уголъ не большій ε_1; всѣ такія точки находятся на томъ сегментѣ сферической поверхности, который выше уровня:

$$y = -R\cos\varepsilon_1,$$

(ось $Y^{овъ}$ направлена вертикально внизъ); матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ этой части поверхности сферы.

Тяжелая матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J, если только уголъ J не болѣе угла ε_1 тренія между покоящеюся матерьяльною точкою и наклонною плоскостью.

Примѣръ. Опредѣлить ту часть поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

всѣ точки которой суть положенія равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на наружной поверхности эллипсоида; положительная ось Zовъ параллельна направленію силы тяжести; коэфиціентъ тренія покоя $k_1=0{,}16$.

Эта часть поверхности заключаетъ въ себѣ самую высшую точку эллипсоида и ограничена линіею пересѣченія поверхности его съ коническою поверхностью:

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{z^2}{c^4}\,0{,}0256.$$

Примѣръ 46-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на наклонной плоскости и притягивается къ точкѣ O (черт. 28) силою, прямопропорціональною разстоянію отъ этой точки; если матерьяльная точка находится въ точкѣ K, то величина этой силы равна gQ, гдѣ Q меньше m (массы матерьяльной точки). Опредѣлить положенія равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, принимая въ разсчетъ треніе.

Примемъ точку K за начало координатныхъ осей, направленныхъ такъ: положительная ось Yовъ внизъ по линіи наибольшаго ската по наклонной плоскости, ось Xовъ горизонтально, ось Zовъ по нормали къ плоскости, вверхъ; тогда координаты точки O будутъ: $x=0$, $y=-c\sin J$, $z=c\cos J$.

Проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X=-Qg\frac{x}{c},\quad Y=mg\sin J-Qg\frac{y+c\sin J}{c}$$

$$Z=-mg\cos J+Qg\cos J.$$

Равновѣсіе матерьяльной точки на плоскости возможно въ тѣхъ положеніяхъ ея, въ которыхъ:

$$-\varkappa Z=\sqrt{X^2+Y^2},\quad \varkappa\leqq\operatorname{tg}\varepsilon_1,$$

или:

$$\varkappa\cos J\left(1-\frac{Q}{m}\right)=\sqrt{\frac{Q^2}{m^2}\frac{x^2}{c^2}+\left(\frac{Q}{m}\frac{y}{c}-\sin J\left(1-\frac{Q}{m}\right)\right)^2}.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри круга:

$$x^2+\left(y-c\sin J\left(\frac{m}{Q}-1\right)\right)^2=\left(\frac{m}{Q}-1\right)^2c^2\cos^2J\operatorname{tg}^2\varepsilon_1.$$

центръ котораго представляетъ положеніе равновѣсія на гладкой наклонной плоскости, а радіусъ равенъ:

$$\left(\frac{m}{Q}-1\right) c \cos J \operatorname{tg} \varepsilon_1.$$

Каждой величинѣ $\varkappa$ соотвѣтствуетъ своя окружность радіуса

$$\varkappa\left(\frac{m}{Q}-1\right) c \cos J.$$

Примѣръ 47-й. Опредѣлить мѣсто положеній равновѣсія въ примѣрѣ 44-мъ, предполагая существованіе силы тренія между наклонною плоскостью и матерьяльною точкою m.

Расположивъ оси координатъ такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, мы найдемъ, что проэкціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X=-Qg\frac{x}{r},\quad Y=mg\left(p\sin J-\frac{Q}{m}\frac{y}{r}\right),\quad Z=-mgp\cos J,$$

$$p=1-\frac{Q}{m}\frac{c}{r},\quad r^2=x^2+y^2+c^2+2cy\sin J.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри кривой линіи:

$$x^2+\left(y-c\sin J\left(\frac{mr}{Qc}-1\right)\right)^2=\left(\frac{mr}{Qc}-1\right)^2 c^2\cos^2 J\operatorname{tg}^2\varepsilon_1.$$

4) *Матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линіи.*

Матерьяльная точка, находящаяся на гладкой неподвижной кривой линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которыхъ проэкція задаваемой силы на касательную къ кривой равна нулю, то есть тамъ, гдѣ:

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (438)$$

Если, при отклоненіи матерьяльной точки изъ ея положенія равновѣсія на удерживающей кривой, сила F побуждаетъ ее возвратиться въ это положеніе, то такое положеніе равновѣсія — устойчивое.

Когда сила F имѣетъ потенціалъ $U(x, y, z)$, то проэкція ея на направленіе касательной къ кривой выразится такъ:

$$\pm F\cos(F,v)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

такъ что, если координаты x, y, z точекъ кривой линіи будутъ выражены функціями отъ s, то будетъ:

$$\pm F\cos(F,v)=\frac{dU}{ds}, \qquad (439)$$

гдѣ верхній знакъ относится къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ скорость направлена въ сторону возрастающихъ s.

Положенія равновѣсія суть тѣ точки кривой линіи, въ которыхъ

$$\frac{dU}{ds}=0; \qquad (440)$$

притомъ положенія устойчиваго равновѣсія суть такія точки кривой, въ которыхъ:

$$\frac{d^2U}{ds^2}<0, \qquad (441)$$

т.-е. тѣ, въ которыхъ значенія, принимаемыя функціею $U(s)$ на кривой линіи, имѣютъ максимумъ.

Примѣръ 48-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на винтовой линіи:

$$x=R\cos\left(\frac{s\cos\alpha}{R}\right),\quad y=R\sin\left(\frac{s\cos\alpha}{R}\right),\quad z=s\sin\alpha,$$

ось которой вертикальна (ось Zовъ направлена снизу вверхъ); матерьяльная точка отталкивается отъ начала координатъ силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія; опредѣлить положенія равновѣсія.

Здѣсь:

$$U=-mgz-\frac{m\mu^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-m\left(gs\sin\alpha+\frac{\mu^2}{\sqrt{R^2+s^2\sin^2\alpha}}\right);$$

$$\frac{dU}{ds}=-mg\sin\alpha\left(1-\frac{\mu^2}{g}\frac{s\sin\alpha}{r^3}\right)$$

$$\frac{d^2U}{ds^2}=m\mu^2\sin^2\alpha\frac{(3R^2-2r^2)}{r^5};\quad r^2=R^2+s^2\sin^2\alpha$$

Первая производная отъ U обращается въ нуль въ тѣхъ точкахъ кривой линіи, въ которыхъ:

$$s = \frac{gr^3}{\mu^2 \sin\alpha};$$

такъ какъ r есть величина положительная, то и s болѣе нуля, слѣдовательно, положенія равновѣсія находятся только на той части кривой линіи, которая выше плоскости XY.

Послѣднее уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$r^6 - \frac{\mu^4}{g^2} s^2 \sin^2\alpha = 0$$

$$(r^2)^3 - \frac{\mu^4}{g^2} r^2 + \frac{\mu^4}{g^2} R^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(443)}$$

Тѣ положительные корни этого уравненія третьей степени, которые не менѣе R^2, опредѣляютъ положенія равновѣсія; такихъ корней можетъ быть только два, такъ какъ при $r^2 = +\infty$ и при $r^2 = R^2$ первая часть уравненія (443) имѣетъ знакъ положительный.

Эти два корня будутъ дѣйствительные, если будетъ удовлетворено условіе:

$$R^2 < \frac{2}{3} r_0^2, \quad r_0^2 = \frac{\mu^2}{g\sqrt{3}}.$$

Величина r_0^2 есть корень производной первой части уравненія (443) по r^2, то есть:

$$3(r_0^2)^2 - \frac{\mu^4}{g^2} = 0;$$

поэтому изъ двухъ корней уравненія (443), бо̀льшихъ R^2, одинъ долженъ быть менѣе, а другой — болѣе r_0^2; означимъ первый черезъ r_1^2, второй — черезъ r_2^2.

Такъ какъ

$$r_2^2 > r_0^2 > \frac{3}{2} R^2,$$

то этотъ корень r_2^2 опредѣляетъ навѣрно положеніе устойчиваго равновѣсія.

Величина и направленіе силы F, приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся въ покоѣ въ одномъ изъ положеній равновѣсія на кривой, представляетъ величину и направленіе давленія,

производимаго точкою на кривую (§ 52); поэтому реакція кривой линіи равна и прямопротивоположна силѣ F.

Если кривая линія есть линія пересѣченія двухъ неподвижныхъ гладкихъ поверхностей:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0,$$

то реакціи этихъ поверхностей опредѣлятся, какъ составляющія, по нормалямъ N_1 и N_2, реакціи кривой линіи, то есть, величины $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ опредѣлятся изъ равенствъ (379, a) и (379, b), если въ нихъ сдѣлать Kf_1 и Kf_2 равными нулю.

5) *Матерьяльная точка находится на пересѣченіи трехъ неподвижныхъ поверхностей, пересѣкающихся въ одной точкѣ.*

Если всѣ три поверхности удерживающія, то положеніе точки вполнѣ опредѣлено. Реакціи поверхностей:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0, \quad f_3(x, y, z)=0$$

опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial x}=0 \\ Y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial y}=0 \\ Z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots \mathbf{(444)}$$

$$\mathfrak{R}_1=\lambda_1\Delta f_1, \quad \mathfrak{R}_2=\lambda_2\Delta f_2, \quad \mathfrak{R}_3=\lambda_3\Delta f_3.$$

Давленіе матерьяльной точки на точку пересѣченія этихъ трехъ поверхностей имѣетъ величину и направленіе силы F; уравненія (444) выражаютъ, что реакціи $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ суть составляющія по нормалямъ N_1, N_2, N_3 силы, равной и прямопротивоположной силѣ F.

Если матерьяльная точка помѣщена въ точкѣ пересѣченія четырехъ или большаго числа неподвижныхъ поверхностей, то величины реакцій этихъ поверхностей окажутся неопредѣленными; напримѣръ, въ случаѣ четырехъ поверхностей, можемъ приписать

произвольную величину реакціи $\mathfrak{R}_4$, тогда величины реакцій $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ опредѣлятся тѣмъ, что геометрическая сумма всѣхъ четырехъ реакцій и силы F должна быть равна нулю:

$$\overline{\mathfrak{R}_1}+\overline{\mathfrak{R}_2}+\overline{\mathfrak{R}_3}+\overline{\mathfrak{R}_4}+\overline{F}=0 \text{ *)}.$$

§ 56. Импульсъ силы.

Въ началѣ параграфа 23 было сказано, что́ понимаютъ подъ именемъ количества движенія матерьяльной точки, какими единицами оно измѣряется, какъ оно изображается длиною и что́ понимаютъ подъ именемъ проэкцій количества движенія.

---

*) Для выхода изъ этой неопредѣленности, приходится принимать въ разсчетъ упругость тѣлъ, образующихъ преграды. Для поясненія, приводимъ слѣдующій простой примѣръ.

Матерьяльная точка, вѣсъ которой mg, виситъ въ покоѣ на двухъ нитяхъ неравной длины; первая нить длины l, прикрѣплена верхнимъ концомъ въ началѣ координатъ ($x=0$, $y=0$, $z=0$), вторая, длины $(l+c)$, прикрѣплена верхнимъ концомъ въ точкѣ ($x=0$, $y=0$, $z=-c$). Если предполагать нити нерастяжимыми, то матерьяльная точка будетъ находиться въ покоѣ въ положеніи ($x=0$, $y=0$, $z=l$), причемъ сумма величинъ реакцій $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ нитей будетъ равна mg; величины же каждой изъ этихъ реакцій будутъ неопредѣленны.

Если же примемъ въ разсчетъ упругость нитей, то эта неопредѣленность будетъ устранена. Пусть ω_1 и ω_2 суть площади поперечныхъ сѣченій нитей, E_1 и E_2 — ихъ модули упругости, ε — удлиненія нитей, такъ что длина первой нити въ натяженномъ состояніи равна $(l+\varepsilon)$, а длина второй нити въ томъ же состояніи равна $(l+c+\varepsilon)$; вслѣдствіе растяженія нитей, положеніе равновѣсія матерьяльной точки будетъ въ точкѣ $z=l+\varepsilon$.

На основаніи извѣстныхъ законовъ растяженія упругихъ стержней и нитей:

$$\frac{\varepsilon}{l}=\frac{\mathfrak{R}_1}{E_1\omega_1}; \quad \frac{\varepsilon}{l+c}=\frac{\mathfrak{R}_2}{E_2\omega_2};$$

изъ этихъ равенствъ и изъ равенства

$$\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2=mg$$

опредѣлимъ: величину ε и отношеніе между величинами реакцій:

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2}=\frac{E_1\omega_1}{E_2\omega_2}\left(1+\frac{c}{l}\right).$$

Согласно съ этимъ будемъ имѣть ввиду, что количеству движенія матерьяльной точки мы приписываемъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ скорости точки; мы будемъ представлять себѣ, что количество движенія изображено длиною, имѣющею направленіе скорости и во столько разъ большею единицы длины, во сколько разъ изображаемое количество движенія болѣе единицы количествъ движенія.

Пусть t и t суть два какіе либо момента времени; координаты точки, величины количества движенія и проэкціи количества движенія на оси координатъ въ эти моменты обозначимъ слѣдующими знаками:

въ моментъ $t: x, y, z, mv, mx', my', mz'$

въ моментъ $\mathrm{t}: \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, m\mathrm{v}, m\mathrm{x}', m\mathrm{y}', m\mathrm{z}'$ *).

Измѣненіемъ количества движенія матерьяльной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t мы будемъ называть то количество движенія, которое изобразится геометрическою разностью между длинами, изображающими количества движенія $m\mathrm{v}$ и mv.

Проэкціи на оси координатъ этого измѣненія количества движенія выразятся разностями:

$$m\mathrm{x}'-mx',\ m\mathrm{y}'-my',\ m\mathrm{z}'-mz'.$$

(На черт. 29 количества движенія $m\mathrm{v}$ и mv изображены длинами $\overline{AK_2}$ и $\overline{AK_1}$, проведенными изъ какой либо точки A; измѣненіе количества движенія изобразится длиною $\overline{AИ}$, равною и параллельною длинѣ $\overline{K_1K_2}$).

Положимъ, что свободная матерьяльная точка движется подъ вліяніемъ дѣйствія приложенной къ ней силы F, которой проэкціи

$$X,\ Y,\ Z$$

суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

*) Различіе въ обозначеніяхъ состоитъ въ томъ, что величины, относящіяся къ болѣе позднему моменту t, обозначены прямыми буквами, между тѣмъ какъ величины, относящіяся къ раннему моменту t, обозначены курсивными буквами.

При опредѣленномъ движеніи этой матерьяльной точки, координаты ея суть опредѣленныя функціи времени:

$$f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t).$$

Помножимъ на dt дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, получимъ:

$$d(mx')=Xdt,\ d(my')=Ydt,\ d(mz')=Zdt; \dots \quad \textbf{(445)}$$

затѣмъ представимъ себѣ, что координаты точки, входящія въ X, Y, Z, замѣнены функціями f_1, f_2, f_3, и что производныя координатъ по времени, заключающіяся въ X, Y, Z, замѣнены производными функцій f_1, f_2, f_3; тогда X, Y, Z выразятся функціями времени.

Взявъ интегралы въ предѣлахъ отъ t до t отъ обѣихъ частей каждаго изъ равенствъ (445), получимъ:

$$m\mathrm{x}'-mx'=И_x,\ m\mathrm{y}'-my'=И_y,\ m\mathrm{z}'-mz'=И_z, \dots \quad \textbf{(446)}$$

гдѣ

$$И_x=\int_t^{\mathrm{t}} Xdt,\ И_y=\int_t^{\mathrm{t}} Ydt,\ И_z=\int_t^{\mathrm{t}} Zdt \dots \quad \textbf{(447)}$$

Изъ равенствъ (446) видно, что измѣненіе количества движенія точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется величинѣ:

$$И=\sqrt{И_x^2+И_y^2+И_z^2} \dots \quad \textbf{(448)}$$

и имѣетъ такое направленіе, косинусы угловъ котораго съ осями координатъ равны отношеніямъ:

$$\frac{И_x}{И},\ \frac{И_y}{И},\ \frac{И_z}{И}.$$

Величина $И$ называется *импульсомъ силы* F *въ теченіи промежутка времени отъ* t *до* t; мы приписываемъ импульсу

не только величину, но и направленіе, составляющее съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$И\cos(И,X)=И_x,\ И\cos(И,У)=И_y,\ И\cos(И,Z)=И_z.$$

Равенства (446) выражаютъ тогда, что *измѣненіе количества движенія матерьяльной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до* $\mathfrak{t}$ *равняется импульсу силы F въ теченіи того же промежутка времени.*

Величины $И_x$, $И_y$, $И_z$ суть проэкціи импульса на оси координатъ.

Величины вторыхъ частей равенствъ (445) суть проэкціи на оси координатъ импульса силы F въ теченіи элемента времени dt; этотъ *элементарный импульсъ* имѣетъ безконечно-малую величину, если сила F имѣетъ величину конечную.

Разность между величинами живой силы матерьяльной точки въ моменты $\mathfrak{t}$ и t можетъ быть выражена произведеніемъ изъ импульса на полусумму проэкцій скоростей v и v на направленіе импульса; въ самомъ дѣлѣ, помноживъ равенства (446) на x', y', z' и сложивъ, получимъ:

$$m\mathrm{v}^2-m\mathrm{v}v\cos(\mathrm{v},v)=И\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},И);$$

помноживъ тѣ же равенства на x', y', z' и сложивъ ихъ, получимъ:

$$m\mathrm{v}v\cos(\mathrm{v},v)-mv^2=Иv\cos(v,И);$$

отсюда же найдемъ:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{И}{2}\Big(\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},И)+v\cos(v,И)\Big)\ \ldots\ \textbf{(449)}$$

§ 57. Мгновенныя силы.

Нѣкоторыя явленія совершаются подъ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ въ теченіи весьма малаго промежутка времени, но достигающихъ огромной величины во время своего дѣйствія; таковы, напримѣръ, силы, развивающіяся при ударахъ тѣлъ, при разложеніи взрывчатыхъ веществъ, и другія.

Подобныя силы, несмотря на краткую продолжительность своего дѣйствія, производятъ весьма замѣтныя измѣненія въ скоростяхъ тѣхъ тѣлъ, къ которымъ онѣ приложены, между тѣмъ, какъ перемѣщенія, совершенныя этими тѣлами во время дѣйствія такихъ силъ, сравнительно малы, а часто даже ничтожны.

Положимъ, что къ свободной матерьяльной точкѣ приложена такая сила $\mathfrak{F}$, которая дѣйствуетъ на нее въ теченіи весьма короткаго промежутка времени ϑ, но сообщаетъ ей за время своего дѣйствія импульсъ замѣтной величины. Пусть t_0 есть моментъ начала дѣйствія этой силы, $\mathfrak{t}=(t_0+\vartheta)$ — моментъ окончанія ея дѣйствія; x_0, y_0, z_0, — координаты точки m въ моментъ t_0; x_0', y_0', z_0' — проэкціи на оси координатъ скорости v_0 точки m въ моментъ t_0.

Кромѣ того, означимъ: буквами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ — проэкціи этой быстродѣйствующей силы $\mathfrak{F}$ на оси координатъ, буквою $\mathfrak{J}$ величину и направленіе импульса этой силы за все время ея дѣйствія; проэкціи этого импульса на оси координатъ будемъ обозначать такъ: $\mathfrak{J}_x, \mathfrak{J}_y, \mathfrak{J}_z$.

Если къ матерьяльной точкѣ не приложено болѣе никакихъ силъ, кромѣ силы $\mathfrak{F}$, то результатъ окончательнаго дѣйствія этой силы на точку m будетъ заключаться:

въ измѣненій количества движенія матерьяльной точки за время дѣйствія силы $\mathfrak{F}$:

$$m\mathrm{x}'-mx_0'=\mathfrak{J}_x,\ m\mathrm{y}'-my_0'=\mathfrak{J}_y,\ m\mathrm{z}'-mz_0'=\mathfrak{J}_z \ldots \mathbf{(450)}$$

и въ измѣненіи положенія матерьяльной точки въ теченіи того же промежутка времени.

Разности между координатами точки m въ концѣ и въ началѣ промежутка времени ϑ выразятся слѣдующими формулами:

$$\mathrm{x}-x_0=x_0'\vartheta+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{\mathfrak{t}}dt\int_{t_0}^{\mathfrak{t}}\mathfrak{X}dt \ldots\ldots\ldots \mathbf{(451, a)}$$

$$\mathrm{y}-y_0=y_0'\vartheta+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{\mathfrak{t}}dt\int_{t_0}^{\mathfrak{t}}\mathfrak{Y}dt \ldots\ldots\ldots \mathbf{(451, b)}$$

$$z - z_0 = z'_0\vartheta + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathfrak{Z}dt; \quad \ldots\ldots\ldots (451, c)$$

эти разности мы условимся называть проэкціями на оси координатъ перемѣщенія точки въ теченіи промежутка времени ϑ.

Если импульсъ $\mathfrak{J}$, сообщаемый силою $\mathfrak{F}$ матерьяльной точкѣ, имѣетъ замѣтную (но не безконечно-большую) величину, продолжительность же ϑ дѣйствія силы настолько ничтожна, что можно пренебречь всякими перемѣщеніями, совершенными за время ϑ, то такая сила $\mathfrak{F}$ называется *мгновенною силою.*

Степень малости промежутка времени ϑ должна быть такова, чтобы можно было пренебречь длиною:

$$V\vartheta$$

сравнительно съ конечными длинами, входящими въ наши разсчеты; здѣсь V означаетъ какую либо скорость конечной величины.

При такой степени малости промежутка времени ϑ можно пренебречь перемѣщеніями, совершенными за это время какими бы то ни было точками, движущимися одновременно съ матерьяльною точкою m, если только скорости этихъ точекъ имѣютъ конечныя величины.

То же самое можно сказать относительно величины перемѣщенія матерьяльной точки m за время ϑ, если только импульсы силы $\mathfrak{F}$ за время отъ момента t_0 до какого либо момента $t < t_0 + \vartheta$ имѣютъ величины конечныя; въ самомъ дѣлѣ, если импульсъ

$$\left[\left(\int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}dt\right)^2 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathfrak{Y}dt\right)^2 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathfrak{Z}dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

не превышаетъ, ни при какомъ t, конечной величины J, то абсолютныя величины интеграловъ вторыхъ частей равенствъ (451) менѣе величины

$$\frac{J}{m}\vartheta.$$

гдѣ частное $(J:m)$ выражаетъ нѣкоторую конечную скорость; по малости же промежутка времени ϑ, мы можемъ пренебречь длинами:

$$x_0'\vartheta,\ y_0'\vartheta,\ z_0'\vartheta,\ \frac{J}{m}\vartheta,$$

а, слѣдовательно, и перемѣщеніемъ матерьяльной точки за время ϑ.

Принимая во вниманіе все сказанное въ настоящемъ параграфѣ, можемъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ высказать опредѣленіе понятія о мгновенной силѣ, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Мгновенная сила дѣйствуетъ впродолженіи такого малаго промежутка времени, въ теченіи котораго могутъ совершиться только самыя незначительныя, пренебрегаемыя нами, перемѣщенія точекъ, движущихся съ конечными скоростями.

Не смотря на кратковременность своего дѣйствія, мгновенная сила сообщаетъ той матерьяльной точкѣ, къ которой она приложена, импульсъ конечной не малой величины; перемѣщеніе же матерьяльной точки за время дѣйствія мгновенной силы — ничтожно.

Къ этому слѣдуетъ еще прибавить, что импульсъ, сообщаемый матерьяльной точкѣ за время ϑ всякою немгновенною силою, приложенною къ этой точкѣ, ничтоженъ сравнительно съ импульсомъ силы мгновенной; поэтому формулы (450) справедливы и въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ къ матерьяльной точкѣ приложена, кромѣ мгновенной силы $\mathfrak{F}$, какая либо немгновенная сила F; импульсомъ послѣдней за время отъ t_0 до $(t_0+\vartheta)$ мы пренебрегаемъ.

§ 58. Ударъ матерьяльной точки о преграждающую поверхность.

Положимъ, что свободная матерьяльная точка m, подверженная дѣйствію нѣкоторой немгновенной силы F, совершаетъ движеніе:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t), \ldots\ldots\ldots \quad (452)$$

гдѣ x, y, z суть координаты движущейся матерьяльной точки.

Пусть, кромѣ того, имѣется неудерживающая преграда, образуемая поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (453)$$

причемъ предполагается, что уравненіе этой неудерживающей поверхности написано такъ, какъ слѣдуетъ по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го.

Матерьяльная точка движется свободно, пока не встрѣтитъ этой поверхности.

При встрѣчѣ матерьяльной точки съ преграждающею поверхностью координаты матерьяльной точки должны будутъ удовлетворять уравненію поверхности; а потому моментъ t_0 встрѣчи долженъ быть дѣйствительнымъ корнемъ уравненія:

$$f[f_1(t_0),\ f_2(t_0),\ f_3(t_0),\ t_0] = 0.$$

Координаты матерьяльной точки и проэкціи на оси координатъ скорости ея въ этотъ моментъ будутъ слѣдующія:

$$x_0 = f_1(t_0),\ y_0 = f_2(t_0),\ z_0 = f_3(t_0)$$

$$x_0' = f'_1(t_0),\ y'_0 = f'_2(t_0),\ z_0' = f_3'(t_0).$$

Означимъ черезъ v_0 величину и направленіе скорости абсолютнаго движенія матерьяльной точки въ моментъ t_0 и черезъ u_0 — величину и направленіе скорости относительнаго движенія ея по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ преграждающая поверхность (см. § 33, стр. 175—176, § 34, стр. 180).

Дальнѣйшее состояніе движенія матерьяльной точки зависитъ отъ того, составляетъ ли относительная скорость u_0 острый или тупой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности (453).

Если

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} > 0,$$

то есть

$$v_0 \cos(v_0, N) > -\frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t},$$

или

$$u_0 \cos(u_0, N) > 0,$$

(см. § 34, формула (277)), то матерьяльная точка продолжаетъ движеніе, выражаемое формулами (452), безъ всякаго препятствія со стороны преграждающей поверхности.

Если же

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \ldots\ldots\ldots \quad (454)$$

то есть:

$$\Delta f \,.\, v_0 \cos(v_0, N) + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \ldots\ldots\ldots \quad (455)$$

или

$$u_0 \cos(u_0, N) < 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (456)$$

то это неравенство, противорѣчащее условію (274) *), требуемому преградою, показываетъ, что матерьяльная точка, по причинѣ своей инерціи, стремится преодолѣть эту преграду.

Такому стремленію матерьяльной точки преграда противодѣйствуетъ, оказывая на точку реакцію, направленную по положительной нормали.

Эта реакція должна сообщить матерьяльной точкѣ такой импульсъ, который измѣнилъ бы скорость v_0 матерьяльной точки въ скорость v, удовлетворяющую условію:

$$\Delta f \,.\, \mathrm{v} \cos(\mathrm{v}, N) + \frac{\partial f}{\partial t} \geqq 0; \ldots\ldots\ldots \quad (275)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ импульсъ долженъ быть сообщенъ мгновенно для того, чтобы матерьяльная точка не успѣла войти внутрь непроницаемаго тѣла, ограниченнаго поверхностью (453).

Поэтому мы предположимъ, что *реакція, измѣняющая скорость* v_0 (удовлетворяющую неравенству (455)) *въ скорость* v (удовлетворяющую условію (275)), *есть мгновенная сила, дѣй-*

---

*) На страницѣ 179; это же условіе выражается формулами (275) и (277).

ствующая въ теченіи столь ничтожнаго промежутка времени ϑ, *въ теченіи котораго перемѣщенія матерьяльной точки и поверхности* (453) *ничтожны; эта мгновенная сила направлена по положительной нормали* N.

Такой процессъ мгновеннаго измѣненія скорости матерьяльной точки при встрѣчѣ ея съ преграждающею поверхностью называется *ударомъ матерьяльной точки* о поверхность; моментъ t_0 называется *моментомъ паденія точки на поверхность*, моментъ $\mathfrak{t}=(t_0+\vartheta)$ *моментомъ отраженія.*

При опредѣленіи результата удара матерьяльной точки надо принять во вниманіе слѣдующія обстоятельства:

1) Вслѣдствіе ничтожной малости промежутка времени ϑ координаты матерьяльной точки предполагаются постоянными (x_0, y_0, z_0) во все время удара (отъ момента t_0 до момента $\mathfrak{t}=t_0+\vartheta$).

2) Положеніе поверхности и скорости всѣхъ точекъ ея принимаются также неизмѣнными во все время удара.

3) Импульсами немгновенныхъ силъ за время удара мы пренебрегаемъ, по ихъ ничтожной малости.

Мгновенная сила реакціи преграды направлена по положительной нормали N, проведенной изъ точки (x_0, y_0, z_0) поверхности (453).

По этимъ причинамъ проэкціи на оси координатъ мгновенной силы реакціи въ какой либо моментъ удара выразятся величинами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\lambda,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\lambda,\quad \frac{\partial f}{\partial z}\lambda,$$

гдѣ производныя отъ f имѣютъ постоянныя величины во время всего удара, а именно тѣ величины, которыя онѣ имѣютъ въ моментъ t_0 въ точкѣ (x_0, y_0, z_0); λ есть нѣкоторая функція отъ t, быстро измѣняющая свою величину во время удара.

Проэкціи на оси координатъ импульса мгновенной силы за время отъ момента паденія до какого либо момента t удара выразятся такъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\int_{t_0}^{t}\lambda dt,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\int_{t_0}^{t}\lambda dt,\quad \frac{\partial f}{\partial z}\int_{t_0}^{t}\lambda dt;$$

этотъ импульсъ произведетъ слѣдующее измѣненіе скорости матерьяльной точки:

$$m\frac{dx}{dt} - mx'_0 = \frac{\partial f}{\partial x}j,$$

$$m\frac{dy}{dt} - my'_0 = \frac{\partial f}{\partial y}j, \quad j = \int_{t_0}^{t} \lambda dt,$$

$$m\frac{dz}{dt} - mz'_0 = \frac{\partial f}{\partial z}j,$$

или:

$$\frac{x'-x'_0}{\cos(N,X)} = \frac{y'-y'_0}{\cos(N,Y)} = \frac{z'-z'_0}{\cos(N,Z)} = \frac{j\Delta f}{m};$$

это означаетъ, что измѣненіе скорости отъ момента паденія до какого либо момента t удара направлено параллельно положительной нормали N; слѣдовательно, конецъ линіи, изображающей длину и направленіе скорости v, чертитъ во время удара прямую линію, параллельную этой нормали (черт. 30).

Такъ какъ скорость v_0 паденія точки на поверхность удовлетворяетъ неравенству (455), а скорость отраженія удовлетворяетъ условію (275), и притомъ скорость измѣняется во все время удара по вышеприведенному закону, то, въ нѣкоторый моментъ τ удара, она должна будетъ получить величину и направленіе, удовлетворяющія равенству:

$$\Delta f \,.\, \mathfrak{v} \cos(\mathfrak{v},N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \dots\dots\dots\dots (457)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \dots\dots\dots\dots (458)$$

гдѣ $\mathfrak{v}$ означаетъ величину и направленіе скорости матерьяльной точки въ моментъ τ; α, β, γ, суть проэкціи этой скорости на оси координатъ.

Если поверхность неподвижна, то равенство (457) получитъ видъ:

$$\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N) = 0,$$

это означаетъ, что скорость $\mathfrak{v}$ касательна къ поверхности.

Если же поверхность движется или деформируется, то равенство (457) может быть представлено такъ:

$$\mathfrak{u}\cos(\mathfrak{u},N)=0, \dots\dots\dots\dots (458\ \text{bis})$$

гдѣ $\mathfrak{u}$ есть скорость въ моментъ τ относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность.

Равенство (458, bis) выражаетъ, что относительная скорость $\mathfrak{u}$ касательна къ поверхности.

Этимъ моментомъ τ весь промежутокъ времени θ раздѣляется на двѣ части, а самый процессъ удара — на два акта.

За время перваго акта удара измѣненіе скорости матерьяльной точки имѣетъ величину:

$$\mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N)-v_0\cos(v_0,N) \dots\dots\dots\dots (459)$$

Если поверхность неподвижна, то скорость $\mathfrak{v}$ въ моментъ τ перпендикулярна къ нормали, а потому тогда измѣненіе скорости за время перваго акта равно:

$$-v_0\cos(v_0,N),$$

то есть величинѣ проэкціи скорости паденія на отрицательную нормаль.

На чертежѣ 30-мъ это измѣненіе скорости при неподвижной поверхности изображается длиною $\overline{v_0\mathfrak{v}}$.

Можно сказать, что, если поверхность неподвижна, то за все время перваго акта удара матерьяльная точка теряетъ составляющую скорости паденія v_0 по отрицательной нормали.

Если поверхность движется или деформируется, то разность (459), на основаніи равенства (457), выразится такъ:

$$-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}-v_0\cos(v_0N), \dots\dots\dots\dots (460)$$

или:

$$-u_0\cos(u_0,N);$$

а это есть величина проэкціи на отрицательную нормаль относительной скорости паденія матерьяльной точки.

Означимъ черезъ w величину и направленіе скорости той точки $\mathfrak{M}(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, въ которой происходитъ ударъ; какъ уже извѣстно:

$$w \cos(w,N) = -\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}, \ldots\ldots\ldots\ldots (261)$$

(см. стр. 176 и 180); кромѣ того, мы знаемъ, что скорость v_0 есть геометрическая сумма скоростей u_0 и w.

Такъ какъ скорости точекъ поверхности предполагаются постоянными во все время удара, то и во всякій моментъ удара скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w; напримѣръ, абсолютная скорость $\mathfrak{v}$ есть геометрическая сумма скоростей $\mathfrak{u}$ и w, абсолютная скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w; такъ и изображено на чертежѣ 31.

Изъ этого слѣдуетъ, что во все время удара конецъ относительной скорости (матерьяльной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность) описываетъ прямую линію, параллельную той прямой линіи, которую въ то же время чертитъ конецъ абсолютной скорости (черт. 31).

Такъ какъ въ моментъ τ относительная скорость $\mathfrak{u}$ перпендикулярна къ N (см. (458 bis)), то можно сказать, что за все время перваго акта удара матерьяльная точка теряетъ составляющую относительной скорости паденія u_0 по отрицательной нормали.

По этимъ причинамъ первый актъ удара можетъ быть названъ *актомъ потери нормальной части скорости паденія.*

Второй актъ удара начинается въ моментъ τ и оканчивается въ моментъ $\mathrm{t} = (t_0 + \vartheta)$.

За все время этого втораго акта измѣненіе скорости имѣетъ величину:

$$\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},N) - \mathfrak{v}\cos(\mathfrak{v},N) \ldots\ldots\ldots\ldots (461)$$

Если поверхность неподвижна, то величина этого измѣненія равняется проэкціи скорости отраженія v на положительную нормаль;

Если же поверхность движется или деформируется, то величина разности (461) можетъ быть выражена такъ:

$$\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},N)+\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}=\mathrm{u}\cos(\mathrm{u},N), \ldots\ldots\ldots (462)$$

гдѣ u есть относительная скорость отраженія матерьяльной точки; слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ измѣненіе скорости равняется проэкціи относительной скорости отраженія на положительную нормаль.

Второй актъ удара называется *актомъ возстановленія нормальной части скорости отраженія.*

Величины α, β, γ проэкцій скорости $\mathfrak{v}$ на оси координатъ могутъ быть опредѣлены изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} m\alpha&=mx'_0+J\frac{\partial f}{\partial x}\\ m\beta&=my'_0+J\frac{\partial f}{\partial y}\\ m\gamma&=mz'_0+J\frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (463)$$

$$J=\int_{t_0}^{\tau}\lambda dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (464)$$

Величина J опредѣлится изъ равенства, выражающаго, что измѣненіе скорости матерьяльной точки во время *акта потери* равно величинѣ импульса реакціи за это время, дѣленной на массу точки; такъ какъ измѣненіе скорости за время перваго акта выражается формулою (460), а импульсъ реакціи за время этого акта выражается произведеніемъ $J.\Delta f$, то это равенство будетъ слѣдующее:

$$\frac{J.\Delta f}{m}=-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}-v_0\cos(v_0,N);$$

изъ него слѣдуетъ:

$$J=-m\frac{\frac{\partial f}{\partial x}x'_0+\frac{\partial f}{\partial y}y'_0+\frac{\partial f}{\partial z}z'_0+\frac{\partial f}{\partial t}}{(\Delta f)^2}, \ldots\ldots (465)$$

или:

$$J=-m\frac{u_0\cos(u_0,N)}{\Delta f}\ldots\ldots\ldots\ldots (466)$$

Величина импульса реакціи за время *акта возстановленія* равняется

$$I \,.\, \Delta f;\ I = \int_{\tau}^{t} \lambda dt,$$

величина же измѣненія скорости матерьяльной точки за это время выражается формулою (462), поэтому:

$$I = m \frac{u \cos (u, N)}{\Delta f} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (467)$$

Изъ выраженій (466) и (467) слѣдуетъ:

$$\frac{I}{J} = \frac{u \cos (u, N)}{-u_0 \cos (u_0, N)}; \ldots\ldots\ldots\ldots (468)$$

если подъ именемъ *потерянной скорости* подразумѣвать проэкцію скорости паденія на отрицательную нормаль, а подъ именемъ *возстановленной скорости* — проэкцію скорости отраженія на положительную нормаль, то равенство (468) можно высказать въ слѣдующихъ выраженіяхъ: *импульсъ второго акта такъ относится къ импульсу перваго акта, какъ возстановленная относительная скорость относится къ потерянной относительной скорости.*

Если поверхность неподвижна, то величина отношенія между этими импульсами выразится величиною отношенія абсолютной возстановленной скорости къ абсолютной потерянной скорости.

Означимъ буквою i уголъ паденія, то есть уголъ, составляемый направленіемъ скорости паденія v_0 съ отрицательною нормалью (черт. 32); буквою r означимъ уголъ отраженія, то есть уголъ, составляемый направленіемъ скорости отраженія v съ положительною нормалью; по чертежу 32 легко видѣть, что:

$$\overline{\mathfrak{M}P} = v \cos (v, N) = \mathfrak{b} \operatorname{cotg} r$$

$$\overline{\mathfrak{M}Q} = - v_0 \cos (v_0, N) = \mathfrak{b} \operatorname{cotg} i;$$

а потому, при неподвижности поверхности:

$$\frac{I}{J} = \frac{v \cos (v, N)}{-v_0 \cos (v_0, N)} = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} \ldots\ldots\ldots\ldots (469)$$

Величина отношенія между возстановленною скоростью и потерянною скоростью зависитъ главнымъ образомъ отъ упругихъ свойствъ соударяющихся тѣлъ. По изслѣдованіямъ Ньютона величина этого отношенія не зависитъ отъ величины и направленія скорости паденія, но только отъ природы тѣхъ тѣлъ, между которыми происходитъ ударъ; такъ, при соударенін стекла о стекло это отношеніе равно $\frac{15}{16}$ при соударенія желѣза о желѣзо: $\frac{5}{9}$, при соударенія тѣлъ, состоящихъ изъ прессованной шерсти, — тоже $\frac{5}{9}$; вообще, отношеніе это есть дробь, не большая единицы, то есть величина возстановленной скорости не превосходитъ величины скорости потерянной и уголъ отраженія не менѣе угла паденія (при неподвижности поверхности).

Это отношеніе называется *коэфиціентомъ возстановленія;* это есть дробь, не меньшая нуля и не бóльшая единицы, не зависящая отъ величины и направленія скорости паденія *).

Если величина коэфиціента возстановленія извѣстна (означимъ его буквою ε), то тогда мы можемъ опредѣлить проэкціи на оси координатъ скорости отраженія v по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} m\mathrm{x}' &= mx'_0 + J\frac{\partial f}{\partial x}(1+\varepsilon) \\ m\mathrm{y}' &= my'_0 + J\frac{\partial f}{\partial y}(1+\varepsilon) \\ m\mathrm{z}' &= mz'_0 + J\frac{\partial f}{\partial z}(1+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (470)$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не будетъ надобности пользоваться этими формулами, такъ какъ величину и направленіе скорости отраженія можемъ опредѣлить при помощи слѣдующихъ простыхъ соображеній.

Проэкція относительной скорости на касательную плоскость (то есть скорость u) не измѣняется при ударѣ; проэкція же на отрицательную нормаль относительной скорости паденія (т.-е. — $u_0 \cos(u_0, N)$) замѣняется, вслѣдствіе удара, возстановленною скоростью

$$\mathrm{u}\cos(\mathrm{u}, N) = \varepsilon(-u_0\cos(u_0, N)),$$

направленною по положительной нормали.

*) Позднѣйшіе опыты показали, что Ньютоново положеніе о независимости величины коэфиціента возстановленія отъ скорости паденія весьма близко къ истинѣ.

Если $\varepsilon=0$, то возстановленной скорости нѣтъ и матерьяльная точка остается на поверхности, имѣя относительную скорость u.

Если $\varepsilon=1$ и поверхность неподвижна, то уголъ отраженія равенъ углу паденія; при $\varepsilon<1$ уголъ отраженія болѣе угла паденія.

Измѣненіе живой силы матерьяльной точки при ударѣ о поверхность опредѣлится по формулѣ (449), если замѣнимъ въ ней направленіе $И$ — направленіемъ N, а величину $И$ — слѣдующимъ выраженіемъ импульса реакціи за все время удара:

$$J(1+\varepsilon)\Delta f;$$

но такъ какъ:

$$\mathrm{v}\cos(\mathrm{v},N)=I\frac{\Delta f}{m}-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{dt}$$

$$v_0\cos(v_0,N)=-J\frac{\Delta f}{m}-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t},$$

то получимъ слѣдующее выраженіе величины живой силы при ударѣ:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2}-\frac{vm_0^2}{2}=-\frac{J^2(\Delta f)^2}{2m}(1-\varepsilon^2)-J(1+\varepsilon)\frac{\partial f}{\partial t}\dots\ (471)$$

Если поверхность неподвижна, то:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-\frac{mv_0^2}{2}(1-\varepsilon^2)\cos^2(v_0,N)\dots\dots\ (472)$$

то есть, *живая сила матерьяльной точки теряется при ударѣ ея о неподвижную поверхность, если коэфиціентъ возстановленія не равенъ единицѣ и если скорость паденія не перпендикулярна къ нормали; потеря живой силы тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе коэфиціентъ возстановленія и чѣмъ болѣе проэкція скорости паденія на отрицательную нормаль.*

Эта потеря живой силы можетъ быть съ избыткомъ вознаграждена живою силою, сообщаемою матерьяльной точкѣ движущеюся поверхностью, если скорость w точки $\mathfrak{M}$ составляетъ острый уголъ съ нормалью N.

Примѣръ 49-й. Тяжелая матерьяльная точка, брошенная изъ начала координатъ со скоростью V въ вертикальной плоскости XY (черт. 33) подъ угломъ $\left(J+\frac{\pi}{2}-r\right)$ къ оси X и подъ угломъ $(J+\pi-r)$ къ оси Y, совершаетъ рядъ рикошетовъ о наклонную плоскость:

$$-(y+x\operatorname{tg}J)=0;$$

опредѣлить весь рядъ послѣдовательныхъ ударовъ матерьяльной точки объ эту плоскость, предполагая, что движеніе совершается въ пустотѣ и что извѣстенъ коэфиціентъ возстановленія ε.

Положительная нормаль N къ плоскости составляетъ съ осью $X^{овъ}$ уголъ $\left(\frac{\pi}{2}+J\right)$, съ осью $Y^{овъ}$ — уголъ $(\pi+J)$.

Скорость V составляетъ съ положительною нормалью въ точк' O уголъ r.

Движеніе матерьяльной точки до перваго удара выражается уравненіями:

$$x=Vt\sin(r-J),\quad y=\frac{gt^2}{2}-Vt\cos(r-J).$$

Моментъ t_1 перваго рикошета опредѣлится изъ равенства

$$\frac{gt_1}{2}-V\cos(r-J)+V\sin(r-J)\operatorname{tg}J=0,$$

откуда:

$$t_1=\frac{2V}{g}\frac{\cos r}{\cos J}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(473)}$$

Зная t_1 опредѣлимъ: координаты x_1, y_1 той точки плоскости, въ которой происходитъ первый ударъ, разстояніе $O1=\xi_1$ этой точки отъ начала координатъ, величину v_1 скорости паденія, проэкціи ея $(x'_1\, y'_1)$ на оси координатъ и величину i_1 угла паденія.

$$\xi_1=\frac{x_1}{\cos J}=\frac{2V^2}{g}\frac{\sin(r-J)\cos r}{\cos^2 J}$$

$$\xi_1=\frac{2V^2\cos^2 r}{g\cos J}(\operatorname{tg}r-\operatorname{tg}J)\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(474)}$$

$$x'_1=V\sin(r-J),\quad y'_1=V\left(2\frac{\cos r}{\cos J}-\cos(r-J)\right)\ldots \mathbf{(475)}$$

Проэкція скорости v_1 на направленіе оси Ξ (см. черт. 33):

$$v_1\cos(v_1\Xi)=v_1\sin i_1=x'_1\cos J-y'_1\sin J,$$

$$v_1\sin i_1=V(\sin r-2\cos r\operatorname{tg}J)\ldots\ldots\ldots \mathbf{(476)}$$

Проэкція скорости паденія v_1 на отрицательную нормаль:

$$v_1\cos i_1=x'_1\sin J+y'_1\cos J=V\cos r\ldots\ldots\ldots \mathbf{(477)}$$

Означимъ черезъ v_1 величину скорости отраженія въ точкѣ 1 и

черезъ r_1 уголъ отраженія. По теоріи удара о неподвижную поверхность:

$$V_1 \sin r_1 = v_1 \sin i_1,\quad V_1 \cos r_1 = \varepsilon v_1 \cos i_1;$$

а потому

$$V_1 \sin r_1 = V(\sin r - 2\cos r \operatorname{tg} J) \,\ldots\ldots\, (478)$$

$$V \cos r_1 = \varepsilon V \cos r \,\ldots\ldots\, (479)$$

и отсюда:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J \,\ldots\ldots\, (480)$$

Разсуждая такимъ же образомъ, опредѣлимъ:
величину промежутка времени между $(n-1)$—ымъ и n—ымъ ударами:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{2V_{n-1}}{g}\frac{\cos r_{n-1}}{\cos J}, \ldots\ldots\, (473, n-1)$$

разстояніе между точками, въ которыхъ эти удары совершаются:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2V^2_{n-1}}{g}\frac{\cos^2 r_{n-1}}{\cos J}(\operatorname{tg} r_{n-1} - \operatorname{tg} J), \ldots (474, n-1)$$

и зависимость между скоростями и углами отраженія въ этихъ точкахъ:

$$V_n \sin r_n = V_{n-1}(\sin r_{n-1} - 2\cos r_{n-1} \operatorname{tg} J), \ldots (478, n-1)$$

$$V_n \cos r_n = \varepsilon V_{n-1} \cos r_{n-1}, \ldots\ldots\, (479, n-1)$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J \,\ldots\ldots\, (480, n-1)$$

Изъ ряда равенствъ:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_2 = \operatorname{tg} r_1 - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J$$

исключимъ $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$; получимъ:

$$\varepsilon^n \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r - 2\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} J \,\ldots\ldots\, (481)$$

Изъ ряда равенствъ вида (479, n—1) получимъ:

$$V_n \cos r_n = \varepsilon^n V \cos r \,\ldots\ldots\, (482)$$

Поэтому разстояніе между двумя послѣдовательными точками удара выразится такъ:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2\varepsilon^{n-1} V^2 \cos^2 r}{g \cos J}\left[\operatorname{tg} r - \left(\frac{2}{1-\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\varepsilon^{n-1}\right)\operatorname{tg} J\right]. \quad (483)$$

Если эта разность окажется отрицательною, то это будетъ означать, что матерьяльная точка послѣ $(n-1)$—аго удара совершаетъ скачекъ внизъ, а не вверхъ: для этого надо, чтобы выраженіе:

$$D_n = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\varepsilon}\operatorname{tg} J + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\varepsilon^{n-1}\operatorname{tg} J \ldots\ldots (484)$$

имѣло величину отрицательную.

Сложивъ рядъ равенствъ вида (483), получимъ выраженіе разстоянія той точки отъ начала координатъ, въ которой происходитъ n—ый ударъ:

$$\xi_n = \frac{V^2}{g}\frac{\sin 2r}{\cos J}\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\left[1 - \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\frac{\operatorname{tg} J}{\operatorname{tg} r}\right] \ldots\ldots\ldots (485)$$

Сложивъ рядъ равенствъ вида (473, n—1), получимъ выраженіе момента n—наго удара:

$$t_n = \frac{2V\cos r}{g\cos J}\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (486)$$

Величина и направленіе скорости отраженія послѣ n—аго удара опредѣлятся изъ формулъ (482) и слѣдующей:

$$v_n \sin r_n = V\sin r - 2V\cos r\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\operatorname{tg} J \ldots\ldots (487)$$

Матерьяльная точка совершитъ безконечное число скачковъ, которые становятся все мельче и короче, какъ видно изъ формулъ (482) и (483), а удары становятся все чаще и чаще (см. (473, n—1)). По истеченіи конечнаго времени

$$T = \frac{2V\cos r}{g\cos J}\frac{1}{1-\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (488)$$

скачки прекращаются и въ этотъ моментъ матерьяльная точка будетъ находиться на слѣдующемъ разстояніи отъ начала координатъ:

$$S = \frac{V^2}{g}\frac{\sin 2r}{\cos J}\frac{1}{1-\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\operatorname{tg} J}{\operatorname{tg} r}\right] \ldots\ldots\ldots (489)$$

а скорость ея будетъ направлена вдоль по положительному или отрицательному направленію оси Ξ и будетъ равна:

$$C = B\,.\,V\cos r;\quad B = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\varepsilon}\operatorname{tg} J \ldots\ldots (490)$$

Знакъ величины B опредѣляетъ возможность или невозможность перемѣны направленія скачковъ; если B болѣе нуля, то матерьяльная точка будетъ восходить по оси Ξ и даже послѣ прекращенія скачковъ будетъ имѣть скорость C, направленную по положительной оси Ξ; если $B=O$, то скорость C будетъ нуль; если же B менѣе нуля, то, начиная съ нѣкотораго n, скачки будутъ совершаться внизъ по плоскости.

Примѣръ 50-й. Опредѣлить результатъ перваго удара матерьяльной точки объ окружность въ примѣрѣ 34-мъ (стр. 241—245).

Прежде всего слѣдуетъ найти точку D первой встрѣчи матерьяльной точки съ окружностью. Означимъ координаты этой точки знаками x_3, y_3, моментъ встрѣчи — знакомъ t_3, проэкціи скорости паденія — знаками x'_3, y'_3, проэкціи скорости отраженія — знаками x'_3, y'_3.

Примѣняя къ этому случаю пріемы, изложенные въ этомъ параграфѣ, мы найдемъ:

$$t_3-t_1=\frac{4v_1x_1}{gR},\quad x'_3=v_1\frac{y_1}{R},\ y'_3=3v_1\frac{x_1}{R}$$

$$x_3=x_1\left(1-\frac{4y_1^2}{R^2}\right),\quad y_3=y_1\left(1-\frac{4x_1^2}{R^2}\right);\quad \frac{J}{m}=-4v_1\frac{y_1x_1^2}{R^3}$$

$$\mathrm{x}'_3=v_1\frac{y_1}{R}-2\frac{J}{m}x_3(1+\varepsilon)$$

$$\mathrm{y}'_3=3v_1\frac{x_1}{R}-2\frac{J}{m}y_3(1+\varepsilon).$$

Остановимся на частномъ случаѣ: $b=-\frac{3}{4}R$ и опредѣлимъ дальнѣйшее движеніе матерьяльной точки послѣ перваго удара при предположеніяхъ: $\varepsilon=1$ и $\varepsilon=0$.

Въ этомъ случаѣ ударъ произойдетъ въ самой нижней точкѣ окружности и скорость паденія будетъ имѣть слѣдующія проэкціи:

$$x'_3=-\frac{v_1}{2},\quad y'_3=\frac{3\sqrt{3}}{2}v_1,\quad \frac{J}{m}=\frac{3\sqrt{3}}{4R}v_1.$$

Если $\varepsilon=1$, то матерьяльная точка, отразившись о нижнюю точку окружности, опишетъ параболу, симметричную той, которую она описала до удара; въ точкѣ $K_1\left(x=-\frac{\sqrt{3}}{2}R,\ y=-\frac{R}{2}\right)$ она вступитъ на окружность безъ удара, такъ какъ скорость ея

будетъ направлена по касательной къ окружности; далѣе, матерьяльная точка пойдетъ по окружности, пройдетъ черезъ нижнюю точку ея, поднимется до точки K, гдѣ снова сойдетъ съ окружности, и такъ далѣе.

Если $\varepsilon=0$, то матерьяльная точка потеряетъ скорость по нормали и пойдетъ по окружности со скоростью:

$$\mathrm{x}'_3=-\frac{v_1}{2};$$

дальнѣйшее движенiе она будетъ совершать по нижней части окружности, не поднимаясь выше уровня:

$$y=-\left(\frac{v_1^2}{8g}-R\right)=\frac{15}{16}R.$$

Примѣръ 51-й. Тяжелая матерьяльная точка брошена изъ начала координатъ на наклонную плоскость, движущуюся поступательно и равномѣрно; уравненiе этой плоскости:

$$-(y+x\operatorname{tg}J+wt)=0.$$

Представимъ себѣ неизмѣняемую движущуюся среду, которой принадлежитъ плоскость, и опредѣлимъ относительное движенiе матерьяльной точки по отношенiю къ этой средѣ, причемъ результатъ каждаго удара будемъ разсчитывать на томъ основанiи, что:

$$\mathrm{u}_n\sin\rho_n=u_n\sin\sigma_n,\quad \mathrm{u}_n\cos\rho_n=\varepsilon u_n\cos\sigma_n,$$

гдѣ u_n есть относительная скорость паденiя, u_n — относительная скорость отраженiя, ρ_n — относительный уголъ отраженiя, σ_n — относительный уголъ паденiя при n—номъ ударѣ.

Въ результатѣ получимъ формулы, отличающiяся отъ формулъ примѣра 49-го тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто $V\cos r$, $V\sin r$, и $\operatorname{tg} r$ будутъ входить слѣдующiя величины:

$$V\cos r-w\cos J \quad \text{вмѣсто} \quad V\cos r$$
$$V\sin r-w\sin J \quad \text{вмѣсто} \quad V\sin r$$
$$\frac{V\sin r-w\sin J}{V\cos r-w\cos J} \quad \text{вмѣсто} \quad \operatorname{tg} r.$$

Примѣръ 52-й. Матерьяльная тяжелая точка свободно пущена въ моментъ $t=0$ изъ точки $(x=a,\ y=-h)$; опредѣлить результатъ ея удара о плоскость:

$$\frac{xt}{a}\sqrt{\frac{2}{3}gh}-y=0,$$

вращающуюся вокругъ горизонтальной оси Z-овъ.

Движеніе точки до удара выражается такъ:

$$x=a,\quad y=\frac{gt^2}{2}-h.$$

Моментъ встрѣчи точки съ плоскостью опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{gt^2}{2}-t\sqrt{\frac{2}{3}gh}-h=0.$$

Изъ двухъ рѣшеній этого уравненія:

$$t=-\sqrt{\frac{2h}{3g}},\quad t_1=3\sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

второе опредѣляетъ дѣйствительный моментъ встрѣчи. Въ этотъ моментъ матерьяльная точка имѣетъ слѣдующія координаты и слѣдующія проэкціи скорости паденія:

$$x_0=a,\quad y_0=2h,\quad x'_0=0,\quad y'_0=\sqrt{6gh}.$$

Для вычисленія J мы должны составить выраженія производныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{t_1}{a}\sqrt{\frac{2}{3}gh}=\frac{2h}{a},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial f}{\partial t}=\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Величина J выразится такъ:

$$J=\frac{2ma^2}{4h^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{3}gh};$$

проэкціи скорости отраженія на оси координатъ будутъ имѣть слѣдующія величины:

$$x'=\frac{4ha}{4h^2+a^2}(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{3}gh}$$

$$y'=\sqrt{6gh}-\frac{2a^2}{4h^2+a^2}(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Въ этомъ случаѣ происходитъ потеря живой силы вслѣдствіе удара; въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-\frac{2ma^2}{4h^2+a^2}\frac{2}{3}gh(1+\varepsilon)(2-\varepsilon),$$

если даже коэфиціентъ возстановленія будетъ равенъ единицѣ, то все таки будетъ потеря живой силы, равная:

$$\frac{4ma^2}{4h^2+a^2}\frac{2}{3}gh.$$

ГЛАВА V.

Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ.

§ 59. Понятіе о системѣ матерьяльныхъ точекъ. Связи.

Если нѣсколько матерьяльныхъ точекъ подвержены такимъ силамъ или подчинены такимъ условіямъ, что, при опредѣленіи движенія одной изъ точекъ, приходится принимать въ разсчетъ всѣ прочія точки безъ исключенія, то такая группа точекъ называется *системою матерьяльныхъ точекъ*.

Можно еще выразиться иначе: нѣсколько матерьяльныхъ точекъ образуютъ одну систему, если существуютъ обстоятельства, дѣлающія эти точки настолько зависимыми одна отъ другой, что, при опредѣленіи движенія, совершаемаго одною изъ нихъ, приходится неизбѣжно принимать въ разсчетъ всѣ прочія.

Обстоятельства, устанавливающія зависимость между матерьяльными точками системы, могутъ заключаться:

a) въ томъ, что силы, приложенныя къ точкамъ системы, зависятъ отъ координатъ и скоростей другихъ точекъ той же системы;

b) въ существованіи кинематическихъ *связей* между точками системы.

Связью (Liaison) называется условіе, въ силу котораго координаты нѣсколькихъ точекъ системы должны удовлетворять нѣкоторому равенству или неравенству.

Напримѣръ:

Примѣръ 53. Условіе, въ силу котораго разстояніе между двумя точками m_1 (координаты x_1, y_1, z_1) и m_2 (координаты x_2, y_2, z_2) должно оставаться постояннымъ, выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0,$$

или

$$+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}-l=0,$$

гдѣ l есть величина разстоянія.

Эту связь можно представить себѣ въ видѣ вполнѣ твердаго безконечно-тонкаго стержня, на концахъ котораго находятся связываемыя имъ матерьяльныя точки.

Примѣръ 54. Связь, представляемая безконечно-тонкою, гибкою, нерастяжимою и неимѣющею массы нитью, связывающею точки m_1 и m_2, выразится слѣдующимъ условіемъ:

$$l^2 \geqslant (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

такъ какъ разстояніе между точками не должно быть болѣе длины l нити, но можетъ быть равно или менѣе l.

Примѣръ 55. Условіе:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \geqslant l^2$$

выражаетъ, что разстояніе между двумя точками не должно быть менѣе l, но можетъ быть равно или болѣе l; эту связь можно представить себѣ такимъ образомъ, какъ будто-бы точки m_1 и m_2 были центрами двухъ твердыхъ шаровъ, сумма радіусовъ которыхъ равняется l.

Примѣръ 56. Условіе:

$$l \geqslant r_{12}+r_{23},$$

гдѣ

$$r_{12}=+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$$r_{23}=+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2},$$

связывающее координаты трехъ точекъ m_1, m_2, m_3, выражаетъ, что сумма разстояній точекъ m_1 и m_3 отъ точки m_2 должна быть не болѣе l; связь эту можно представить себѣ подъ слѣдующимъ видомъ: точки m_1 и m_3 прикрѣплены къ концамъ гибкой, нерастяжимой нити (длины l), вдоль по которой, не сходя съ нее, можетъ скользить точка m_2.

Аналитическое выраженіе связи между точками можетъ заключать въ себѣ, кромѣ координатъ точекъ и постоянныхъ параметровъ, еще и время; напримѣръ, если стержень, связывающій точки m_1 и m_2 измѣняетъ съ теченіемъ времени свою длину по закону:

$$l = a + (l_0 - a)e^{-kt},$$

гдѣ l_0 есть длина стержня въ моментъ $t=0$, а l — длина его въ моментъ t, то связь эта выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = a + (l_0 - a)e^{-kt},$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ суть координаты положеній, занимаемыхъ точками m_1 и m_2 въ моментъ t.

Всякія связи между точками $m_1, m_2, m_3, \ldots m_i, \ldots m_n$ могутъ быть выражены: однѣ — равенствами:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0, \ldots \textbf{(491)}$$

другія — условіями:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) \geqslant 0, \ldots \textbf{(492)}$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n$ суть координаты положеній, занимаемыхъ точками $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ въ моментъ t, а ϑ *) означаетъ функцію этихъ координатъ и времени t; эта функція можетъ незаключать времени и нѣкоторыхъ изъ координатъ; видъ ея опредѣляется конструкціею связи.

(Составляя аналитическое выраженіе какой либо связи, мы будемъ писать его такимъ образомъ, чтобы всѣ члены равенства или неравенства заключались въ первой его части; если тогда получится выраженіе вида:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) \leqslant 0,$$

---

*) Эту букву мы предназначимъ исключительно для обозначенія первыхъ частей выраженій связей.

то мы можемъ привести его къ виду (492) положивъ:

$$в = -f.)$$

Связи, выражаемыя равенствами, называются *удерживающими связями*, а тѣ связи, которыя выражаются условіями вида (492), называются *связями неудерживающими* *).

§ 60. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью.

Удерживающая связь (491), существующая между точками m_1, $m_2, \ldots\ m_i, \ldots .m_n$, допускаетъ только такія движенія этихъ точекъ, при которыхъ одновременныя скорости точекъ удовлетворяютъ слѣдующему уравненію:

$$\frac{\partial в}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial в}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}+$$

$$+\frac{\partial в}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial в}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt}+$$

$$+\frac{\partial в}{\partial z_1}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial в}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}+\ldots+\frac{\partial в}{\partial z_n}\frac{dz_n}{dt}+\frac{\partial в}{\partial t}=0,\quad(493)$$

линейному относительно проэкцій на оси координатъ скоростей точекъ.

Первую часть этого равенства, представляющую полную производную отъ функціи $в$ по t, мы будемъ изображать, для краткости, такъ:

---

*) Сомовъ называетъ связи перваго рода — *закрѣпляющими*, а связи втораго рода — *незакрѣпляющими*; см. Раціональную механику, кинематику, стр. 266.

$$\frac{d8}{dt}\overset{*)}{=}\frac{\partial 8}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial 8}{\partial x_i}x'_i+\frac{\partial 8}{\partial y_i}y'_i+\frac{\partial 8}{\partial z_i}z'_i\right)^{**)};\ldots\ldots(\mathbf{494})$$

поэтому равенство (493) будемъ писать въ такомъ видѣ:

$$\frac{\partial 8}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial 8}{\partial x_i}x'_i+\frac{\partial 8}{\partial y_i}y'_i+\frac{\partial 8}{\partial z_i}z'_i\right)=0,\ldots\ldots(\mathbf{493})$$

а иногда даже и въ такомъ:

$$\frac{d8}{dt}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{493})$$

Уравненіе (493) и другія равенства, проистекающія изъ суще-

---

*) По прежнему мы будемъ обозначать частныя производныя помощію круглыхъ ∂, а полныя производныя помощію прямыхъ d; напримѣръ:

$$\frac{\partial 8}{\partial t},\ \frac{\partial 8}{\partial x_1},\ \frac{\partial 8}{\partial y_1}$$

суть частныя производныя отъ функціи 8 по t, x_1, и y_1, а

$$\frac{d8}{dt}$$

есть полная производная отъ 8 по t.

**) Знакъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}$$

служитъ для сокращеннаго писанія суммы n членовъ одинаковаго вида, различающихся только численными значеніями нѣкотораго индекса, который равенъ единицѣ въ первомъ членѣ суммы, двумъ — во второмъ, тремъ — въ третьемъ, и т. д.; напримѣръ:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots x_n^2=\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2.$$

ствованія удерживающей связи, могутъ быть выведены слѣдующимъ образомъ.

Координаты

$$x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n$$

$$y_1, y_2, \ldots y_i, \ldots y_n$$

$$z_1, z_2, \ldots z_i, \ldots z_n$$

движущихся точекъ

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$$

могутъ быть выражены непрерывными функціями времени; приращенія

$$Dx_1, Dx_2, \ldots Dx_i, \ldots Dx_n$$

$$Dy_1, Dy_2, \ldots Dy_i, \ldots Dy_n$$

$$Dz_1, Dz_2, \ldots Dz_i, \ldots Dz_n$$

этихъ координатъ, полученныя ими въ теченіи какаго либо весьма малаго промежутка времени ϑ, могутъ быть выражены рядами, расположенными по возрастающимъ степенямъ ϑ, напримѣръ:

$$Dx_i = x'_i\vartheta + x''_i\frac{\vartheta^2}{1.2} + x'''_i\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$Dy_i = y'_i\vartheta + y''_i\frac{\vartheta^2}{1.2} + y'''_i\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$Dz_i = z'_i\vartheta + z''_i\frac{\vartheta^2}{1.2} + z'''_i\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots$$

Выраженіе:

$$\text{в}(x_1 + Dx_1,\ y_1 + Dy_1,\ z_1 + Dz_1, \ldots z_n + Dz_n,\ t + \vartheta),$$

которое, для краткости, будемъ изображать знакомъ:

$$\text{в}((t + \vartheta)),$$

можетъ быть разложено въ рядъ, расположенный по возрастающимъ

степенямъ величинъ: ϑ, Dx_1, Dy_1, Dz_1, ... Dz_n; но такъ какъ приращенія координатъ могутъ быть выражены въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ ϑ, то $\textsf{з}((t+\vartheta))$ можно представить въ видѣ слѣдующаго ряда:

$$\textsf{з}((t+\vartheta)) = \textsf{з} + \frac{d\textsf{з}}{dt}\vartheta + \frac{d^2\textsf{з}}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3\textsf{з}}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots\ldots; \quad \mathbf{(495)}$$

здѣсь $\frac{d\textsf{з}}{dt}$ означаетъ полную производную отъ функціи $\textsf{з}$ по t, выражаемую формулою (494); $\frac{d^2\textsf{з}}{dt^2}$ есть полная производная втораго порядка отъ той же функціи по t; она выражается слѣдующею формулою:

$$\frac{d^2\textsf{з}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\textsf{з}}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\textsf{з}}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\textsf{з}}{\partial z_i}z_i''\right) + K\textsf{з}, \ldots \quad \mathbf{(496)}$$

гдѣ:

$$K\textsf{з} = \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial t^2} + 2\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial t\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial t\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial t\partial z_i}z_i'\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=n}x_j'\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial x_j\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial x_j\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial x_j\partial z_i}z_i'\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=n}y_j'\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial y_j\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial y_j\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial y_j\partial z_i}z_i'\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=n}z_j'\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial z_j\partial x_i}x_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial z_j\partial y_i}y_i' + \frac{\partial^2\textsf{з}}{\partial z_j\partial z_i}z_i'\right); \ldots\ldots \quad \mathbf{(497)}$$

далѣе, $\frac{d^3\textsf{з}}{dt^3}$ есть полная производная третьяго порядка отъ функціи $\textsf{з}$ по t, и т. д.

Разсматриваемая нами связь — удерживающая, слѣдовательно:

$$\textsf{з}(x_1, y_1, z_1, \ldots. z_n, t) = 0, \quad \textsf{з}((t+\vartheta)) = 0,$$

а потому нижеслѣдующій рядъ долженъ быть равенъ нулю при всякихъ значеніяхъ весьма малаго промежутка времени ϑ:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\varepsilon^2}{dt^2}\frac{\vartheta}{1.2} + \frac{d^3\varepsilon}{dt^3}\frac{\vartheta^2}{1.2.3} + \ldots = 0;$$

а это можетъ имѣть мѣсто только при существованіи равенствъ:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(493)}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(498)}$$

$$\frac{d^3\varepsilon}{dt^3} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(499)}$$

. . . .

Такимъ образомъ, существованіе удерживающей связи влечетъ за собою существованіе ряда равенствъ (493), (498), (499). . . .

Полученное нами равенство (493), выражающее зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью, можетъ быть представлено еще въ одномъ видѣ, какъ будетъ указано въ § 62.

§ 61. Дифференціальные параметры связи и ихъ направленія.

Положимъ, что точки m_1, m_2, m_3, . . . m_i, . . . m_n связаны связью удерживающею (491) или неудерживающею (492); выберемъ произвольный моментъ времени и положимъ, что въ этотъ моментъ точки m_1, m_2, . . . m_n находятся въ положеніяхъ M_1, M_2, . . . M_i, . . . M_n; для отличія намѣченнаго нами момента отъ другихъ моментовъ времени и точекъ M_1, M_2, . . . M_n отъ другихъ точекъ пространства, означимъ этотъ моментъ буквою τ и координаты точекъ

$$M_1 \quad M_2 \ldots M_i \ldots M_n$$

буквами:

$$a_1, \quad a_2, \ldots a_i, \ldots a_n$$

$$b_1, \quad b_2, \ldots b_i, \ldots b_n$$

$$c_1, \quad c_2, \ldots c_i, \ldots c_n.$$

Если въ функціи ϑ придать величинамъ $x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n$ постоянныя и неизмѣнныя значенія $a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n$, то уравненіе (491) обратится въ уравненіе:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n, t) = 0 \ldots . \textbf{(500)}$$

той удерживающей преграды для точки m_1, въ которую обратится удерживающая связь (491), когда остальныя точки $m_2, m_3, \ldots . m_i, \ldots m_n$ будутъ *закрѣплены* въ положеніяхъ $M_2, M_3, \ldots . M_i, \ldots . M_n$. Уравненіе (500) выражаетъ нѣкоторую поверхность измѣняемаго вида; въ моментъ τ эта поверхность имѣетъ видъ и положеніе, выражаемое уравненіемъ:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau) = 0, \ldots . \textbf{(501)}$$

и тогда навѣрно проходитъ черезъ точку M_1.

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ положительною нормалью N_1 къ поверхности (501) въ точкѣ M_1, выражаются, какъ извѣстно (см. (154) стр. 112 и (259) стр. 175), слѣдующими формулами:

$$\cos(N_1, X) = \frac{1}{P_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1},$$

$$\cos(N_1, Y) = \frac{1}{P_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial y_1},$$

$$\cos(N_1, Z) = \frac{1}{P_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_1}, \quad P_1 = +\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z_1}\right)^2};$$

здѣсь, въ производныхъ, вмѣсто x_1, y_1, z_1, должно подставить a_1, b_1, c_1, а вмѣсто $x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n, t$, заключающихся въ функціи ϑ, подставлены: $a_2, b_2, c_2, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau$.

Если же закрѣпимъ всѣ точки, исключая m_i, въ положеніяхъ $M_1, M_2, \ldots . M_{i-1}, M_{i+1}, M_n$, то связь (491) обратится въ удерживающую преграду для точки m_i; преграда эта въ моментъ τ будетъ имѣть видъ и положеніе поверхности, проходящей черезъ точку M_i и представляемой уравненіемъ:

$$\vartheta(a_1, b_1, c_1, \ldots . x_i, y_i, z_i, \ldots . a_n, b_n, c_n, \tau) = 0, \ldots \textbf{(502)}$$

(первая часть этого уравненія заключаетъ только три перемѣнныя: x_i, y_i, z_i; всѣ остальныя величины: a_1, b_1, c_1, ... a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, ... a_n, b_n, c_n, τ — постоянны).

Положительная нормаль N_i, возстановленная изъ точки M_i къ поверхности (502), составляетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$\cos(N_i, X) = \frac{1}{P_i}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i},$$

$$\cos(N_i, Y) = \frac{1}{P_i}\frac{\partial \vartheta}{\partial y_i},$$

$$\cos(N_i, Z) = \frac{1}{P_i}\frac{\partial \vartheta}{\partial z_i}; \quad P_i = +\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z_i}\right)^2}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что частныя производныя отъ функціи ϑ по координатамъ могутъ быть выражены помощію величинъ P_1, P_2, ... P_n, и направленій N_1, N_2, ... N_n; этимъ обстоятельствомъ мы будемъ часто пользоваться въ нашихъ разсужденіяхъ, а потому условимся относительно наименованія и обозначенія этихъ величинъ и направленій.

Величины P_1, P_2, ... P_n называются *дифференціальными параметрами перваго порядка функціи* ϑ *въ точкахъ* m_1, m_2,....m_n; мы условимся называть ихъ *дифференціальными параметрами связи* (491) или (492) *въ точкахъ* m_1, m_2, ... m_n; такимъ образомъ связь имѣетъ въ каждой изъ связываемыхъ ею точекъ особый дифференціальный параметръ.

Направленія N_1, N_2, ... N_n называются *направленіями* дифференціальныхъ параметровъ P_1, P_2, ... P_n; слѣдовательно, эти параметры разсматриваются, подобно радіусамъ векторамъ, скоростямъ, ускореніямъ, силамъ и количествамъ движенія, какъ величины, изображаемыя длинами, отложенными по надлежащимъ направленіямъ.

По этой причинѣ мы будемъ обозначать направленія N_1, N_2,...N_n тѣми же знаками P_1, P_2, ... P_n, какими обозначаемъ величины параметровъ, а такъ какъ одна и таже точка можетъ быть подчинена нѣсколькимъ связямъ, то, для отличія знаковъ дифференціальныхъ

параметровъ различныхъ связей въ одной и той же точкѣ, мы будемъ присоединять къ P знакъ обозначающій номеръ связи; такимъ образомъ знаки:

$$(P_1 в),\ (P_2 в), \ldots (P_i в), \ldots (P_n в)$$

будутъ обозначать и величины и направленія дифференціальныхъ параметровъ связи (491) или связи (492) въ точкахъ:

$$m_1,\ m_2, \ldots m_i, \ldots m_n.$$

Величина и направленіе дифференціальнаго параметра $P_i в$ опредѣляются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos(P_i в, X) &= \frac{1}{(P_i в)}\frac{\partial в}{\partial x_i} \\ \cos(P_i в, Y) &= \frac{1}{(P_i в)}\frac{\partial в}{\partial y_i} \\ \cos(P_i в, Z) &= \frac{1}{(P_i в)}\frac{\partial в}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(503)}$$

$$(P_i в) = +\sqrt{\left(\frac{\partial в}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial в}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial в}{\partial z_i}\right)^2} \ldots\ldots \mathbf{(503\ bis)}$$

§ 62 Уравненіе (493) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v_1(P_1 в)\cos(P_1 в, v_1) + v_2(P_2 в)\cos(P_2 в, v_2) + \ldots$$

$$\ldots + v_n(P_n в)\cos(P_n в, v_n) + \frac{\partial в}{\partial t} = 0, \ldots \mathbf{(493, a)}$$

или:

$$\frac{\partial в}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i в)\cos(P_i в, v_n) = 0 \ldots\ldots \mathbf{(493, a)}$$

Если функція в незаключаетъ явнымъ образомъ времени, то частная производная отъ в равна нулю; слѣдовательно, *зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью, уравненіе которой:*

$$в(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \ldots \mathbf{(491, b)}$$

незаключаетъ явнымъ образомъ времени t, выражается равенствомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\mathfrak{s})\cos(P_i\mathfrak{s}, v_i) = 0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\mathbf{(493, \mathfrak{b})}$$

Въ этомъ уравненіи заключаются собственно не самыя скорости точекъ, но проэкція скорости каждой точки на направленіе дифференціальнаго параметра связи въ этой же точкѣ; поэтому, только эти проэкціи подлежатъ ограниченію, выражаемому уравненіемъ (493, $\mathfrak{b}$).

Изъ этого уравненія (493, $\mathfrak{b}$) мы выведемъ нѣсколько заключеній относительно тѣхъ ограниченій, которымъ должны подчиняться скорости точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, $\mathfrak{b}$).

Уравненіе (493, $\mathfrak{b}$) не допускаетъ, чтобы сказанныя проэкціи могли быть положительными для всѣхъ точекъ одновременно; точно также онѣ не могутъ быть и одновременно отрицательными для всѣхъ точекъ связываемыхъ удерживающею связью (491, $\mathfrak{b}$). Необходимо, чтобы проэкціи эти у одной части всего числа точекъ были положительныя, а у остальныхъ — отрицательныя.

Эти проэкціи могутъ быть равны нулю у всѣхъ точекъ одновременно, то есть удерживающая связь (491, $\mathfrak{b}$) допускаетъ, чтобы всѣ точки имѣли произвольныя скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

Если всѣ точки, за исключеніемъ одной, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то уравненіе (493, $\mathfrak{b}$) требуетъ, чтобы и эта точка имѣла скорость перпендикулярную къ ея параметру.

Если всѣ точки, за исключеніемъ двухъ, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то скорость одной изъ двухъ оставшихся точекъ должна составлять острый уголъ съ ея параметромъ, а скорость другой должна быть направлена подъ тупымъ угломъ къ ея параметру.

Всѣ точки, связанныя удерживающею связью (491, $\mathfrak{b}$), могутъ

имѣть одновременно скорости равныя между собою и параллельныя всякому такому направленію H, для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(P_i\text{в})\cos(P_i\text{в}, H) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(504)}$$

Для опредѣленія этихъ направленій надо изобразить дифференціальные параметры P_1в, P_2в, $\ldots P_n$в длинами и построить геометрическую сумму Pв этихъ длинъ; по свойству геометрической суммы:

$$(P\text{в})\cos(P\text{в}, H) = \sum_{i=1}^{i=n}(P_i\text{в})\cos(P_i\text{в}, H),$$

поэтому искомыя направленія суть всѣ тѣ, которыя перпендикулярны къ направленію геометрической суммы Pв дифференціальныхъ параметровъ P_1в, P_2в, $\ldots P_n$в.

Если геометрическая сумма дифференціальныхъ параметровъ P_1в, P_2в, $\ldots P_n$в равна нулю, то тогда равенство (504) имѣетъ мѣсто для какаго угодно направленія.

Примѣръ 53. Дифференціальные параметры удерживающей связи

$$+\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0$$

равны единицѣ и направлены по продолженіямъ линіи, соединяющей обѣ точки m_1 и m_2. Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1\cos(\overline{M_2M_1}, v_1) - v_2\cos(\overline{M_2M_1}, v_2) = 0,$$

гдѣ $\overline{M_2M_1}$ означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_2 къ точкѣ m_1; это равенство выражаетъ, что скорости точекъ m_1 и m_2 должны имѣть равныя проэкціи на направленіе $\overline{M_2M_1}$; такова зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ связью, удерживающею ихъ въ постоянномъ разстояніи одна отъ другой.

Примѣръ 57. Удерживающая связь:

$$r_1 + r_2 - l = 0,$$

$$r_1 = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\ r_2 = +\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

имѣетъ дифференціальные параметры равные единицѣ и направленные по продолженіямъ радіусовъ векторовъ $\overline{OM_1} = r_1$ и $\overline{OM_2} = r_2$. Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1 \cos(r_1, v_1) + v_2 \cos(r_2, v_2) = 0$$

и выражаетъ, что проэкція скорости точки m_1 на направленіе $\overline{OM_1}$ должна имѣть величину равную величинѣ проэкціи скорости точки m_2 на направленіе $\overline{M_2O}$.

Скорости обѣихъ точекъ могутъ быть равны и параллельны одна другой, но для этого направленіе скоростей должно быть перпендикулярно къ линіи, дѣлящей уголъ M_1OM_2 пополамъ.

Примѣръ 58. Представимъ себѣ, что двѣ точки m_1 и m_2 подвержены удерживающей связи, выражаемой равенствомъ:

$$r_1 + r_{12} + r_{a2} - l = 0,$$

гдѣ

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \;\; r^2_{a2} = (x_2 - a)^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$r^2_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Эту связь можно представить себѣ въ видѣ нерастяжимой нити длины l, которая концами своими прикрѣплена къ началу координатъ и къ неподвижной точкѣ A (черт. 34) на оси X; точки m_1 и m_2 должны оставаться на нити, но могутъ скользить по ней; нить всегда натянута, такъ что сумма длинъ OM_1, M_1M_2, M_2A постоянно равна l.

Изъ равенствъ:

$$P_1 \cos(P_1, X) = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \;\; P_2 \cos(P_2, X) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} + \frac{x_2 - a}{r_{a2}}$$

и изъ четырехъ прочихъ мы найдемъ, что

$$P_1 = 2 \cos\frac{\alpha_1}{2}, \;\; P_2 = 2 \cos\frac{\alpha_2}{2},$$

гдѣ α_1 есть величина угла OM_1M_2, а α_2 — величина угла M_1M_2A; направлены P_1 и P_2 по линіямъ, дѣлящимъ внѣшніе углы OM_1M_2 и M_1M_2A пополамъ (см. черт. 34).

Уравненіе (493, b) получаетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$v_1 \cos\frac{\alpha_1}{2} \cos(P_1, v_1) + v_2 \cos\frac{\alpha_2}{2} \cos(P_2, v_2) = 0.$$

Направленіе геометрической суммы параметровъ P_1 и P_2 дѣлитъ пополамъ уголъ между направленіями $\overline{OM_1}$ и $\overline{AM_2}$, поэтому точки m_1 и m_2 могутъ имѣть одновременно равныя и параллельныя скорости только по направленіямъ перпендикулярнымъ къ линіи μP (см. черт. 34).

Примѣръ 59. Двѣ точки m_1, m_2, остающіяся постоянно въ плоскости XY, связаны удерживающею связью, выражаемою уравненіемъ:

$$x_1y_2 - y_1x_2 - a = 0;$$

это уравненіе выражаетъ, что удвоенная площадь треугольника OM_1M_2 сохраняетъ постоянную величину a.

Составимъ равенства:

$$P_1 \cos(P_1, X) = y_2, \quad P_2 \cos(P_2, X) = -y_1$$

$$P_1 \cos(P_1, Y) = -x_2, \quad P_2 \cos(P_2, Y) = x_1;$$

изъ нихъ оказывается, что параметръ P_2 равенъ длинѣ OM_1 и направленъ перпендикулярно къ направленію $\overline{OM_1}$ въ такую сторону, что наблюдателю, стоящему въ O по оси Z и смотрящему на M_1, онъ кажется направленнымъ слѣва на право (см. черт. 35); параметръ P_1 равенъ длинѣ OM_2 и направленъ перпендикулярно къ этой длинѣ, какъ показано на черт. 35-мъ.

Скорости точекъ m_1 и m_2 должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$r_2v_1 \cos(P_1, v_1) + r_1v_2 \cos(P_2, v_2) = 0.$$

По отношенію къ такимъ удерживающимъ связямъ, въ уравненіи которыхъ время входитъ явнымъ образомъ, мы обратимъ вниманіе на слѣдующія обстоятельства.

1) Уравненіе (493, a) не допускаетъ, чтобы скорости всѣхъ точекъ были равны нулю или чтобы всѣ точки имѣли скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

2) Если частная производная отъ θ по t есть величина положительная, то изъ равенства (493, a) слѣдуетъ, что всѣ точки могутъ обладать скоростями, составляющими тупые углы съ ихъ дифференціальными параметрами; обратно, если сказанная частная производная есть величина отрицательная, то всѣ точки могутъ обладать скорос-

тями, составляющими острые углы съ ихъ дифференціальными параметрами; напримѣръ, если

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} < 0,$$

то точки

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$$

могутъ обладать скоростями:

$$AP_1, AP_2, \ldots AP_i, \ldots AP_n,$$

направленными по этимъ параметрамъ; здѣсь A означаетъ величину отношенія:

$$A = \frac{-\frac{\partial \vartheta}{\partial t}}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i^2}$$

3) Пусть

$$v_1, v_2, \ldots v_i, \ldots v_n$$

$$w_1, w_2, \ldots w_i, \ldots w_n$$

суть двѣ какія либо совокупности скоростей точекъ

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n,$$

удовлетворяющія уравненію (493, а); вычтя уравненіе

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} w_i P_i \cos(P_i, w_i) = 0$$

изъ уравненія

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) = 0,$$

получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i (P_i \vartheta) \cos(P_i \vartheta, u_i) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(505)}$$

гдѣ u_i есть геометрическая разность между скоростями v_i и w_i, то есть:

$$\overline{u}_1 = \overline{v}_1 - \overline{w}_1,\ \overline{u}_2 = \overline{v}_2 - \overline{w}_2, \ldots \overline{u}_n = \overline{v}_n - \overline{w}_n \ldots \textbf{(505 bis)}$$

§ 63. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ неудерживающею связью.

Когда координаты точекъ, связанныхъ неудерживающею связью (492), дѣлаютъ функцію в большею нуля, то есть удовлетворяютъ неравенству:

$$\text{в}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t) > 0,$$

тогда скорости точекъ (а также и ускоренія ихъ) не подлежатъ никакому ограниченію.

Когда же координаты точекъ дѣлаютъ функцію в равною нулю, тогда скорости точекъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_i (P_i \text{в}) \cos(P_i \text{в}, v_i) \geqslant 0 \ldots\ldots \textbf{(506, a)}$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ моментъ t координаты точекъ удовлетворяютъ уравненію:

$$\text{в}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

и такъ какъ въ послѣдующій весьма близкій моментъ $(t + \vartheta)$ онѣ должны удовлетворять условію:

$$\text{в}((t + \vartheta)) \geqslant 0,$$

то, на основаніи равенства (495), должно быть удовлетворено условіе:

$$\frac{d\text{в}}{dt}\vartheta + \frac{d^2\text{в}}{dt^2}\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3\text{в}}{dt^3}\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots \geqslant 0$$

при всякихъ значеніяхъ весьма малаго промежутка времени ϑ; но, при надлежащей степени малости промежутка времени ϑ, знакъ всего вышеприведеннаго ряда опредѣляется знакомъ члена, заключающаго низ-

шую степень $\mathfrak{S}$, поэтому полная производная перваго порядка отъ $\mathfrak{s}$ по t должна быть не менѣе нуля, то есть должно быть:

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} \geqslant 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(506, a)}$$

какъ сказана выше.

Если

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} > 0,$$

то полныя производныя втораго и высшихъ порядковъ не подлежатъ никакому ограниченію, если же

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(493)}$$

то полная производная втораго порядка должна быть не менѣе нуля, то есть должно быть:

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(507)}$$

Если скорости точекъ системы удовлетворяютъ равенству (493), а ускоренія — равенству:

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(498)}$$

то должно быть:

$$\frac{d^3\mathfrak{s}}{dt^3} \geqslant 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(508)}$$

и такъ далѣе.

Если функція $\mathfrak{s}$ незаключаетъ времени явнымъ образомъ, то условіе (506, a) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i\mathfrak{s}) \cos(P_i\mathfrak{s}, v_i) \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots \textbf{(506, b)}$$

Когда координаты точекъ $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$, *подчиненныхъ неудерживающей связи:*

$$\mathfrak{s}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) \geqslant 0 \ldots\ldots \textbf{(492, b)}$$

(выраженіе которой незаключаетъ времени явнымъ образомъ), *удовлетворяютъ равенству*:

$$в(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0,$$

тогда скорости точекъ должны удовлетворять условію (506, b).

Это условіе не допускаетъ, чтобы углы, составляемые направленіемъ скорости и направленіемъ дифференціальнаго параметра въ каждой точкѣ, были тупыми во всѣхъ точкахъ одновременно.

Если между углами:

$$(P_1, v_1), \ (P_2, v_2), \ldots (P_i, v_i), \ldots (P_n, v_n)$$

нѣтъ ни одного тупаго, то скорости могутъ быть совершенно произвольны.

Напримѣръ, всѣ точки могутъ обладать одновременно произвольными скоростями, направленными вдоль по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ.

Примѣръ 54. Дифференціальные параметры неудерживающей связи:

$$l^2 - r^2_{12} \geqslant 0,$$

(гдѣ r_{12} есть разстояніе между точками m_1 и m_2) направлены внутрь кратчайшаго разстоянія между точками (черт. 36) и равны:

$$P_1 = P_2 = 2r_{12},$$

какъ это слѣдуетъ изъ равенствъ

$$P_1 \cos(P_1, X) = -2(x_1 - x_2), \ P_2 \cos(P_2, X) = -2(x_2 - x_1)$$

и изъ четырехъ остальныхъ; если же эту самую связь выразимъ такъ:

$$l - r_{12} \geqslant 0,$$

то величины дифференціальныхъ параметровъ окажутся равными единицѣ.

Условіе (506, b) для этой связи можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v_1 \cos(\overline{M_1M_2}, v_1) - v_2 \cos(\overline{M_1M_2}, v_2) \geqslant 0,$$

то есть проэкція скорости точки m_1 на направленіе $\overline{M_1M_2}$ должна быть *болѣе* проэкціи на то же направленіе скорости точки m_2.

Примѣръ 55. Дифференціальные параметры неудерживающей связи

$$r_{12} - l \geqslant 0$$

равны единицѣ и направлены внаружу кратчайшаго разстоянія между точками m_1 и m_2 (черт. 37). Условіе (506, b):

$$v_2 \cos(\overline{M_1M_2}, v_2) - v_1 \cos(\overline{M_1M_2}, v_1) \geqslant 0$$

въ этомъ случаѣ имѣетъ смыслъ обратный смыслу условія предыдущаго примѣра, то есть оно требуетъ, чтобы проэкція скорости v_1 на направленіе $\overline{M_1M_2}$ была *менѣе* проэкціи скорости v_2.

Примѣръ 56:

$$l - r_{12} - r_{23} \geqslant 0.$$

Параметры P_1 и P_3 въ точкахъ M_1 и M_3 равны единицѣ и направлены по линіямъ $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_3M_2}$ (черт. 38); параметръ P_2 въ точкѣ M_2 равенъ $2\cos\frac{\alpha}{2}$ (гдѣ α означаетъ величину угла $M_1M_2M_3$) и направленъ по линіи, дѣлящей уголъ $M_1M_2M_3$ пополамъ.

Скорости точекъ m_1, m_2, m_3 должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$v_1 \cos\left(\overline{M_1M_2}, v_1\right) + v_3 \cos\left(\overline{M_3M_2}, v_3\right) + 2v_2 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\left(P_2, v_2\right) \geqslant 0.$$

Примѣръ 60. На гибкой нерастяжимой нити длины l находятся точки $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}, m_n$; точки m_1 и m_n прикрѣплены къ концамъ нити, всѣ же остальныя могутъ скользить вдоль по ней, причемъ, однако, не долженъ нарушаться порядокъ расположенія точекъ вдоль нити; эта связь можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$l - r_{12} - r_{23} - r_{34} - \ldots - r_{(n-1)n} \geqslant 0.$$

Дифференціальные параметры въ точкахъ M_1 и M_n равны единицѣ и направлены вдоль по нити (см. черт. 39); дифференціальные же параметры въ остальныхъ точкахъ равны:

$$P_2 = 2\cos\frac{\alpha_2}{2}, \;\; P_3 = 2\cos\frac{\alpha_3}{2}, \ldots P_{n-1} = 2\cos\frac{\alpha_{n-1}}{2}$$

и направлены по линіямъ, дѣлящимъ пополамъ углы $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$.

§ 64. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ матерьяльныхъ точекъ.

Матерьяльныя точки:

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n \text{ *)}$$

свободны, если нѣтъ преградъ, ограничивающихъ свободу движенія точекъ и если нѣтъ никакихъ связей между ними; тогда каждая изъ этихъ точекъ можетъ имѣть какую угодно скорость и какое угодно ускореніе по произвольному направленію и притомъ независимо отъ остальныхъ точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія этихъ точекъ.

Пусть X_i, Y_i, Z_i суть проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей F_i всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i; такъ какъ она, подобно всѣмъ прочимъ точкамъ, свободна, то дифференціальныя уравненія ея движенія будутъ:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i,\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i,\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i \ldots \mathbf{(509, i)}$$

Подобныя же уравненія напишемъ для всѣхъ прочихъ точекъ; всего будемъ имѣть $3n$ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1'' &= X_1, \ldots m_ix_i'' = X_i, \ldots m_nx_n'' = X_n \\ m_1y_1'' &= Y_1, \ldots m_iy_i'' = Y_i, \ldots m_ny_n'' = Y_n \\ m_1z_1'' &= Z_1, \ldots m_iz_i'' = Z_i, \ldots m_nz_n'' = Z_n \end{aligned}\right\} \ldots \mathbf{(509)}$$

Вторыя части этихъ дифференціальныхъ уравненій (то есть выраженія силъ X_1, Y_1, $Z_1, \ldots Z_n$) суть, вообще говоря, нѣкоторыя функціи времени, координатъ точекъ и проэкцій ихъ скоростей на оси координатъ.

Коль скоро всѣ эти функціи извѣстны, то, для опредѣленія движенія точекъ, надо дифференціальныя уравненія (509) интегрировать.

---

*) Буквы m_1, $m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ означаютъ массы матерьяльныхъ точекъ.

Если опредѣленіе движенія каждой изъ этихъ точекъ требуетъ интегрированія всѣхъ уравненій (509) въ совокупности и не можетъ быть отдѣлено отъ опредѣленія движенія всѣхъ остальныхъ точекъ, то тогда эти точки m_1, $m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ образуютъ *систему свободныхъ матерьяльныхъ точекъ*.

Силы, приложенныя къ свободнымъ точкамъ и связывающія ихъ въ одну систему, могутъ быть весьма различнаго характера; къ числу такихъ силъ принадлежатъ всякія силы взаимнодѣйствія между матерьяльными точками.

Примѣръ 61. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ m_1 и m_2 взаимно-отталкиваемыхъ (по линіи ихъ соединяющей) силами:

$$F(r_{12}),$$

(гдѣ r_{12} означаетъ величину разстоянія между точками).

Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія этой системы будутъ слѣдующія:

$$m_1 x_1'' = F(r_{12})\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad m_2 x_2'' = F(r_{12})\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}$$

$$m_1 y_1'' = F(r_{12})\frac{y_1 - y_2}{r_{12}}, \quad m_2 y_2'' = F(r_{12})\frac{y_2 - y_1}{r_{12}}$$

$$m_1 z_1'' = F(r_{12})\frac{z_1 - z_2}{r_{12}}, \quad m_2 z_2'' = F(r_{12})\frac{z_2 - z_1}{r_{12}}.$$

Примѣръ 62. Система состоитъ изъ n свободныхъ матерьяльныхъ точекъ; каждыя двѣ точки взаимно притягиваются силами, пропорціональными произведенію изъ массъ этихъ точекъ и изъ разстоянія между ними, напримѣръ, силы взаимнаго притяженія точекъ m_i и m_k равны:

$$\mu m_i m_k r_{ik},$$

гдѣ численный множитель μ одинаковъ для всѣхъ паръ точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія для точки m_1. Проэкція на ось X равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равна:

$$X_1 = -\mu m_1\Big[m_2(x_1 - x_2) + m_3(x_1 - x_3) + \ldots + m_n(x_1 - x_n)\Big],$$

а это выраженіе можно представить такъ:

$$X_1 = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_1 - x_k);$$

поэтому дифференціальныя уравненія точки m_1 будутъ слѣдующія:

$$m_1 x_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_1 - x_k)$$

$$m_1 y_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(y_1 - y_k)$$

$$m_1 z_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^{k=n} m_k(z_1 - z_k).$$

Примѣръ 63. Система состоитъ изъ двухъ точекъ, остающихся въ плоскости XY; между точками существуютъ взаимнодѣйствія равныя, противоположныя, но направленныя перпендикулярно къ линіи, соединяющей обѣ точки; силы эти равны:

$$F = \mu \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m_1 x_1'' = \mp \mu m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^2_{12}}, \quad m_2 x_2'' = \mp \mu m_1 m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^2_{12}}$$

$$m_1 y_1'' = \pm \mu m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^2_{12}}, \quad m_2 y_2'' = \pm \mu m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^2_{12}};$$

верхніе знаки относятся къ тому случаю, когда взаимнодѣйствія направлены въ стороны, указанныя на чертежѣ 40-мъ, нижніе — въ противоположномъ случаѣ (черт. 41).

§ 65. Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ преградамъ, но не связанныхъ между собою никакими связями.

Если которая либо изъ системы точекъ $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ ограничена въ своемъ движеніи какими либо поверхностями, то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій этой точки будутъ заключаться проэкціи реакцій этихъ поверхностей; напримѣръ, если свобода движенія точки m_1 ограничена двумя преградами:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, t) = 0, \ f_2(x_1, y_1, z_1, t) = 0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія этой точки будутъ:

$$m_1 x_1'' = X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

$$m_1 y_1'' = Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1},$$

$$m_1 z_1'' = Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1};$$

если, далѣе, свобода движенія точки m_2 ограничена одною преградою:

$$f_3(x_2, y_2, z_2, t) = 0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія этой точки будутъ:

$$m_2 x_2'' = X_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2},$$

$$m_2 y_2'' = Y_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2},$$

$$m_2 z_2'' = Z_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z_2},$$

и т. д.

§ 66. Условіе, которому должны удовлетворять ускоренія точекъ, связываемыхъ какою либо связью.

1) Если точки $m_1, m_2, \ldots m_n$ связаны какою либо удерживающею связью, то, какъ было уже выведено въ § 60-мъ, ускоренія ихъ

должны удовлетворять равенству (498), которое можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i(P_i в) \cos(P_i в, \dot{v}_i) + Kв = 0 \ldots\ldots (498, a)$$

2) Если же связь неудерживающая, то, когда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i в) \cos(P_i в, v_i) + \frac{\partial в}{\partial t} = 0, \ldots\ldots (493, a)$$

тогда ускоренія ихъ должны удовлетворять условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i(P_i в) \cos(P_i в, \dot{v}_i) + Kв \geqslant 0; \ldots\ldots (507, a)$$

когда же скорости точекъ удовлетворяютъ неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_i в) \cos(P_i в, v_i) + \frac{\partial в}{\partial t} > 0,$$

тогда ускоренія ихъ неподлежатъ никакому ограниченію.

§ 67. Совокупность реакцій связи.

Положимъ, что система матерьяльныхъ точекъ:

$$m_1, m_2, \ldots . m_i, \ldots . m_n$$

подвержена тѣмъ же самымъ силамъ, какъ и въ параграфѣ 64-мъ; но теперь предположимъ, что точки не вполнѣ свободны, а связаны между собою удерживающею связью:

$$в(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ldots . (491)$$

При существованіи этой связи матерьяльныя точки могутъ получить тѣ самыя ускоренія, которыя сообщаютъ имъ приложенныя къ

нимъ задаваемыя силы $F_1, F_2, \ldots F_n$, *) если только эти силы удовлетворяютъ тому условію, что сумма

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{F_i}{m_i} P_i \cos(P_i, F_i) + K\text{в}$$

равна нулю; если же эта сумма болѣе или менѣе нуля, то связь воспрепятствуетъ точкамъ получить вышесказанныя ускоренія и заставитъ ихъ принять другія ускоренія, удовлетворяющія равенству (**498**, а).

Такое дѣйствіе связи должно заключаться въ образованіи силъ, дѣйствующихъ со стороны связи и приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ; эти силы появляются только тогда, когда прочія причины движенія побуждаютъ точки преодолѣть или разорвать связь.

Пусть R_1в или R_1 означаетъ величину и направленіе силы дѣйствія связи в на точку m_1; R_2в или R_2 — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_2; . . . . R_iв или R_i — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_i; . . . . R_nв или R_n — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_n.

Эти силы мы будемъ называть *силами дѣйствія связи* в, а остальныя силы $F_1, F_2, \ldots F_n$ — *задаваемыми силами*.

Ускореніе, получаемое точкою m_1, сообщается ей равнодѣйствующею изъ приложенныхъ къ ней задаваемыхъ силъ и силы дѣйствія на нее связи в, то есть:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1'' &= X_1 + R_1\text{в} \cos(R_1\text{в}, X), \\ m_1 y_1'' &= Y_1 + R_1\text{в} \cos(R_1\text{в}, Y), \\ m_1 z_1'' &= Z_1 + R_1\text{в} \cos(R_1\text{в}, Z); \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathbf{510, 1})$$

это суть дифференціальныя уравненія движенія точки m_1.

---

*) $F_i \cos(F_i, X) = X_i$, $F_i \cos(F_i, Y) = Y_i$, $F_i \cos(F_i, Z) = Z_i$.

Дифференціальныя уравненія движенія прочихъ точекъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} m_2x_2'' &= X_2 + R_2\text{в}\cos(R_2\text{в}, X), \\ m_2y_2'' &= Y_2 + R_2\text{в}\cos(R_2\text{в}, Y), \\ m_2z_2'' &= Z_2 + R_2\text{в}\cos(R_2\text{в}, Z), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (510, 2)$$

. . . .

и такъ далѣе.

Ускоренія, заключающіяся въ первыхъ частяхъ этихъ уравненій, должны удовлетворять равенству (498, a), а потому силы R_1, R_2, ... R_n должны удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{R_i}{m_i}P_i\cos(R_i, P_i) + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}\left(X_i\frac{\partial\text{в}}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial\text{в}}{\partial y_i} + Z_i\frac{\partial\text{в}}{\partial z_i}\right) +$$

$$+ K\text{в} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (498, \mathfrak{b})$$

Это равенство заключаетъ въ себѣ не самыя силы R_1, R_2, ... R_i, ... R_n, но только проэкціи ихъ на направленія соотвѣтственныхъ дифференціальныхъ параметровъ; отмѣтимъ эти проэкціи слѣдующими знаками:

$$R_1\cos(R_1, P_1) = \mathfrak{R}_1,\ \ R_2\cos(R_2, P_2) = \mathfrak{R}_2, \ldots R_n\cos(R_n, P_n) = \mathfrak{R}_n,$$

тогда равенство (498, $\mathfrak{b}$) получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}\mathfrak{R}_iP_i + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}F_iP_i\cos(F_i, P_i) + K\text{в} = 0 \ldots (498, \mathfrak{c})$$

Остальныя части или составляющія силъ R_1, R_2, ... R_n, не входящія въ это равенство, обозначимъ слѣдующими знаками:

$$R_1\sin(R_1, P_1) = T_1,\ \ R_2\sin(R_2, P_2) = T_2, \ldots R_n\sin(R_n, P_n) = T_n;$$

T_1 есть сила, приложенная къ точкѣ m_1 и направленная въ плоскости перпендикулярной къ дифференціальному параметру P_1; T_2 есть сила,

приложенная къ точкѣ m_2 и направленная въ плоскости перпендикулярной къ P_2, и т. д.

Такъ какъ силы $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, ... $\mathfrak{N}_n$ направлены вдоль по дифференціальнымъ параметрамъ или противоположно имъ (напримѣръ $\mathfrak{N}_i$, если знакъ ея положительный, направлена вдоль по P_i, если же знакъ ея отрицательный, то она направлена противоположно P_i), то проэкціи ихъ на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_1\cos(P_1, X) &= \frac{\mathfrak{N}_1}{P_1}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_1} = \lambda_1\frac{\partial \text{в}}{\partial x_1}\\ \mathfrak{N}_1\cos(P_1, Y) &= \frac{\mathfrak{N}_1}{P_1}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_1} = \lambda_1\frac{\partial \text{в}}{\partial y_1}\\ \mathfrak{N}_1\cos(P_1, Z) &= \frac{\mathfrak{N}_1}{P_1}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_1} = \lambda_1\frac{\partial \text{в}}{\partial z_1}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(511,1)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_2\cos(P_2, X) &= \frac{\mathfrak{N}_2}{P_2}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_2} = \lambda_2\frac{\partial \text{в}}{\partial x_2}\\ \mathfrak{N}_2\cos(P_2, Y) &= \frac{\mathfrak{N}_2}{P_2}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_2} = \lambda_2\frac{\partial \text{в}}{\partial y_2}\\ \mathfrak{N}_2\cos(P_2, Z) &= \frac{\mathfrak{N}_2}{P_2}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_2} = \lambda_2\frac{\partial \text{в}}{\partial z_2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(511,2)$$

. . . .

. . . .

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_n\cos(P_n, X) &= \frac{\mathfrak{N}_n}{P_n}\frac{\partial \text{в}}{\partial x_n} = \lambda_n\frac{\partial \text{в}}{\partial x_n}\\ \mathfrak{N}_n\cos(P_n, Y) &= \frac{\mathfrak{N}_n}{P_n}\frac{\partial \text{в}}{\partial y_n} = \lambda_n\frac{\partial \text{в}}{\partial y_n}\\ \mathfrak{N}_n\cos(P_n, Z) &= \frac{\mathfrak{N}_n}{P_n}\frac{\partial \text{в}}{\partial z_n} = \lambda_n\frac{\partial \text{в}}{\partial z_n}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(511,n)$$

Величины λ_i, выражающія величины отношеній $(\mathfrak{N}_i : P_i)$, введемъ, при помощи равенствъ:

$$\mathfrak{N}_1 = \lambda_1 P_1,\ \mathfrak{N}_2 = \lambda_2 P_2, \ldots \mathfrak{N}_n = \lambda_n P_n,$$

въ равенство (498, c); получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\lambda_i}{m_i}P_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}F_iP_i\cos(F_i, P_i) + K\text{в} = 0\ldots(498,d)$$

Примѣчаніе. Впослѣдствіи, когда будемъ разсматривать систему точекъ, связанную нѣсколькими связями, придется обозначать силы $\mathfrak{N}$ и множители λ болѣе сложными знаками; для того, чтобы отличить силы R, T, $\mathfrak{N}$ и множители λ, относящіеся къ связи s_1, отъ такихъ же силъ и множителей, относящихся къ прочимъ связямъ: s_2, s_3,...., мы условимся обозначать ихъ слѣдующими знаками:

Силы и множители, относящіеся къ связи:

$$s_1 = 0,$$

обозначимъ символами:

$$\mathfrak{N}_1 s_1,\ \mathfrak{N}_2 s_1, \ldots \mathfrak{N}_n s_1,$$

$$T_1 s_1,\ T_2 s_1, \ldots T_n s_1,$$

$$\lambda_1 s_1,\ \lambda_2 s_1, \ldots \lambda_n s_1;$$

силы и множители, относящіеся къ связи:

$$s_2 = 0,$$

обозначимъ символами:

$$\mathfrak{N}_1 s_2,\ \mathfrak{N}_2 s_2, \ldots \mathfrak{N}_n s_2,$$

$$T_1 s_2,\ T_2 s_2, \ldots T_n s_2,$$

$$\lambda_1 s_2,\ \lambda_2 s_2, \ldots \lambda_n s_2,$$

и такъ далѣе.

Каковы бы ни были множители λ_1, λ_2, ... λ_n, удовлетворяющіе равенству (498, d), мы можемъ каждый изъ нихъ представить въ видѣ суммы двухъ другихъ величинъ, а именно такъ:

$$\lambda_1 = \lambda + \Lambda_1,\ \lambda_2 = \lambda + \Lambda_2, \ldots \lambda_i = \lambda + \Lambda_i, \ldots \lambda_n = \lambda + \Lambda_n,$$

гдѣ первый членъ λ во вторыхъ частяхъ всѣхъ этихъ равенствъ одинъ и тотъ же.

Если мы подчинимъ величины Λ_1, Λ_2, ... Λ_i, ... Λ_n тому условію, чтобы онѣ удовлетворяли равенству:

$$\frac{\Lambda_1}{m_1} P_1^2 + \frac{\Lambda_2}{m_2} P_2^2 + \ldots + \frac{\Lambda_i}{m_i} P_i^2 + \ldots + \frac{\Lambda_n}{m_n} P_n^2 = 0, \ldots \textbf{(512)}$$

то тогда λ вполнѣ опредѣлится изъ слѣдующаго равенства:

$$\lambda \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_i^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\text{в} = 0 \,.\,. (498, \text{e})$$

Послѣ этого каждая изъ силъ R_iв окажется разложенною на три силы:

$$(\lambda\text{в}).(P_i\text{в});\ \ S_i\text{в} = (\Lambda_i\text{в}).(P_i\text{в});\ \ T_i\text{в} = (R_i\text{в}) \sin(R_i\text{в}, P_i\text{в});$$

первыя двѣ направлены вдоль по P_i или противоположно P_i, смотря по знаку величинъ λ и Λ_i, сила же T_i направлена въ плоскости перпендикулярной къ P_i; такимъ образомъ всѣ силы $R_1,\ R_2, \ldots R_n$, дѣйствующія со стороны связи в на точки $m_1,\ m_2, \ldots m_n$, приведутся къ слѣдующимъ тремъ группамъ силъ:

a) силы:

$$\lambda P_1,\ \lambda P_2, \ldots, \lambda P_i, \ldots \lambda P_n,$$

направленныя по дифференціальнымъ параметрамъ, если λ болѣе нуля, или противоположно дифференціальнымъ параметрамъ, если λ менѣе нуля; λ опредѣляется изъ уравненія (498, e);

b) силы:

$$S_1 = \Lambda_1 P_1,\ S_2 = \Lambda_2 P_2, \ldots S_i = \Lambda_i P_i, \ldots S_n = \Lambda_n P_n,$$

которыя должны удовлетворять равенству (512); каждая изъ этихъ силъ направлена по дифференціальному параметру связи въ той точкѣ, къ которой она приложена, или противоположно этому параметру, смотря по знаку множителя Λ, заключающагося въ выраженіи этой силы;

c) силы:

$$T_1 = R_1 \sin(R_1, P_1),\ T_2 = R_2 \sin(R_2, P_2), \ldots T_n = R_n \sin(R_n, P_n);$$

каждая изъ нихъ направлена перпендикулярно къ дифференціальному параметру связи въ той точкѣ, къ которой она приложена.

Всѣ силы группы (a) представляютъ собою, такъ сказать, одну

совокупность силъ, зависящую отъ величины множителя λ, общаго всѣмъ силамъ этой группы; какъ этотъ множитель, такъ и всѣ силы этой совокупности *вполнѣ опредѣляются* слѣдующими функціями и величинами:

1) видомъ функціи в, то есть аналитическимъ выраженіемъ связи $\text{в} = 0$,

2) величинами и направленіями задаваемыхъ силъ F_1, F_2,...F_n,

3) величинами и направленіями скоростей точекъ (скорости входятъ въ выраженіе $K\text{в}$),

4) величинами массъ точекъ.

Каждая связь воспроизводится въ дѣйствительности въ видѣ нѣкотораго механизма, объусловливающаго требуемую зависимость между движеніями матерьяльныхъ точекъ; нерѣдко одна и та же связь можетъ быть воспроизведена помощію механизмовъ различныхъ конструкцій. Однако эти обстоятельства не имѣютъ никакого значенія при опредѣленіи силъ группы (a), то есть эти силы вовсе не зависятъ ни отъ природы тѣлъ, входящихъ въ составъ механизма, воспроизводящаго связь $\text{в} = 0$, ни отъ конструкціи этого механизма.

Силы же T_1, T_2, ... T_n, S_1, S_2, ... S_n не опредѣляются тѣми функціями и величинами, которыя опредѣляютъ совокупность силъ (a), а при ближайшемъ ознакомленіи съ дѣйствіями механизмовъ, воспроизводящихъ связи, оказывается, что величины и направленія этихъ силъ (T_1, T_2, ... T_n, S_1, S_2, ... S_n) зависятъ отъ природы тѣлъ, образующихъ механизмъ и отъ конструкціи механизма.

Кромѣ того, слѣдуетъ еще замѣтить, что назначеніе силъ R_1, R_2, ... R_n (заключающееся въ томъ, чтобы вмѣстѣ съ задаваемыми силами сообщать точкамъ системы такія ускоренія, которыя удовлетворяли бы равенству (498, a)) выполняется однѣми только силами (a), безъ содѣйствія силъ (b) и (c); въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ смыслѣ силы группъ (b) и (c) не играютъ никакой существенной роли, потому что проэкція всякой силы T_i на соотвѣтственный параметръ P_i равна нулю, а силы S_1, S_2, ... S_n должны удовлетворять равенству (512).

На основаніи этихъ замѣчаній мы вправѣ признать группу силъ (a) существенною и необходимою составною частью системы силъ

(R_1, R_2,... R_n) дѣйствія связи на связываемыя ею точки; мы будемъ называть силы этой группы *реакціями связи*, а всю совокупность силъ (а) — *совокупностью реакцій связи* $в = 0$.

Силы же T_1, T_2,....T_n, S_1, S_2,....S_n слѣдуетъ отнести къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ и отъ конструкціи того механизма, который воспроизводитъ разсматриваемую нами связь.

Для примѣра опредѣленія реакцій обратимся къ тѣмъ удерживающимъ связямъ, которыя упомянуты въ § 62.

Примѣръ 53. Если выразить эту связь равенствомъ:

$$r_{12} - l = 0,$$

то дифференціальные параметры будутъ равны единицѣ и будутъ направлены по продолженіямъ разстоянія M_1M_2 (какъ на черт. 37-мъ); реакціи этой связи будутъ равны λ, гдѣ:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q + K),$$

$$Q = \left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2}\right)\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2}\right)\frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2}\right)\frac{z_1 - z_2}{r_{12}},$$

$$K = \frac{1}{r_{12}}\left[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2\right] -$$

$$-\frac{1}{r^3_{12}}\left[(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (y_1 - y_2)(y_1' - y_2') + (z_1 - z_2)(z_1' - z_2')\right]^2;$$

онѣ будутъ направлены вдоль по дифференціальнымъ параметрамъ (какъ на чертежѣ 37-мъ), если λ имѣетъ величину положительную; обратно, если λ имѣетъ величину отрицательную, то реакціи будутъ направлены противоположно дифференціальнымъ параметрамъ (т. е. такъ, какъ представлено на чертежѣ 36-мъ).

Что касается до силъ T_1, T_2, S_1, S_2, то эти силы могутъ быть различны, смотря по конструкціи и природѣ механизма, воспроизводящаго эту связь.

Обыкновенно эту связь представляютъ себѣ въ видѣ безконечно-тонкаго однороднаго и идеально-твердаго стержня, къ концамъ кото-

раго прикрѣплены точки m_1 и m_2; при такомъ представленіи связи считаютъ очевиднымъ, что, если не принимать въ разсчетъ массы стержня, то силы дѣйствія этой связи на точки m_1 и m_2 должны состоять только изъ реакцій связи (то есть, изъ нѣкоторой силы, приложенной къ точкѣ m_1 и направленной къ точкѣ m_2 или отъ нея, и изъ другой силы, равной и прямопротивоположной первой, приложенной къ точкѣ m_2), силъ же T_1, T_2, S_1, S_2 не существуетъ вовсе.

Однако, для того, чтобы это стало очевиднымъ, должно прибавить слѣдующее:

Стержень разсматривается какъ физическое тѣло, то есть, какъ система частицъ; каждая частица замѣняется матерьяльною точкою; предполагается, что между каждыми двумя частицами дѣйствуютъ молекулярныя взаимнодѣйствія, равныя, прямопротивоположныя и направленныя по линіи, соединяющей частицы; величины этихъ силъ предполагаются равными:

$$\mu_1 \mu_2 f(r_{12}),$$

гдѣ μ_1 и μ_2 суть массы частицъ, r_{12} — разстояніе между ними, f — функція, общая для всѣхъ паръ частицъ и притомъ такая, которая обращается въ нуль для r_{12} равнаго или большаго нѣкоторой весьма малой (но не безконечно-малой) длины ρ, называемой радіусомъ дѣйствія молекулярныхъ силъ; для r_{12} меньшихъ ρ функція f быстро возрастаетъ съ приближеніемъ r_{12} къ нулю.

Далѣе, должно предположить, что частицы стержня расположены симметрично вокругъ линіи $\overline{M_1M_2}$, соединяющей матерьяльныя точки m_1 и m_2, и вмѣстѣ съ тѣмъ симметрично по отношенію къ плоскости перпендикулярной къ $\overline{M_1M_2}$ и проходящей черезъ середину этого разстоянія, къ этому еще присоединимъ предположеніе, что такая симметрія не нарушается, ни при движеніи, ни вслѣдствіе приложенія задаваемыхъ силъ.

При всѣхъ этихъ предположеніяхъ станетъ, дѣйствительно, очевиднымъ, что равнодѣйствующая молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_1, направлена по оси симметріи и притомъ равна и прямо-

22

противоположна равнодѣйствующей молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_2.

Такую удерживающую связь между точками m_1 и m_2, при которой разстояніе между ними должно оставаться неизмѣннымъ и при которой силъ T_1, T_2, S_1, S_2 не существуетъ, мы будемъ называть *идеальною неизмѣняемою связью* между точками m_1 и m_2 или *идеальнымъ стержнемъ*, связывающимъ эти точки.

Примѣръ 57. Реакціи связи

$$r_1 + r_2 - l = 0$$

равны между собою и имѣютъ величину:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q + K);$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2 x_2 + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_2}$$

$$K = \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2} - \frac{(x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1)^2}{r_1^3} - \frac{(x_2 x'_2 + y_2 y'_2 + z_2 z'_2)^2}{r_2^3}.$$

Онѣ направлены по продолженіямъ радіусовъ векторовъ r_1 и r_2, если λ есть величина положительная.

Если точки m_1 и m_2 остаются постоянно въ плоскости XY, то связь эту можно воспроизвести въ видѣ механизма, состоящаго изъ зубчатаго колеса R (черт. 42), вращающагося вокругъ оси Z, и изъ двухъ зубчатыхъ полосъ AB и CD, сцѣпленныхъ съ этимъ колесомъ; на концѣ первой полосы находится точка m_1, на концѣ второй — точка m_2; надлежащее приспособленіе не позволяетъ зубцамъ полосъ соскочить съ зубцовъ колеса. Для того, чтобы этотъ механизмъ вполнѣ точно воспроизводилъ условіе, что сумма разстояній $\overline{Om_1}$ и $\overline{Om_2}$ должна оставаться постоянною при всякихъ положеніяхъ точекъ m_1 и m_2, необходимо, чтобы колесо R имѣло ничтожно-малый радіусъ.

Существованіе тренія между частями механизма составляетъ одну изъ главнѣйшихъ причинъ образованія силъ T_1, T_2, S_1, S_2 и другихъ силъ, направленныхъ, подобно S_1 и S_2, вдоль по параметрамъ P_1 и P_2 или противоположно этимъ параметрамъ, но неудовлетворяющихъ равенству (512). Въ механизмѣ, разсматриваемомъ теперь, возникаетъ треніе между шипами оси колеса R и ихъ подшипниками, а, кромѣ того, и тре-

ніе на зубчатыхъ зацѣпленіяхъ. Если даже предположить, что нѣтъ тренія на зубчатыхъ зацѣпленіяхъ, то уже одно треніе на шипахъ оси служитъ причиною образованія приложенныхъ къ точкамъ m_1 и m_2 силъ T_1 и T_2, пропорціональныхъ λ и противодѣйствующихъ вращеніямъ радіусовъ векторовъ r_1 и r_2 вокругъ O; кромѣ того, то же самое треніе шиповъ въ подшипникахъ служитъ причиною образованія силъ пропорціональныхъ λ, приложенныхъ къ тѣмъ же точкамъ и противодѣйствующихъ движеніямъ ихъ вдоль по радіусамъ векторамъ; эти силы могутъ удовлетворять или неудовлетворять равенству (512); въ послѣднемъ случаѣ придется причислить ихъ къ силамъ задаваемымъ.

Примѣръ 58. Удерживающая связь

$$r_1 + r_{12} + r_{2a} - l = 0$$

оказываетъ реакціи, имѣющія слѣдующія величины:

въ точкѣ m_1 реакція равна $2\lambda \cos \frac{\alpha_1}{2}$,

въ точкѣ m_2 реакція равна $2\lambda \cos \frac{\alpha_2}{2}$;

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{4\left(m_2 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} + m_1 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2}\right)}(Q + K),$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2(x_2 - a) + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_{2a}} +$$

$$+ \left(\frac{X_1}{m_2} - \frac{X_2}{m_2}\right)\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2}\right)\frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2}\right)\frac{z_1 - z_2}{r_{12}};$$

$$K = \frac{v_1^2 \sin^2(v_1, r_1)}{r_1} + \frac{v_2^2 \sin^2(v_2, r_{2a})}{r_{2a}} + \frac{u_{12}^2 \sin^2(u_{12}, r_{12})}{r_{12}};$$

здѣсь u_{12} означаетъ геометрическую разность между скоростями v_1 и v_2 точекъ m_1 и m_2, то есть:

$$\overline{u}_{12} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2.$$

Примѣръ 59. Удерживающая связь:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 - a = 0$$

имѣетъ въ точкѣ m_1 реакцію $\lambda\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \lambda r_2$

и въ точкѣ m_2 — реакцію $\lambda\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\lambda r_1$;

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}(Q+K);$$

$$Q=\frac{X_1 y_2 - Y_1 x_2}{m_1}+\frac{Y_2 x_1 - X_2 y_1}{m_2};$$

$$K=2(x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2).$$

Силы T_1, T_2, S_1, S_2 могутъ образоваться и въ этихъ двухъ послѣднихъ связяхъ преимущественно вслѣдствіе существованія тренія между частями механизмовъ, воспроизводящихъ эти связи.

Въ нижеслѣдующихъ параграфахъ мы будемъ нерѣдко представлять себѣ воображаемыя связи, не оказывающія силъ T_1, T_2, . . . T_n, S_1, S_2, ... S_n; такія связи мы будемъ называть *идеальными связями*; дѣйствіе ихъ на связываемыя ими точки состоитъ только въ образованіи реакцій, приложенныхъ къ этимъ точкамъ.

Въ тѣхъ же случаяхъ, въ которыхъ нельзя будетъ разсматривать связь какъ идеальную, а придется принять въ разсчетъ и силы T_1, T_2, ... T_n, S_1, S_2, ... S_n, можно будетъ эти силы причислить къ задаваемымъ силамъ, тѣмъ болѣе, что для сужденія объ нихъ мы должны знать самый механизмъ, воспроизводящій связь, и должны имѣть нѣкоторыя экспериментальныя данныя относительно физическихъ свойствъ этого механизма.

§ 68. Реакціи неудерживающей связи.

Положимъ, что точки m_1, m_2, ... m_n связаны какою либо неудерживающею связью:

$$\text{з}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n, t) \geqslant 0 \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(492)}$$

Какъ уже извѣстно изъ § 63, когда координаты точекъ удовлетворяютъ неравенству $\text{з} > 0$, тогда ни скорости, ни ускоренія точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ и *связь*, такъ сказать, не дѣйствуетъ вовсе, находясь *въ состояніи ослабленія*.

Когда же координаты точекъ удовлетворяютъ равенству $\text{з} = 0$, тогда, вслѣдствіе дѣйствія связи, находящейся *въ состояніи напря-*

женія, скорости точекъ и ускоренія ихъ должны удовлетворять условіямъ, приведеннымъ въ §§ 63 и 66.

Переходы связи изъ перваго состоянія во второе и обратный могутъ быть опредѣлены словами: *связь слабѣетъ* и *связь крѣпнетъ*; про точки, связанныя связью, можно сказать, что онѣ *сходятъ со связи* (когда связь слабѣетъ) или *вступаютъ на связь* (когда связь крѣпнетъ).

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи ослабленія, не можетъ оказывать никакихъ реакцій на связываемыя ею точки, такъ какъ ускоренія этихъ точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ со стороны связи.

Находясь въ состояніи напряженія, неудерживающая связь не можетъ оказывать реакцій причинамъ, побуждающимъ точки сойти со связи, такъ какъ она этому сходу не препятствуетъ; напротивъ, при дѣйствіи усилій, стремящихся разорвать или разрушить связь, въ ней необходимо развиваются реакціи, тому противодѣйствующія.

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не препятствуетъ точкамъ получить скорости, удовлетворяющія неравенству

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{\partial 8}{\partial t} > 0;$$

а потому, если какія либо причины побуждаютъ точки получить такія скорости, то связь не оказываетъ тому никакихъ противодѣйствій и точки, дѣйствительно, получаютъ эти скорости; имѣя эти скорости, точки сходятъ со связи.

Если скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{\partial 8}{\partial t} = 0, \ldots\ldots\ldots \textbf{(493, a)}$$

то неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не мо-

жетъ препятствовать точкамъ получить ускоренія, удовлетворяющія неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K\text{в} > 0\,; \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(513)}$$

а потому, если задаваемыя силы

$$F_1,\ F_2, \ldots F_i, \ldots F_n,$$

приложенныя къ точкамъ

$$m_1,\ m_2, \ldots m_i, \ldots m_n,$$

побуждаютъ ихъ принять ускоренія, удовлетворяющія неравенству (513), то есть, если силы $F_1, F_2, \ldots F_n$ удовлетворяютъ неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\text{в} > 0, \ldots\ldots \quad \textbf{(514)}$$

то связь не можетъ оказать никакихъ реакцій и точки, дѣйствительно, получаютъ эти ускоренія; имѣя такія скорости и ускоренія, точки сходятъ со связи.

Если бы та же самая связь была удерживающею, то, при тѣхъ же самыхъ положеніяхъ точекъ, при тѣхъ же скоростяхъ и задаваемыхъ силахъ, она оказала бы совокупность реакцій, направленныхъ противоположно дифференціальнымъ параметрамъ, такъ какъ множитель λ, выражаемый формулою:

$$\lambda = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i P_i) + K\text{в}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} P_i^2}\,, \ldots\ldots \quad \textbf{(498, f)}$$

имѣетъ, на основаніи неравенства (514), величину отрицательную.

Такихъ *отрицательныхъ реакцій* неудерживающая связь оказать не можетъ.

Если неудерживающая связь находится въ состояніи напряженія, точки имѣютъ скорости, удовлетворяющія равенству (493, a), а задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ, удовлетворяютъ неравенству

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\text{в} < 0, \ldots \ldots \quad \textbf{(515)}$$

то эти силы стремятся разрушить связь, потому что онѣ побуждаютъ точки принять ускоренія, удовлетворяющія неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K\text{в} < 0;$$

а этого, при скоростяхъ, удовлетворяющихъ равенству (493, a), связь недопускаетъ. Въ такомъ случаѣ неудерживающая связь должна дѣйствовать также, какъ удерживающая, а именно, она должна оказать реакціи, множитель λ которыхъ опредѣляется по формулѣ (498, f); такъ какъ, на основаніи неравенства (515), этотъ множитель имѣетъ величину положительную, то *реакціи* будутъ *положительныя*, то есть, будутъ направлены по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ.

Эти реакціи, вмѣстѣ съ задаваемыми силами, сообщаютъ точкамъ такія ускоренія, которыя удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K\text{в} = 0.$$

Связь остается въ состояніи напряженія до тѣхъ поръ, пока задаваемыя силы удовлетворяютъ неравенству (515); въ тѣхъ положеніяхъ $A_1, A_2, \ldots A_n$ точекъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, въ которыхъ скорости точекъ и задаваемыя силы будутъ удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K\text{в} = 0,$$

реакціи связи обратятся въ нули.

Чтобы узнать, что станется послѣ этого съ неудерживающею связью (то есть, ослабѣетъ ли она, или останется напряженною), надо опредѣлить, какой знакъ стала бы пріобрѣтать сумма:

$$Q+K=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}F_iP_i\cos(F_i,P_i)+K\vartheta,$$

если бы связь была обращена въ удерживающую и матерьяльныя точки продолжали бы свое движеніе, не сходя съ нея.

Если бы оказалось, что сумма $(Q+K)$, послѣ своего обращенія въ нуль, пріобрѣтаетъ при сказанныхъ предположеніяхъ опять *отрицательное значеніе*, то это значитъ, что неудерживающая *связь не ослабѣваетъ* и послѣ прохожденія точекъ m_1, m_2,$\ldots m_n$, чрезъ положенія A_1, A_2,$\ldots A_n$.

Обратно, если бы сумма $(Q+K)$ стала пріобрѣтать при сказанныхъ предположеніяхъ *положительное значеніе*, то предполагаемое дальнѣйшее движеніе точекъ могло бы совершаться только при дѣйствіи отрицательныхъ реакцій со стороны связи; но неудерживающая связь такихъ реакцій оказать не можетъ, а потому *матерьяльныя точки* необходимо *сойдутъ со связи* и послѣдняя ослабѣетъ. Дальнѣйшее движеніе освободившихся точекъ будетъ совершаться подъ вліяніемъ приложенныхъ къ нимъ задаваемыхъ силъ, причемъ начальными скоростями будутъ тѣ скорости, съ которыми матерьяльныя точки m_1, m_2,$\ldots m_n$, находясь въ положеніяхъ A_1, A_2,$\ldots A_n$, сошли со связи; эти скорости удовлетворяютъ равенству (493, a).

Кромѣ положительныхъ реакцій, въ неудерживающихъ связяхъ могутъ развиваться силы T_i и S_i, преимущественно вслѣдствіе тренія частей механизма между собою и также вслѣдствіе несовершенной гибкости нитей, входящихъ въ составъ тѣхъ механизмовъ, которыми воспроизводятся неудерживающія связи.

Примѣръ 54-й. Неудерживающая связь:

$$(l-r_{12})\geqslant 0,$$

какъ уже упомянуто въ § 59-мъ, можетъ быть воспроизведена въ

видѣ тонкой, вполнѣ гибкой, но вполнѣ нерастяжимой нити длины l, къ концамъ которой прикрѣплены точки m_1 и m_2. Эта связь находится въ состояніи напряженія тогда, когда разстояніе между точками m_1 и m_2 равно l; если тогда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) = 0,$$

а задаваемыя силы — условію:

$$(Q_1 + K_1) < 0,$$

(гдѣ

$$Q = \frac{1}{m_1} F_1 \cos(F_1, r_{12}) - \frac{1}{m_2} F_2 \cos(F_2, r_{12}),$$

$$K = -\frac{u^2 \sin^2(u, r_{12})}{r_{12}},$$

гдѣ направленіе r_{12} означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_1 черезъ точку m_2, а u означаетъ геометрическую разность между скоростью v_1 и скоростью v_2, то есть:

$$u\cos(u, X) = x_1' - x_2',\ u\cos(u, Y) = y_1' - y_2',\ u\cos(u, Z) = z_1' - z_2'),$$

то точки m_1 и m_2 будутъ испытывать со стороны связи реакціи равныя

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q_1 + K_1)$$

и направленныя по дифференціальнымъ параметрамъ этой связи, то есть, *внутрь длины* M_1M_2, какъ представлено на чертежѣ 36-мъ; реакцій же, направленныхъ внаружу разстоянія M_1M_2, эта связь оказывать не можетъ.

Примѣръ 55-й. Неудерживающая связь:

$$(r_{12} - l) \geqslant 0$$

можетъ оказывать реакціи, направленныя неиначе какъ *внаружу длины* M_1M_2 (какъ на чертежѣ 37-мъ); такія реакціи оказываетъ

она тогда, когда разстояніе между точками m_1 и m_2 равно l и если притомъ скорости ихъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_2 \cos(v_2, r_{12}) - v_1 \cos(v_1, r_{12}) = 0,$$

а задаваемыя силы — условію:

$$(Q + K) < 0,$$

гдѣ Q и K суть тѣ же самыя выраженія, которыя означены этими знаками въ предыдущемъ параграфѣ при изложеніи примѣра 53-го.

Величины реакцій, испытываемыхъ точками m_1 и m_2 со стороны этой связи, выражаются формулою:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(Q + K).$$

Примѣръ 56-й. Обратимся теперь къ неудерживающей связи

$$l - r_{12} - r_{23} \geqslant 0,$$

дифференціальные параметры которой были опредѣлены въ § 63-мъ.

Матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3 испытываютъ со стороны этой связи реакціи тогда, когда сумма разстояній r_{12} и r_{23} равна l и если притомъ скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) + v_2 \cos(v_2, r_{23}) - v_3 \cos(v_3, r_{23}) = 0,$$

(которое можно представить такъ:

$$u_{12} \cos(u_{12}, r_{12}) + u_{23} \cos(u_{23}, r_{23}) = 0),$$

а задаваемыя силы — условію:

$$Q + K < 0;$$

здѣсь Q и K означаютъ слѣдующія выраженія:

$$Q = \frac{1}{m_1} F_1 \cos(F_1, r_{12}) - \frac{1}{m_3} F_3 \cos(F_3, r_{23}) +$$

$$+ \frac{1}{m_2} F_2 \Big(\cos(F_2, r_{23}) - \cos(F_2, r_{12})\Big),$$

$$K = -\frac{u^2_{12} \sin^2(u_{12}, r_{12})}{r_{12}} - \frac{u^2_{23} \sin^2(u_{23}, r_{23})}{r_{23}},$$

подъ направленіемъ r_{12} подразумѣвается направленіе, проведенное изъ точки m_1 черезъ точку m_2; направленіе r_{23} идетъ отъ точки m_2 черезъ точку m_3; u_{12} есть геометрическая разность между скоростью точки m_1 и скоростью точки m_2; u_{23} — геометрическая разность между скоростями точекъ m_2 и m_3, то есть:

$$\overline{u}_{12} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2, \quad \overline{u}_{23} = \overline{v}_2 - \overline{v}_3.$$

При этихъ условіяхъ точки m_1 и m_3 испытываютъ со стороны связи реакціи равныя между собою, равныя:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2 m_3}{m_2(m_1 + m_3) + 4 m_1 m_3 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(Q + K)$$

и направленныя къ точкѣ m_2 (то есть, по направленіямъ P_1 и P_3, см. чертежъ 38-й); точка же m_2 испытываетъ реакцію, имѣющую величину и направленіе геометрической суммы двухъ силъ, равныхъ λ, приложенныхъ къ точкѣ m_2 и направленныхъ — одна къ точкѣ m_1, другая — къ точкѣ m_3.

Эта связь можетъ быть воспроизведена въ видѣ весьма тонкой, гибкой, нерастяжимой нити длины l, пропущенной черезъ колечко ничтожно-малыхъ размѣровъ; къ концамъ нити прикрѣплены точки m_1 и m_3, а къ колечку — точка m_2.

Несмотря на свою кажущуюся простоту, механизмъ этотъ заключаетъ въ себѣ двѣ причины образованія силъ T_i, S_i и имъ подобныхъ, которыя мы принуждены будемъ относить къ числу задаваемыхъ силъ; одною изъ причинъ служитъ неполная гибкость нити, или, правильнѣе сказать, сопротивленіе нити изгибу, другая причина — треніе нити о кольцо. Впослѣдствіи, въ своемъ мѣстѣ, будетъ указано, какъ выражаются величины этихъ силъ и какимъ образомъ онѣ принимаются въ разсчетъ, когда это нужно по роду вопроса.

Нетрудно подобнымъ же образомъ составить надлежащія формулы и выраженія для неудерживающей связи примѣра 60-го, а также и для всякихъ другихъ неудерживающихъ связей, каковы бы онѣ ни были.

§ 69. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ одною связью.

Предположимъ, что имѣемъ систему матерьяльныхъ точекъ

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n,$$

къ которымъ приложены задаваемыя силы и которыя связаны *идеальною связью*, выражаемою равенствомъ (491) или условіемъ (492), смотря потому, есть ли это связь удерживающая или неудерживающая.

Означимъ черезъ F_1 — равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ m_1, а чрезъ X_1, Y_1, Z_1 — проэкціи этой равнодѣйствующей F_1 на оси координатъ; подобныя же обозначенія съ соотвѣтственными значками внизу примѣнимъ и къ остальнымъ точкамъ, такъ что F_i будетъ означать равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i, а X_i, Y_i, Z_i— проэкціи этой равнодѣйствующей F_i на оси координатъ.

Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія этой системы точекъ суть уравненія (510) § 67-го, въ которыхъ вмѣсто R_i должны заключаться реакціи идеальной связи; онѣ выражаютъ, что величина ускоренія каждой матерьяльной точки равняется, дѣленной на массу точки, величинѣ равнодѣйствующей *всѣхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ* (задаваемыхъ силъ и реакціи связи на эту точку) и что направленіе ускоренія совпадаетъ съ направленіемъ этой равнодѣйствующей; эти совокупныя дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l}
m_1 x_1'' = X_1 + \lambda \frac{\partial s}{\partial x_1},\ m_1 y_1'' = Y_1 + \lambda \frac{\partial s}{\partial y_1},\ m_1 z_1'' = Z_1 + \lambda \frac{\partial s}{\partial z_1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
m_i x_i'' = X_i + \lambda \frac{\partial s}{\partial x_i},\ m_i y_i'' = Y_i + \lambda \frac{\partial s}{\partial y_i},\ m_i z_i'' = Z_i + \lambda \frac{\partial s}{\partial z_i}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
m_n x_n'' = X_n + \lambda \frac{\partial s}{\partial x_n},\ m_n y_n'' = Y_n + \lambda \frac{\partial s}{\partial y_n},\ m_n z_n'' = Z_n + \lambda \frac{\partial s}{\partial z_n}
\end{array}\right\} \quad (516)$$

Множитель λ опредѣляется по формулѣ (498, e) § 67 или (498, f) § 68.

Если связь не идеальная, то въ этихъ уравненіяхъ къ проэкціямъ задаваемыхъ силъ присоединятся проэкціи силъ T_i, S_i и другихъ

силъ, развивающихся вслѣдствіе тренія и прочихъ несовершенствъ механизма.

§ 70. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, связанныхъ нѣсколькими связями.

Положимъ, что система точекъ $m_1, m_2, \ldots m_n$ связана идеальными удерживающими связями, выражаемыми равенствами:

$$в_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ldots \mathbf{(491, 1)}$$

$$в_2(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ldots \mathbf{(491, 2)}$$

. . . .

$$в_p(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0; \ldots \mathbf{(491, p)}$$

p есть число этихъ связей, $в_1, в_2, в_3, \ldots в_p$ суть какія либо функціи координатъ точекъ и времени.

Въ этомъ случаѣ къ каждой изъ точекъ системы, кромѣ задаваемыхъ силъ, приложена реакція каждой изъ связей; такъ напримѣръ къ точкѣ m_i приложены:

задаваемыя силы (для равнодѣйствующей этихъ силъ и для проэкцій ея на оси координатъ сохранимъ прежнія обозначенія F_i, X_i, Y_i, Z_i);

реакція связи (491, 1), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ этой точкѣ m_i и равная

$$\lambda(в_1) . P_i в_1;$$

реакція связи (491, 2), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ точкѣ m_i и равная

$$\lambda(в_2) . P_i в_2;$$

. . . .

и наконецъ реакція связи (491, p), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ точкѣ m_i и равная

$$\lambda(в_p) . P_i в_p.$$

Каждый изъ входящихъ здѣсь знаковъ:

$$\lambda(\mathfrak{s}_1),\ \lambda(\mathfrak{s}_2), \ldots \lambda(\mathfrak{s}_p)$$

обозначаетъ нѣкоторый множитель, общій всѣмъ реакціямъ одной изъ связей; напримѣръ, величины реакцій связи (491, 1) въ точкахъ

$$m_1,\ m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$$

выражаются произведеніями:

$$\lambda(\mathfrak{s}_1).P_1\mathfrak{s}_1;\ \lambda(\mathfrak{s}_1).P_2\mathfrak{s}_1; \ldots \lambda(\mathfrak{s}_1).P_i\mathfrak{s}_1; \ldots \lambda(\mathfrak{s}_1).P_n\mathfrak{s}_1.$$

Совокупность дифференціальныхъ уравненій этой системы матерьяльныхъ точекъ получимъ, составивъ равенства, выражающія, что ускореніе, получаемое каждою точкою, имѣетъ направленіе равнодѣйствующей всѣхъ приложенныхъ къ ней реакцій и задаваемыхъ силъ и что величина ускоренія равна величинѣ этой равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки: самыя уравненія будутъ слѣдующія:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial\mathfrak{s}_1}{\partial x_1} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial\mathfrak{s}_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial\mathfrak{s}_p}{\partial x_1} \qquad \textbf{(517, a1)}$$

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial\mathfrak{s}_1}{\partial y_1} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial\mathfrak{s}_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial\mathfrak{s}_p}{\partial y_1}, \qquad \textbf{(517, b1)}$$

$$m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial\mathfrak{s}_1}{\partial z_1} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial\mathfrak{s}_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial\mathfrak{s}_p}{\partial z_1}, \qquad \textbf{(517, c1)}$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial\mathfrak{s}_1}{\partial x_2} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial\mathfrak{s}_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial\mathfrak{s}_p}{\partial x_2}, \qquad \textbf{(517, a2)}$$

. . . .

. . . .

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial\mathfrak{s}_1}{\partial x_i} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial\mathfrak{s}_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial\mathfrak{s}_p}{\partial x_i}, \qquad \textbf{(517, ai)}$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial\mathfrak{s}_1}{\partial y_i} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial\mathfrak{s}_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial\mathfrak{s}_p}{\partial y_i}, \qquad \textbf{(517, bi)}$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial z_i} + \lambda(в_2)\frac{\partial в_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial z_i}, \qquad \textbf{(517, ci)}$$

. . . .

. . . .

$$m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} = Z_n + \lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial z_n} + \lambda(в_2)\frac{\partial в_2}{\partial z_n} + \ldots + \lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial z_n}. \qquad \textbf{(517, cn)}$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что координаты x_1, y_1, z_1, $x_2, \ldots . z_n$, (число которыхъ: $3n$), заключающіяся въ этихъ $3n$ дифференціальныхъ уравненіяхъ, связаны между собою p уравненіями связей (отъ (491, 1) до (491, p)); кромѣ того, эти дифференціальныя уравненія заключаютъ въ себѣ p множителей:

$$\lambda(в_1),\ \lambda(в_2), \ldots . \lambda(в_p),$$

которые опредѣлятся изъ уравненій, приведенныхъ ниже.

Такъ какъ всѣ связи удерживающія, то скорости точекъ системы должны удовлетворять p равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_1}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial в_1}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial в_1}{\partial z_i} z_i'\right) + \frac{\partial в_1}{\partial t} = 0, \qquad \textbf{(493, 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_2}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial в_2}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial в_2}{\partial z_i} z_i'\right) + \frac{\partial в_2}{\partial t} = 0, \qquad \textbf{(493, 2)}$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_p}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial в_p}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial в_p}{\partial z_i} z_i'\right) + \frac{\partial в_p}{\partial t} = 0, \qquad \textbf{(493, p)}$$

а ускоренія ихъ должны удовлетворять такому же числу равенствъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial в_1}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial в_1}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial в_1}{\partial z_i} z_i''\right) + Kв_1 = 0, \qquad \textbf{(498, 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial z_i} z_i''\right) + K\mathfrak{v}_2 = 0, \quad \mathbf{(498, 2)}$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial z_i} z_i''\right) + K\mathfrak{v}_p = 0. \quad \mathbf{(498, p)}$$

(Подъ знаками

$$K\mathfrak{v}_1, \; K\mathfrak{v}_2, \ldots K\mathfrak{v}_p$$

подразумѣваются многочлены вида (497); см. § 60-й).

Равенства (498, 1), (498, 2), ... (498, p) послужатъ для опредѣленія множителей λ; для этого надо рѣшить дифференціальныя уравненія (517) относительно ускореній x_1'', y_1'', z_1'', ... x_i'', y_i'', z_i'', ... z_n'' и полученныя оттуда выраженія этихъ ускореній подставить въ равенства (498, 1), (498, 2), ... (498, p); тогда эти равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$\lambda(\mathfrak{v}_1)P_{11} + \lambda(\mathfrak{v}_2)P_{12} + \ldots + \lambda(\mathfrak{v}_p)P_{1p} + Q_1 + K\mathfrak{v}_1 = 0 \,.\,. \quad \mathbf{(518, 1)}$$

$$\lambda(\mathfrak{v}_1)P_{21} + \lambda(\mathfrak{v}_2)P_{22} + \ldots + \lambda(\mathfrak{v}_p)P_{2p} + Q_2 + K\mathfrak{v}_2 = 0 \,.\,. \quad \mathbf{(518, 2)}$$

. . . .

$$\lambda(\mathfrak{v}_1)P_{p1} + \lambda(\mathfrak{v}_2)P_{p2} + \ldots + \lambda(\mathfrak{v}_p)P_{pp} + Q_p + K\mathfrak{v}_p = 0 \,.\,. \quad \mathbf{(518, p)}$$

Для сокращеннаго писанія здѣсь введены знаки, имѣющіе слѣдующія значенія.

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}\left(X_i \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial y_i} + Z_i \frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial z_i}\right),$$

или, что то же самое:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{m_i}(P_i\mathfrak{v}_1)\,F_i \cos(P_i\mathfrak{v}_1, F_i);$$

подобнымъ же образомъ Q_k означаетъ:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(X_i \frac{\partial s_k}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial s_k}{\partial y_i} + Z_i \frac{\partial s_k}{\partial z_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i s_k) F_i \cos(P_i s_k, F_i) \quad \ldots (519)$$

Коэффиціэнты у множителей λ въ равенствахъ (518) суть слѣдующія выраженія:

$$P_{12} = P_{21} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\frac{\partial s_2}{\partial x_i} + \frac{\partial s_1}{\partial y_i}\frac{\partial s_2}{\partial y_i} + \frac{\partial s_1}{\partial z_i}\frac{\partial s_2}{\partial z_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i s_1).(P_i s_2) \cos(P_i s_1, P_i s_2) \quad \ldots (520)$$

$$P_{11} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial z_i}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i s_1)^2,$$

и т. д.

Если которая либо изъ связей принадлежитъ къ числу неудерживающихъ, то надо принять во вниманіе, что она можетъ оказывать только положительныя реакціи, то есть, реакціи, направленныя по положительнымъ направленіямъ ея дифференціальныхъ параметровъ; поэтому, какъ только множитель λ, соотвѣтствующій этой неудерживающей связи, обратится въ нуль и послѣ этого начнетъ пріобрѣтать отрицательныя значенія, то это будетъ значить, что матерьяльныя точки сходятъ съ этой связи, а поэтому связь ослабѣваетъ и реакціи ея уничтожаются.

Если по характеру вопроса приходится разсматривать связи подъ видомъ механизмовъ даннаго устройства и необходимо принимать въ разсчетъ силы, образующіяся вслѣдствіе тренія и прочихъ физическихъ причинъ, то эти силы придется помѣстить въ предыдущихъ формулахъ и уравненіяхъ въ числѣ задаваемыхъ силъ.

§ 71. Приведеніе совокупности (517) къ (3n — p) совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ такимъ же числомъ искомыхъ функцій времени.

Число $(3n - p)$ означимъ черезъ n.

Исключивъ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) множители:

$$\lambda(\vartheta_1),\ \lambda(\vartheta_2), \ldots \lambda(\vartheta_p),$$

будемъ имѣть n дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ въ себѣ: время t, $3n$ координатъ x_1, y_1, z_1, ... x_n, y_n, z_n и производныя этихъ координатъ по времени, первыя и вторыя.

Всѣ $3n$ координатъ связаны между собою и съ временемъ уравненіями (491, 1), (491, 2), ... (491, p); поэтому p изъ числа этихъ координатъ могутъ быть выражены функціями времени и остальныхъ n координатъ; условимся называть послѣднія *координатами независимыми*, а первыя — *координатами зависимыми*.

Всякія n изъ числа $3n$ координатъ могутъ быть приняты за независимыя.

Сдѣлавъ надлежащій выборъ независимыхъ координатъ и рѣшивъ уравненія связей относительно координатъ зависимыхъ, получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ независимыхъ координатъ и времени.

Производныя по времени отъ зависимыхъ координатъ выразятся функціями: времени, независимыхъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Найденными выраженіями воспользуемся для того, чтобы изъ n дифференціальныхъ уравненій, незаключающихъ множителей λ, исключить зависимыя координаты и ихъ производныя.

Такимъ образомъ мы получимъ n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ: время, независимыя координаты, ихъ первыя и вторыя производныя.

§ 72. Координатные параметры; число независимыхъ координатныхъ параметровъ для данной системы несвободныхъ точекъ.

Положенія, занимаемыя n точками въ пространствѣ, могутъ быть выражены въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ или косоугольныхъ,

въ криволинейныхъ цилиндрическихъ, сферическихъ или какихъ бы то ни было ортогональныхъ или косоугольныхъ координатахъ; кромѣ того, могутъ существовать и существуютъ еще многіе другіе способы для той же цѣли; напримѣръ, положеніе n точекъ въ пространствѣ можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду (и оси координатъ $Ю\Xi$, $ЮY$, $ЮZ$, связанныя съ нею), точка $Ю$ которой совпадаетъ съ точкою № 1, ось $ЮZ$ проходитъ черезъ точку № 2 и плоскость $ZЮ\Xi$ заключаетъ въ себѣ точку № 3; тогда положенія всѣхъ n точекъ въ пространствѣ могутъ быть выражены слѣдующими $3n$ величинами: абсолютными координатами $x_1 = x_ю$, $y_1 = y_ю$, $z_1 = z_ю$ точки № 1, углами $ф$, $ж$, $э$, разстояніемъ ζ_2 точки № 2 отъ точки № 1, относительными координатами ξ_3 и ζ_3 точки № 3 и относительными координатами $\xi_4, \eta_4, \zeta_4, \ldots \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ остальныхъ точекъ. Абсолютныя декартовы координаты x_i, y_i, z_i всякой изъ n точекъ выразятся по извѣстнымъ формуламъ (формулы (45) кинематической части стр. 56) въ функціяхъ отъ $x_ю, y_ю, z_ю, ф, ж, э, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$.

Если точки n образуютъ собою неизмѣняемую систему точекъ, то есть, если разстояніе между каждыми двумя изъ этихъ точекъ остается постояннымъ, то тогда, при измѣненіи положенія системы въ пространствѣ, измѣняются только шесть величинъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф$, $ж$ и $э$ изъ числа всѣхъ $3n$, перечисленныхъ выше, прочія же $(3n - 6)$ остаются постоянными.

Вообще, тѣмъ или другимъ способомъ, положеніе въ пространствѣ системы n точекъ, связанныхъ p связями вида (491, b) (§ 62), *) можетъ быть выражено посредствомъ нѣсколькихъ величинъ:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_s,$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

1) При каждомъ опредѣленномъ положеніи точекъ системы, величины эти получаютъ опредѣленныя значенія; то есть, каждой совокупности опредѣленныхъ значеній декартовыхъ координатъ x_1, y_1,

*) То есть, связями, уравненія которыхъ незаключаютъ времени.

$z_1, \ldots z_n$ соотвѣтствуетъ совокупность опредѣленныхъ значеній величинъ $q_1, q_2, \ldots q_s$.

2) Величины $q_1, q_2, \ldots q_s$ измѣняются непрерывнымъ образомъ при измѣненіи положеній точекъ системы.

3) Каждая возможная совокупность опредѣленныхъ значеній величинъ $q_1, q_2, \ldots q_s$ вполнѣ опредѣляетъ нѣкоторую совокупность опредѣленныхъ значеній декартовыхъ координатъ данной системы точекъ, а, слѣдовательно, нѣкоторое положеніе точекъ системы въ пространствѣ.

Такія величины $q_1, q_2, \ldots q_s$ мы будемъ называть *координатными параметрами данной системы точекъ.*

А) Относительно числа этихъ координатныхъ параметровъ мы прежде всего докажемъ, что число ихъ не можетъ быть менѣе числа $\varkappa = (3n - p)$ независимыхъ декартовыхъ координатъ данной системы точекъ.

По вышеприведеннымъ свойствамъ 1-му и 2-му, координатные параметры должны выражаться нѣкоторыми функціями декартовыхъ координатъ; положимъ, что эти функціи намъ извѣстны:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \chi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \\ q_2 = \chi_2(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_s = \chi_s(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(521)}$$

По третьему свойству, декартовы координаты системы точекъ должны вполнѣ опредѣлятся по заданнымъ значеніямъ координатныхъ параметровъ; но изъ имѣющихся равенствъ (521) и изъ уравненій связей:

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) = 0 \\ \vartheta_2(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vartheta_p(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(522)}$$

нельзя получить опредѣленныхъ рѣшеній для декартовыхъ координатъ, если число равенствъ (521) вмѣстѣ съ числомъ равенствъ (522) менѣе числа декартовыхъ координатъ, то есть, если $(s+p)$ менѣе $3n$, или s менѣе $\kappa = (3n - p)$; поэтому число s должно быть не менѣе κ.

Если $s = \kappa$, то изъ уравненій (521) и (522) получимъ выраженія декартовыхъ координатъ въ функціяхъ отъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_\kappa$; пусть эти выраженія будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \theta_1(q_1, q_2, \ldots q_\kappa) \\ y_1 = \theta_2(q_1, q_2, \ldots q_\kappa) \\ z_1 = \theta_3(q_1, q_2, \ldots q_\kappa) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \theta_{3n}(q_1, q_2, \ldots q_\kappa) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (523)$$

B) Слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ случаѣ, когда число координатныхъ параметровъ системы точекъ равно числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, *всѣ координатные параметры* $q_1, q_2, \ldots q_\kappa$ *суть перемѣнныя независимыя*, то есть, они не должны быть связаны между собою никакими равенствами и могутъ получать всякія значенія независимо другъ отъ друга.

C) Кромѣ того, должно обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство: *первыя части уравненій* (522) *связей*, *по подстановленіи въ нихъ функцій* $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{3n}$ *вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обращаться въ нуль тождественно, при всякихъ значеніяхъ координатныхъ параметровъ*; въ самомъ дѣлѣ, если бы не всѣ, а только κ изъ числа декартовыхъ координатъ были замѣнены выражающими ихъ функціями θ, а затѣмъ уравненія (522) были бы рѣшены относительно оставшихся p декартовыхъ координатъ, то послѣднія должны бы были выразиться тѣми же самыми функціями, какими онѣ выражаются по формуламъ (523).

Число координатныхъ параметровъ можетъ быть болѣе κ, но тогда $(s - \kappa)$ параметровъ должны быть функціями остальныхъ κ; дѣйстви-

тельно, если $s > н$, то, рѣшивъ $н$ первыхъ изъ числа равенствъ (521) вмѣстѣ съ уравненіями (522) относительно декартовыхъ координатъ и подставивъ полученныя выраженія (523) въ оставшіяся $(s - н)$ равенствъ (521), получимъ выраженія координатныхъ параметровъ

$$q_{н+1}, \quad q_{н+2}, \ldots q_s$$

въ функціяхъ остальныхъ $q_1, q_2, \ldots q_н$.

Также можно выразить декартовы координаты функціями которыхъ либо $н$ координатныхъ параметровъ, выбранныхъ изъ числа разсматриваемыхъ; а потому, если число s координатныхъ параметровъ данной системы точекъ болѣе числа $н$ независимыхъ декартовыхъ координатъ той же системы, то любые $н$ изъ числа координатныхъ параметровъ могутъ быть приняты за *независимые*, прочіе же $(s - н)$ должны выражаться функціями этихъ независимыхъ координатныхъ параметровъ.

Обратимъ еще вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ s хотя и болѣе $н$, но менѣе $3n$; относительно этихъ случаевъ мы сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое намъ понадобится въ слѣдующемъ параграфѣ.

D) Можно выразить декартовы координаты въ функціяхъ всѣхъ s координатныхъ параметровъ такимъ образомъ, чтобы полученныя выраженія тождественно удовлетворяли $(3n—s)$ изъ числа p уравненій (522) связей ($(3n - s)$ менѣе p потому что s болѣе $н$, а p равно $(3n—н)$); для этого надо рѣшить s равенствъ (521) и избранныя $(3n - s)$ изъ уравненій (522) относительно декартовыхъ координатъ; полученныя выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \mathfrak{F}_1(q_1, q_2, \ldots q_s) \\ y_1 = \mathfrak{F}_2(q_1, q_2, \ldots q_s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \mathfrak{F}_{3n}(q_1, q_2, \ldots q_s) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (524)$$

должны будутъ обращать первыя части избранныхъ нами $(3n—s)$ уравненій связей въ нуль тождественно, при всякихъ значеніяхъ $q_1, q_2, \ldots q_s$; остальныя же уравненія связей, число которыхъ равно $(p - 3n + s)$, то есть $(s - н)$, обратятся, при подстановленіи въ нихъ функцій $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ не въ тождества, но въ тѣ уравненія, которыя связываютъ между собою координатные параметры и изъ которыхъ зависимые $(s - н)$ параметровъ могутъ быть выражены въ функціяхъ отъ независимыхъ.

Все сказанное до сихъ поръ въ этомъ параграфѣ примѣняется *съ надлежащими измѣненіями* къ n точкамъ, связаннымъ между собою p связями, уравненія которыхъ (491, 1), (491, 2)....(491, p) (§ 70) заключаютъ время t.

Въ этихъ случаяхъ лучше всего выбрать такіе координатные параметры, которые выражаются функціями декартовыхъ координатъ, независящими отъ времени.

Положимъ, что такіе координатные параметры найдены и что число ихъ равно $\varkappa = 3n - p$; пусть они выражаются въ декартовыхъ координатахъ слѣдующими функціями:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \chi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \\ q_2 = \chi_2(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_\varkappa = \chi_\varkappa(x_1, y_1, z_1, \ldots y_n, z_n) \end{array}\right\} ; \ldots\ldots \mathbf{(525)}$$

рѣшивъ равенства (525) и уравненія (491, 1)....(491, p) относительно декартовыхъ координатъ, получимъ выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \theta_1(q_1, q_2, \ldots q_\varkappa, t) \\ y_1 = \theta_2(q_1, q_2, \ldots q_\varkappa, t) \\ z_1 = \theta_3(q_1, q_2, \ldots q_\varkappa, t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \theta_{3n}(q_1, q_2, \ldots q_\varkappa, t) \end{array}\right\} ; \ldots\ldots \mathbf{(526)}$$

время войдетъ въ эти выраженія изъ уравненій связей.

Слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ опредѣленіе 3-го свойства координатныхъ параметровъ должно быть измѣнено слѣдующимъ образомъ:

Каждая совокупность опредѣленныхъ значеній координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_\varkappa$ вполнѣ опредѣляетъ положеніе системы точекъ въ пространствѣ въ каждый моментъ времени.

Замѣчанія B и C относятся и къ этимъ случаямъ, ихъ можно выразить такъ:

B') Если число координатныхъ параметровъ равно $\varkappa = (3n - p)$, то есть, числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, то всѣ эти координатные параметры суть перемѣнныя независимыя, то есть, они не должны быть связаны между собою никакими равенствами и могутъ получать всякія значенія независимо другъ отъ друга.

C') *Первыя части уравненій* (491, 1)....(491, p) *связей, по подстановленіи въ нихъ функцій* θ (526) *вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обращаться въ нуль тождественно, то есть, при всякихъ значеніяхъ координатныхъ параметровъ и для всякаго значенія* t.

Число координатныхъ параметровъ можетъ быть болѣе $\varkappa$ (пусть число ихъ будетъ s), но тогда они должны быть связаны между собою и съ временемъ $(s - \varkappa)$ уравненіями, или, иначе сказать, $(s - \varkappa)$ координатныхъ параметровъ должны выражаться функціями времени и остальныхъ $\varkappa$ независимыхъ параметровъ; за независимые могутъ быть приняты любые изъ числа всѣхъ s координатныхъ параметровъ.

Положимъ, что координатные параметры $q_1, q_2, \ldots q_s$, число которыхъ болѣе $\varkappa$, но менѣе $3n$, выражены данными функціями декартовыхъ координатъ; пусть (521) суть эти выраженія.

Раздѣлимъ уравненія (491, 1)....(491, p) на двѣ группы I и E; группа I заключаетъ въ себѣ которыя либо $(3n - s)$ изъ числа уравненій связей, остальныя $(s - \varkappa)$ уравненій образуютъ группу E.

Рѣшимъ равенства (521) вмѣстѣ съ уравненіями группы I относительно декартовыхъ координатъ; получимъ выраженія этихъ координатъ въ функціяхъ времени и координатныхъ параметровъ; пусть эти выраженія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{S}_1(q_1, q_2, \ldots q_s, t) \\ y_1 &= \mathfrak{S}_2(q_1, q_2, \ldots q_s, t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= \mathfrak{S}\;(q_1, q_2, \ldots q_s, t) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (527)$$

D') Уравненія группы I, по подстановленіи въ нихъ выраженій (527)

вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обратиться въ *тождества*, то есть, первыя части ихъ должны быть равны нулю при всякихъ значеніяхъ t, q_1, q_2,... q_s, каковы бы эти значенія ни были; уравненія же группы E обращаются помощію выраженій (527) въ *уравненія*, связывающія координатные параметры между собою и съ временемъ.

Приведенныя здѣсь разсужденія и замѣчанія справедливы и въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ вторыя части выраженій (521) и (525) заключаютъ время.

§ 73. Дифференціальныя уравненія Лагранжа.

Въ § 71 было объяснено, что изъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (517) можно исключить всѣ множители λ и получить $n = (3n - p)$ дифференціальныхъ уравненій со столькимъ же числомъ искомыхъ функцій времени; эти функціи суть тѣ декартовы координаты, которыя приняты за независимыя.

Если декартовы координаты могутъ быть выражены функціями (526) времени и n координатныхъ параметровъ q_1, q_2, ... q_n и мы желаемъ ввести послѣдніе вмѣсто декартовыхъ координатъ въ дифференціальныя уравненія движенія, то можемъ это сдѣлать въ тѣхъ n дифференціальныхъ уравненіяхъ, объ которыхъ говорили выше и въ § 71.

Поступая такимъ образомъ, намъ придется произвести по крайней мѣрѣ два процесса: процессъ исключенія множителей λ и процессъ преобразованія координатъ; оба эти процесса могутъ быть весьма сложны, а потому мы покажемъ Лагранжевъ пріемъ полученія n дифференціальныхъ уравненій движенія въ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, ... q_n.

По этому способу процессъ исключенія множителей λ упрощается весьма значительно при помощи соображеній, выводимыхъ на основаніи замѣчанія (C′) предыдущаго параграфа; въ этомъ замѣчаніи сказано, что выраженія (526) обращаютъ уравненія связей (491, 1).. ..(491, p) въ *тождества*:

$$\text{в}_1[\theta_1(q_1, q_2, ..q_n, t), \ \theta_2(q_1, q_2, ..q_n, t), ... \\ ....\theta_{3n}(q_1, q_2, ..q_n, t)] = 0 \qquad (528, 1)$$

и прочія.

Чтобы не писать длинныхъ формулъ, мы условимся изображать эти тождества такъ:

$$з_1((q_1, q_2, \ldots q_n, t)) = 0 \qquad (528, 1)$$

$$з_2((q_1, q_2, \ldots q_n, t)) = 0 \qquad (528, 2)$$

. . . .

$$з_p((q_1, q_2, \ldots q_n, t)) = 0. \qquad (528, p)$$

Изъ этихъ тождествъ слѣдуютъ ряды другихъ, самый видъ которыхъ укажетъ намъ путь къ преобразованію дифференціальныхъ уравненій (517) для исключенія множителей λ.

Первыя части тождествъ (528) должны быть равны нулю при всякихъ значеніяхъ t и при всякихъ значеніяхъ независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_n$; поэтому, если придадимъ этимъ перемѣннымъ какія угодно значенія, а затѣмъ дадимъ параметру q_1 какое либо весьма малое приращеніе δq_1, положительное или отрицательное, произвольнаго порядка малости, то будемъ имѣть, между прочимъ:

$$з_1((q_1, q_2, \ldots q_n, t)) = 0,$$

$$з_1((q_1 + \delta q_1, q_2, \ldots q_n, t)) = 0,$$

гдѣ величинамъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n$ мы придаемъ тѣ же самыя значенія въ обоихъ видахъ тождества.

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\frac{\partial з_1((q_1, q_2, \ldots q_n, t))}{\partial q_1} = 0$$

при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n$, то есть, — тождественно.

Примѣняя тѣ же разсужденія къ каждой изъ перемѣнныхъ $q_1, q_2, \ldots q_n$ и къ каждой изъ функцій $з_1, з_2, \ldots з_p$, получимъ np тождествъ вида:

$$\frac{\partial з_j((q_1, q_2, \ldots q_n, t))}{\partial q_k} = 0, \ldots \ldots \qquad (529, j, k)$$

где j есть которое либо изъ чиселъ 1, 2, 3,....p,

а k есть которое либо изъ чиселъ 1, 2, 3,....n.

Эти же тождества можно представить такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial s_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial s_j}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial s_j}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=0;\ldots\ldots \mathbf{(530, j, k)}$$

гдѣ декартовы координаты выражены по формуламъ (526) функціями отъ t, q_1, q_2,....q_n.

Самый видъ первыхъ частей тождества (530) показываетъ, что для исключенія величинъ λ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) должно поступить слѣдующимъ образомъ.

Замѣнивъ въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ (517) декартовы координаты ихъ выраженіями (526), надо помножить каждое изъ нихъ на производную отъ соотвѣтственной декартовой координаты по q_k (эти производныя получаются изъ выраженій (526)) и полученныя равенства сложить; въ силу тождествъ (530), результатъ этихъ дѣйствій не будетъ заключать величинъ λ и будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i''\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+y_i''\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+z_i''\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=Q_k,\ldots\ldots \mathbf{(531, k)}$$

гдѣ:

$$Q_k=\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right);\ldots\ldots \mathbf{(532, k)}$$

здѣсь k есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3,....n, а потому мы будемъ имѣть n уравненій вида (531).

Въ полученныхъ уравненіяхъ (531) декартовы координаты должны быть выражены по формуламъ (526), а первыя производныя декартовыхъ координатъ по времени должны быть замѣнены выраженіями:

$$x_1'=\frac{\partial \theta_1}{\partial t}+\frac{\partial \theta_1}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial \theta_1}{\partial q_2}q_2'+\ldots\ldots+\frac{\partial \theta_1}{\partial q_n}q_n',$$

и проч.; эти выраженія мы будемъ писать подъ слѣдующимъ видомъ, напримѣръ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}=x_i'=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_n}q_n'\\ \frac{dy_i}{dt}=y_i'=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_n}q_n'\\ \frac{dz_i}{dt}=z_i'=\frac{\partial z_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_n}q_n'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(533,\mathrm{i})$$

Подъ видомъ заключающихся здѣсь частныхъ производныхъ отъ декартовыхъ координатъ по времени должно всегда подразумѣвать частныя производныя по t отъ соотвѣтствующихъ функцій θ и не слѣдуетъ смѣшивать ихъ съ полными производными x_i', y_i', z_i', выражающими проэкціи на оси координатъ скоростей матерьяльныхъ точекъ.

Вмѣсто составленія выраженій для производныхъ x_i'', y_i'', z_i'', произведемъ слѣдующія преобразованія въ первыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Каждый изъ членовъ первой части уравненія (531, k) можно преобразовать такъ:

$$m_i x_i''\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=\frac{d\left(m_i x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt}-m_i x_i'\frac{d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt};$$

а поэтому дифференціальное уравненіе (531, k) можно представить подъ видомъ:

$$\frac{dp_k}{dt}-G_k=Q_k,$$

гдѣ:

$$p_k=\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\ldots\ldots(534,\mathrm{k})$$

$$G_k=\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(x_i'\frac{d\partial x_i}{dt\partial q_k}+y_i'\frac{d\partial y_i}{dt\partial q_k}+z_i'\frac{d\partial z_i}{dt\partial q_k}\right).$$

Теперь намъ придется выразить p_k и G_k въ координатныхъ параметрахъ $q_1, q_2, \ldots q_n$ и въ производныхъ $q_1', q_2', \ldots q_n'$.

Изъ выраженій (533) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k};$$

а потому p_k можетъ быть приведено къ виду частной производной по q_k'

$$p_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k'}$$

отъ выраженія суммы живыхъ силъ системы точекъ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(x_i')^2 + (y_i')^2 + (z_i')^2 \right] \ldots \textbf{(535)}$$

въ координатныхъ параметрахъ $q_1, q_2, \ldots q_n$ и въ ихъ производныхъ по времени.

Сумма живыхъ силъ точекъ системы называется *живою силою* этой системы; выраженіе ея въ координатныхъ параметрахъ и ихъ производныхъ по времени (это выраженіе легко получить изъ (535) при помощи выраженій (533)) можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$T = T(0) + T(1) + T(2); \ldots\ldots\ldots \textbf{(535, a)}$$

$T(0)$ есть сумма членовъ, незаключающихъ производныхъ $q_1', q_2', \ldots q_n'$:

$$T(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2 \right]; \ldots \textbf{(536)}$$

$T(1)$ есть однородная линейная функція относительно производныхъ отъ координатныхъ параметровъ по времени:

$$T(1) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k q_k', \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(537)}$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial t}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right]; \ldots \quad \textbf{(537 bis)}$$

$T(2)$ есть однородная квадратичная функція относительно тѣхъ же производныхъ:

$$T(2) = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{e=n} q'_e \sum_{k=1}^{k=n} a_{ke} q_k' \ldots\ldots\ldots \textbf{(538)}$$

$$a_{ek} = a_{ke} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_e} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_e} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_e} \right] \ldots \quad \textbf{(538 bis)}$$

Производныя втораго порядка, заключающіяся въ суммѣ G_k, могутъ быть представлены какъ частныя производныя по q_k отъ скоростей x_i', y_i', z_i', выраженныхъ по формуламъ (533) въ функціяхъ отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_n, q_1', \ldots q'_n$; въ самомъ дѣлѣ, составимъ выраженіе полной производной отъ $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ по t:

$$\frac{d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_k} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_k} q'_n;$$

съ другой стороны изъ выраженій (533) можемъ получить слѣдующее выраженіе для частной производной отъ x_i' по q_k:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_n} q'_n;$$

сравнивъ между собою вторыя части этихъ равенствъ, мы заключимъ, что:

$$\frac{d\partial x_i}{dt \partial q_k} = \frac{d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}{dt} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_k}.$$

Поэтому сумма G_k есть частная производная отъ T по q_k:

$$G_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Такимъ образомъ мы получимъ n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \ldots \frac{dp_n}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n, \ldots \quad \textbf{(531)}$$

гдѣ:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \ldots p_n = \frac{\partial T}{\partial q'_n}, \ldots \quad \textbf{(539)}$$

называемыхъ *дифференціальными уравненіями Лагранжа* *).

$Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ суть суммы вида (532), выраженныя въ координатныхъ параметрахъ и ихъ производныхъ по времени.

Лагранжевъ способъ преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія можетъ быть примѣненъ также и въ тѣхъ случаяхъ, когда декартовы координаты выражены функціями (527) (§ 72) времени и s координатныхъ параметровъ (s менѣе $3n$ и болѣе n) такимъ образомъ, что выраженія (527) обращаютъ $(3n - s)$ уравненія связей въ тождества; тогда Лагранжево преобразованіе приводитъ къ s совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, заключающимъ $(s - n)$ множителей λ.

Положимъ, что уравненія группы I (см. замѣчаніе (D′) въ концѣ параграфа 72-го) суть:

$$\text{в}_1 = 0, \ \text{в}_2 = 0, \ \text{в}_3 = 0, \ldots \text{в}_g = 0, \qquad \textbf{(I)}$$

гдѣ $g = 3n - s$; остальныя изъ уравненій (491, 1)....(491, p) образуютъ группу E:

$$\text{в}_{g+1} = 0, \ \text{в}_{g+2} = 0, \ldots \text{в}_p = 0. \qquad \textbf{(E)}$$

Выраженія (527) обращаютъ первыя части уравненій группы I въ нуль тождественно при всякихъ значеніяхъ $t, q_1, q_2, \ldots q_s$, даже при такихъ значеніяхъ, которыя не удовлетворяютъ уравненіямъ группы E; поэтому, разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ началѣ настоящаго параграфа, то есть, разсматривая всѣ координатные параметры $q_1, q_2,$

---

*) Дифференціальныя уравненія (517) также даны Лагранжемъ, поэтому совокупность (531) слѣдуетъ называть *второю формою Лагранжевыхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ*, какъ ихъ называетъ Якоби.

$q_3, \dots q_s$ такъ, какъ будто бы они были независимы другъ отъ друга, получимъ sg тождествъ слѣдующаго вида:

$$\frac{\partial \text{в}_j((q_1, q_2, \dots q_s, t))}{\partial q_k} = 0,$$

гдѣ j есть которое либо изъ чиселъ 1, 2, 3, ... g,

а k есть которое либо изъ чиселъ 1, 2, 3, ... s.

Равенства же, въ которыя обращаются уравненія группы E, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} \text{в}_{g+1}((q_1, q_2, \dots q_s, t)) = 0, \\ \text{в}_{g+2}((q_1, q_2, \dots q_s, t)) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{в}_p((q_1, q_2, \dots q_s, t)) = 0, \end{array}\right\} \dots \mathbf{(E)\,(540)}$$

суть *уравненія*, связывающія координатные параметры между собою и съ временемъ, то есть, дѣлающія $(s - н)$ параметровъ зависимыми отъ остальныхъ; такъ что, если слѣдующія значенія величинъ $t, q_1, q_2, \dots q_s$:

$$t = \tau,\ q_1 = k_1,\ q_2 = k_2, \dots q_s = k_s,$$

удовлетворяютъ всѣмъ уравненіямъ (540), то значенія:

$$t = \tau,\ k_1 + \delta q_1,\ k_2, \dots k_s$$

могутъ и неудовлетворять имъ, а потому частныя производныя:

$$\frac{\partial \text{в}_{g+1}}{\partial q_1},\quad \frac{\partial \text{в}_{g+2}}{\partial q_1}, \dots\dots \frac{\partial \text{в}_p}{\partial q_1}$$

могутъ быть неравными нулю при значеніяхъ величинъ $t, q_1, q_2, \dots q_s$, удовлетворяющихъ уравненіямъ (540); тоже самое должно сказать и объ частныхъ производныхъ этихъ функцій по прочимъ координатнымъ параметрамъ.

Легко теперь видѣть, что, примѣняя къ разсматриваемымъ случаямъ Лагранжево преобразованіе, мы получимъ s совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \lambda(\text{в}_{g+1}) \frac{\partial \text{в}_{g+1}}{\partial q_k} + \dots \lambda(\text{в}_p) \frac{\partial \text{в}_p}{\partial q_k}, \dots \mathbf{(541, k)}$$

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ 1, 2, 3,....s; въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ осталось (s — $\varkappa$) множителей:

$$\lambda(\vartheta_{g+1}),\ \lambda(\vartheta_{g+2}),\ \ldots\ \lambda(\vartheta_p).$$

Для поясненія сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ, приведемъ нѣсколько примѣровъ составленія дифференціальныхъ уравненій Лагранжа.

Вмѣсто перваго примѣра мы укажемъ на примѣненіе Лагранжевыхъ уравненій къ составленію дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки въ сферическихъ координатахъ; въ этомъ случаѣ $n = 1$, $p = 0$, $\varkappa = 1$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$,

$$x = r\cos\psi\sin\varphi,\ \ y = r\sin\psi\sin\varphi,\ \ z = r\cos\varphi,$$

$$Q_1 = F\cos(F,\alpha),\ \ Q_2 = rF\cos(F,\beta),\ \ Q_3 = r\sin\varphi F\cos(F,\gamma),$$

гдѣ α, β и γ суть направленія координатныхъ осей сферическихъ координатъ, а F есть сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ; составивъ Лагранжевы дифференціальныя уравненія, получимъ уравненія (38) (страница 42), помноженныя: второе — на r и третье — на $r\sin\varphi$.

Подобнымъ же образомъ можно примѣнить Лагранжевы уравненія къ составленію дифференціальныхъ уравненій движенія точки въ какихъ угодно координатахъ; надо только знать, какъ выражаются декартовы координаты въ новыхъ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, q_3, дальнѣйшія же дѣйствія указываются видомъ Лагранжевыхъ уравненій и формулами, приведенными выше.

Примѣръ 64-й. Система состоитъ изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ m_1 и m_2, связанныхъ удерживающею связью, приведенною въ примѣрѣ 57-мъ (стр. 317); кромѣ того, матерьяльная точка m_1 должна постоянно оставаться въ плоскости XY, а точка m_2 — на оси Z. Къ точкѣ m_2 приложена только сила тяжести $m_2 g$, къ точкѣ же m_1 не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ и плоскость XY предполагается идеально гладкою; положительная часть оси $Z^{овъ}$ направлена вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ $n = 2$, число связей и преградъ равно 4-мъ:

$$r_1 + r_2 - l = 0,\ \ z_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ y_2 = 0,$$

такъ что $p = 4$ и $\varkappa = 2$; примемъ за координатные параметры q_1 и q_2 полярные координаты ρ_1 и θ_1 точки m_1 въ плоскости XY.

Декартовы координаты выразятся въ координатныхъ параметрахъ такъ:

$$x_1 = \rho_1\cos\theta_1,\ \ y_1 = \rho_1\sin\theta_1,\ \ z_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ y_2 = 0,\ \ z_2 = l - \rho_1.$$

Живая сила системы:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left(\rho_1{'}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_1\rho_1{}^2\left(\theta_1{'}\right)^2.$$

Лагранжевы дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ слѣдующія:

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\rho_1}{dt^2} - m_1\rho_1\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 = - m_2 g,$$

$$m_1\,\frac{d(\rho_1{}^2\theta_1{'})}{dt} = 0.$$

Примѣръ 65-й. Система состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ точекъ m_1 и m_2; первая находится въ постоянномъ разстояніи L отъ начала координатъ, а вторая — въ постоянномъ разстояніи l отъ первой; кромѣ того, предположимъ, что обѣ точки остаются въ одной вертикальной плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть эта плоскость есть плоскость XY и ось Y направлена вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ число точекъ равно двумъ, а число преградъ и связей — четыремъ, поэтому $n = 2$.

Означимъ черезъ φ_1 и φ_2 углы, составляемые направленіями $\overline{OM_1}$ и $\overline{M_1M_2}$ съ осью Y, и примемъ эти углы за координатные параметры системы.

Выраженія (526) будутъ здѣсь слѣдующія:

$$x_1 = L\sin\varphi_1,\ \ x_2 = L\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2$$

$$y_1 = L\cos\varphi_1,\ \ y_2 = L\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2$$

$$z_1 = 0,\qquad\quad z_2 = 0.$$

Живая сила системы:

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2}L^2(\varphi_1{'})^2 + \frac{m_2}{2}\,l^2(\varphi_2{'})^2 + m_2 Ll\varphi_1{'}\varphi_2{'}\cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$p_1 = (m_1 + m_2)L^2\varphi_1{'} + m_2 Ll\varphi_2{'}\cos\omega,$$

$$p_2 = m_2 l^2\varphi_2{'} + m_2 Ll\varphi_1{'}\cos\omega;\ \ (\varphi_2 - \varphi_1) = \omega.$$

Два дифференціальныя уравненія будутъ:

$$(m_1 + m_2)L^2\varphi_1'' + m_2Ll\frac{d(\varphi_2'\cos\omega)}{dt} - m_2Ll\varphi_1'\varphi_2'\sin\omega =$$

$$= -(m_1 + m_2)Lg\sin\varphi_1$$

$$m_2l^2\varphi_2'' + m_2Ll\frac{d(\varphi_1'\cos\omega)}{dt} + m_2Ll\varphi_1'\varphi_2'\sin\omega = -m_2lg\sin\varphi_2.$$

Примѣръ 66-й. Система состоитъ изъ четырехъ матерьяльныхъ точекъ M_1, M_2, M_3, M_4, связанныхъ попарно идеально-твердыми стержнями M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1 одинаковой длины l; всѣ точки притягиваются къ началу координатъ силами, прямопропорціональными разстояніямъ отъ него и массамъ ихъ; кромѣ этого, предположимъ, что всѣ точки остаются въ плоскости XY и что массы точекъ, находящихся на противолежащихъ вершинахъ ромба $M_1M_2M_3M_4$, равны между собою: $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$.

Здѣсь $\varkappa = 4$; за координатные параметры возьмемъ: полярныя координаты ρ_c, θ_c центра C ромба, разстояніе $\xi = CM_1$ точки M_1 отъ этого центра и уголъ ϑ, составляемый направленіемъ CM_1 съ осью $X^{\text{овъ}}$; разстояніе η_2 точки M_2 отъ точки C равно корню квадратному изъ разности $(l^2 - \xi^2)$ и направленіе CM_2 составляетъ съ осью $X^{\text{овъ}}$ уголъ $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$.

Живая сила этой системы выражается такъ:

$$T = (m_1 + m_2)\Big[(\rho_c')^2 + \rho_c^2(\theta_c')^2\Big] + \Big(m_2l^2 + (m_1 - m_2)\xi^2\Big)(\vartheta')^2 +$$

$$+ \frac{m_1l^2 - (m_1 - m_2)\xi^2}{l^2 - \xi^2}(\xi')^2.$$

Дифференціальныя уравненія движенія (по сокращеніи общихъ множителей) будутъ:

$$\rho_c'' - \rho_c^2(\theta_c')^2 = -\mu\rho_c;\ \frac{d}{dt}(\rho_c^2\theta_c') = 0;$$

$$\frac{m_1l^2 - (m_1 - m_2)\xi^2}{l^2 - \xi^2}\xi'' + \frac{m_2l^2\xi}{(l^2 - \xi^2)^2}(\xi')^2 - (m_1 - m_2)\xi(\vartheta')^2 =$$

$$= -\mu(m_1 - m_2)\xi;$$

$$\frac{d[(m_2l^2 + (m_1 - m_2)\xi^2)\vartheta']}{dt} = 0.$$

Примѣчаніе I. Число n независимыхъ декартовыхъ координатъ или независимыхъ координатныхъ параметровъ системы точекъ называется *числомъ степеней свободы этой системы*: такъ, свободная матерьяльная точка имѣетъ въ пространствѣ три, а на какой либо поверхности — двѣ степени свободы, въ примѣрахъ 64 и 65-мъ число степеней свободы равно двумъ, а въ примѣрѣ 66 — четыремъ.

Примѣчаніе II. Суммы:

$$X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

могутъ имѣть измѣренія силъ ((29) стр. 27) только въ исключительныхъ случаяхъ, а не вообще; поэтому первыя части Лагранжевыхъ уравненій не всегда имѣютъ измѣреніе произведенія изъ массы на ускореніе.

§ 74. Гамильтонова форма дифференціальныхъ уравненій движенія.

Лагранжевы уравненія (531), подобно всякой совокупности обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка, могутъ быть приведены къ совокупности двойнаго числа обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двойнымъ же числомъ искомыхъ функцій времени.

Для этого, принявъ q_1', q_2', $\ldots q_n'$ за новыя искомыя функціи, надо замѣнить, въ уравненіяхъ (531), вторыя производныя q_1'', q_2'', $\ldots$ $\ldots q_n''$ — первыми производными отъ новыхъ перемѣнныхъ; послѣ этого дифференціальныя уравненія (531) вмѣстѣ съ n дифференціальными уравненіями:

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2', \ldots \frac{dq_n}{dt} = q_n'$$

образуютъ совокупность $2n$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ $2n$ искомыми функціями времени: $q_1, q_2, \ldots q_n, q_1', q_2', \ldots$ $\ldots q_n'$.

Если же принять величины p_1, $p_2, \ldots$ за новыя искомыя функціи, какъ сдѣлалъ Пуассонъ, то можно получить весьма симметрич-

ную форму совокупности $2н$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, найденную Гамильтономъ.

Для этого надо прежде всего выразить производныя q'_k въ функціяхъ отъ величинъ p_k.

По формуламъ (539), (535, а), (537) и (538) вторыя выражаются слѣдующими линейными функціями первыхъ:

$$p_k = \alpha_k + a_{1k} q_1' + a_{2k} q_2' + \ldots + a_{нk} q'_н; \ldots \textbf{(542, k)}$$

k есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... $н$.

Рѣшивъ эти $н$ равенствъ относительно величинъ q_1', q_2', ..., получимъ требуемыя выраженія; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_j' = \beta_j + h_{1j} p_1 + h_{2j} p_2 + \ldots + h_{нj} p_н, \ldots \textbf{(543, j)}$$

гдѣ j есть одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... $н$.

Коэффиціенты h и β (съ различными значками внизу) выражаются въ коэффиціентахъ a и α, и обратно; зависимость между тѣми и другими представляется рядомъ равенствъ, которыя слѣдуютъ изъ тождествъ, получающихся при подстановленіи выраженій (542) величинъ p_1, p_2, ... $p_н$ въ равенства (543); эта зависимость — слѣдующая:

$$\beta_j = -(\alpha_1 h_{1j} + \alpha_2 h_{2j} + \ldots + \alpha_н h_{нj}) \ldots \textbf{(544, j)}$$

$$h_{1j} a_{1j} + h_{2j} a_{2j} + \ldots + h_{нj} a_{нj} = 1 \ldots \textbf{(545, jj)}$$

$$h_{1j} a_{1k} + h_{2j} a_{2k} + \ldots + h_{нj} a_{нk} = 0, \ldots \textbf{(545, jk)}$$

гдѣ j есть каждое изъ чиселъ 1, 2, .. $н$; k — одно изъ тѣхъ же чиселъ, но неравное j; конечно: $h_{kj} = h_{jk}$.

Подставивъ выраженія (543) вмѣсто величинъ q'_k въ выраженіе (535, а) живой силы, получимъ другое выраженіе ея, въ функціи отъ t, q_1, q_2, ... $q_н$, p_1, p_2, ... $p_н$; это новое выраженіе живой силы, *союзное* первому, мы будемъ обозначать буквою $\mathfrak{T}$ и будемъ называть *вторымъ союзнымъ выраженіемъ живой силы.*

Чтобы вывести это выраженіе, помножимъ первое изъ равенствъ

(542) ($k=1$) на q_1', второе ($k=2$) — на q_2', и т. д. и сложимъ полученные результаты, получится:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k q'_k = T(1) + 2T(2);$$

придавъ же къ обѣимъ частямъ этого равенства сумму $[T(1)+2T(0)]$, получимъ:

$$2T = \sum_{k=1}^{k=n} p_k q'_k + T(1) + 2T(0) \ldots\ldots \quad \mathbf{(535, b)}$$

Если во второй части этого выраженія замѣнить величины q_k' ихъ выраженіями (543), то она получитъ форму втораго союзнаго выраженія удвоенной живой силы.

Сначала преобразуемъ выраженіе $T(1)$:

$$T(1) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j q_j' = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \beta_j + \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \sum_{k=1}^{k=n} h_{kj} p_k;$$

если во второмъ членѣ перемѣнимъ порядокъ суммованія и примемъ во вниманіе равенства (544), то будемъ имѣть:

$$T(1) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \beta_j - \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(546)}$$

Далѣе:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k q'_k = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{e=1}^{e=n} h_{ke} p_e;$$

поэтому изъ выраженія (535, b) окажется, что второе союзное выраженіе живой силы имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(2) + \mathfrak{T}(0), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(535, c)}$$

гдѣ:

$$\mathfrak{T}(2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{e=1}^{e=n} h_{ke} p_e \ldots\ldots\ldots\ldots (547)$$

$$\mathfrak{T}(0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \beta_k + T(0) \ldots\ldots\ldots (548)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что вторая союзная форма выраженія живой силы состоитъ изъ двухъ частей, одна изъ которыхъ не заключаетъ величинъ p_k, другая же есть однородная функція второй степени относительно этихъ величинъ.

Изъ выраженій (543), (535, с), (547), (548) слѣдуетъ, что q'_k могутъ быть выражены такимъ образомъ:

$$q_k' = \beta_k + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_k}, \ldots\ldots\ldots\ldots (549, \mathrm{k})$$

а кромѣ того, если еще введемъ въ наши формулы слѣдующую сумму:

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k, \ldots\ldots\ldots\ldots (550)$$

то q_k' выразится въ видѣ частной производной по p_k:

$$q_k' = \frac{\partial(\mathfrak{T} + S)}{\partial p_k} \ldots\ldots\ldots\ldots (549, \mathrm{k}, \mathrm{bis})$$

Частныя производныя отъ T по q_k могутъ быть тоже выражены помощію частныхъ производныхъ отъ $\mathfrak{T}$ и S; для этого мы составимъ два слѣдующія выраженія.

Если въ $\mathfrak{T}$ подставить, вмѣсто $p_1, p_2, \ldots p_n$, выраженія (542), то $\mathfrak{T}$ обратится T; поэтому можно написать слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_k} + \sum_{e=1}^{e=n} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_e} \frac{\partial p_e}{\partial q_k}; \ldots\ldots\ldots\ldots (551)$$

здѣсь, подъ частными производными отъ p_1, p_2, ... по q_k, подразумѣваются частныя производныя, получаемыя изъ выраженій (542).

Затѣмъ, если во второй части равенства:

$$2T = \sum_{e=1}^{e=n} q'_e p_e - S + 2\mathfrak{T}(0)$$

замѣнить величины p_1, p_2, ... ихъ выраженіями (542), то вторая часть приметъ видъ тождественный виду первой части; поэтому можно написать слѣдующее равенство:

$$2\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{e=1}^{e=n} q_e' \frac{\partial p_e}{\partial q_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} - \sum_{e=1}^{e=n} \beta_e \frac{\partial p_e}{\partial q_k} + 2\frac{\partial \mathfrak{T}(0)}{\partial q_k}.$$

Вычтя изъ этого равенства равенство (551) и принявъ въ разсчетъ выраженія (549), получимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial(\mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0))}{\partial q_k} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(552, k)}$$

Къ этому можно прибавить, что, такъ какъ $\mathfrak{T}(0)$ незаключаетъ въ себѣ величинъ p_1, p_2, ..., то можно выраженія (549) представить такъ:

$$q_k' = \frac{\partial(\mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0))}{\partial p_k} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(553, k)}$$

Изъ всего выведеннаго и сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что совокупныя дифференціальныя уравненія Лагранжа могутъ быть замѣнены слѣдующею совокупностью $2n$ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_1} + Q_1; & \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_1}; \\
\dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_2} + Q_2; & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_2}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\dfrac{dp_n}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_n} + Q_n; & \dfrac{dq_n}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_n};
\end{array}\right\} \ldots\ldots \mathbf{(554)}$$

гдѣ Φ есть функція отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_\kappa, p_1, p_2, \ldots p_\kappa$:

$$\Phi = \mathfrak{T} + S - 2\mathfrak{T}(0), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (555)$$

значенія величинъ $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}(0)$ и S выражаются формулами (535, c), (547), (548), (544), (545), (536); Q_k(532) должны быть выражены функціями отъ $t, q_1, q_2, \ldots q_\kappa, p_1, p_2, \ldots p_\kappa$.

Эти уравненія мы будемъ называть *Гамильтоновыми совокупными дифференціальными уравненіями.*

Если уравненія связей не заключаютъ времени, то частныя производныя

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial t}$$

равны нулю, а потому тогда равны нулю выраженія: $T(0)$ (536), α_k(537 bis), β_k(544), S(550), $\mathfrak{T}(0)$(548), $T(1)$(537); въ этихъ случаяхъ

$$\Phi = \mathfrak{T} = \mathfrak{T}(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (556)$$

§ 75. Возможныя варьяціи положеній данной системы точекъ; возможныя варьяціи координатъ и координатныхъ параметровъ.

Въ слѣдующихъ главахъ намъ придется весьма нерѣдко, при перемѣнѣ координатныхъ параметровъ, преобразовывать дифференціальныя уравненія движенія изъ одной формы въ другую; такія преобразованія значительно упрощаются тѣмъ, что вся совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ можетъ быть заключена въ одно уравненіе, надъ которымъ процессы преобразованія совершаются скорѣе и проще, чѣмъ надъ отдѣльными дифференціальными уравненіями.

Въ составъ этого уравненія, которое выведемъ въ слѣдующемъ параграфѣ, войдутъ нѣкоторыя весьма малыя величины, объ которыхъ дадимъ понятіе въ настоящемъ параграфѣ.

Пусть имѣемъ систему n матерьяльныхъ точекъ, подчиненныхъ p связямъ, выражаемымъ уравненіями (491, 1)....(491, p) (§ 70); положимъ, что время входитъ въ эти уравненія явнымъ образомъ.

Если $3n$ болѣе p, то $н = (3n - p)$ декартовыхъ координатъ суть величины независимыя и произвольныя. При всякомъ значеніи t мы можемъ придать $н$ декартовымъ координатамъ произвольныя значенія, а значенія остальныхъ $3n - н = p$ координатъ опредѣлить изъ p уравненій связей; полученная такимъ образомъ система значеній декартовыхъ координатъ опредѣлитъ одну изъ *совокупностей положеній точекъ, возможную* въ моментъ t; понятно, что число различныхъ совокупностей положеній системы точекъ, возможныхъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени, безконечно велико.

Возьмемъ двѣ какія либо *весьма близкія* совокупности положеній точекъ, возможныя въ одинъ и тотъ же моментъ t времени; пусть

$$M_1, M_2, \ldots M_i, \ldots M_n \qquad \textbf{(I)}$$

суть положенія, занимаемыя точками

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$$

въ первой совокупности, а

$$M_1', M_2', \ldots M_i', \ldots M_n' \qquad \textbf{(II)}$$

положенія, занимаемыя точками во второй совокупности положеній; пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n$ суть декартовы координаты положеній $M_1, M_2, \ldots M_i, \ldots M_n$; декартовы же координаты положеній совокупности (II) означимъ такъ:

$$x_1 + \delta x_1,\ x_2 + \delta x_2, \ldots x_i + \delta x_i, \ldots x_n + \delta x_n$$

$$y_1 + \delta y_1,\ y_2 + \delta y_2, \ldots y_i + \delta y_i, \ldots y_n + \delta y_n$$

$$z_1 + \delta z_1,\ z_2 + \delta z_2, \ldots z_i + \delta z_i, \ldots z_n + \delta z_n.$$

Говоря, что эти двѣ совокупности положеній весьма близки, мы подразумѣваемъ, что разстоянія

$$\overline{M_1M_1'}, \overline{M_2M_2'}, \ldots \overline{M_iM_i'}, \ldots \overline{M_nM_n'} \ldots\ldots \textbf{(557)}$$

суть ничтожно-малыя длины произвольной степени малости; поэтому и проэкціи ихъ на оси координатъ, то есть, величины:

$$\left.\begin{array}{l}\delta x_1,\ \delta x_2,\ldots\delta x_i,\ldots\delta x_n\\ \delta y_1,\ \delta y_2,\ldots\delta y_i,\ldots\delta y_n\\ \delta z_1,\ \delta z_2,\ldots\delta z_i,\ldots\delta z_n\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{(558)}$$

суть также ничтожно-малыя длины произвольной степени малости.

Координаты какъ первой, такъ и второй совокупности положеній точекъ системы должны удовлетворять уравненіямъ связей; напримѣръ, должны быть удовлетворены слѣдующія два равенства

$$\vartheta_1(x_1,\ y_1,\ldots z_n,\ t)=0,\ldots\ldots\ldots\mathbf{(491,1)}$$

$$\vartheta_1(x_1+\delta x_1,\ y_1+\delta y_1,\ldots z_n+\delta z_n,t)=0,\ldots\mathbf{(491,1,}\text{bis)}$$

гдѣ t имѣетъ одно и то же значеніе въ обоихъ уравненіяхъ.

Разложивъ первую часть уравненія (491, 1, bis) по восходящимъ степенямъ величинъ (558), принявъ во вниманіе уравненіе (491, 1) и имѣя въ виду ничтожную малость величинъ (558), должны будемъ заключить, что величины эти должны удовлетворять уравненію

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial\vartheta_1}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial\vartheta_1}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\ldots\ldots\mathbf{(559,1)}$$

при всякихъ значеніяхъ величинъ $t,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ldots z_n$, удовлетворяющихъ уравненіямъ связей (491, 1), ... (491, p).

Для краткости, условимся обозначать первую часть равенства (559, 1) знакомъ $\delta\vartheta_1$.

Такимъ образомъ мы найдемъ, что величины (558) должны удовлетворять p слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\delta\vartheta_1=0,\ \ \delta\vartheta_2=0,\ \ \delta\vartheta_3=0,\ldots\delta\vartheta_p=0\ldots\ldots\mathbf{(559)}$$

при всякихъ значеніяхъ t и при всякихъ такихъ значеніяхъ коорди-

натъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n$, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (491, 1),...(491, p) связей; здѣсь $\delta \vartheta_k$ означаетъ слѣдующую сумму:

$$\delta \vartheta_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(560)}$$

Весьма малыя величины (558), удовлетворяющія уравненіямъ (559), называются *возможными варьяціями координатъ данной системы точекъ*.

Весьма малыя длины (557), проэкціи которыхъ на координатныя оси суть возможныя варьяціи координатъ, могутъ быть названы *возможными варьяціями положеній точекъ системы*; величины и направленія этихъ варьяцій мы будемъ обозначать буквами ε съ надлежащими значками внизу; такимъ образомъ знаки:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_i, \ldots \varepsilon_n$$

будутъ означать величины и направленія возможныхъ варьяцій положеній точекъ

$$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n.$$

Такъ какъ:

$$\delta x_i = \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i, X), \quad \delta y_i = \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i, Y), \quad \delta z_i = \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i, Z), . \mathbf{(561)}$$

то уравненія (559) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i \vartheta_1) \cos(P_i \vartheta_1, \varepsilon_i) = 0, \ldots\ldots \mathbf{(559, 1, bis)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i \vartheta_2) \cos(P_i \vartheta_2, \varepsilon_i) = 0, \ldots\ldots \mathbf{(559, 2, bis)}$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i \vartheta_p) \cos(P_i \vartheta_p, \varepsilon_i) = 0 \ldots\ldots \mathbf{(559, p, bis)}$$

Число варьяцій координатъ равняется числу координатъ.

E) Если всѣ точки системы свободны, не подлежатъ никакимъ преградамъ или связямъ, то всѣ $3n$ варьяцій координатъ *произвольны и независимы*, то есть, каждая изъ нихъ, независимо отъ прочихъ, можетъ имѣть произвольный знакъ и произвольную весьма малую величину; варьяціи положеній свободныхъ точекъ могутъ имѣть, совершенно независимо одна отъ другой, произвольныя направленія и произвольныя весьма малыя величины.

F) Каждая удерживающая связь ограничиваетъ независимость варьяцій координатъ системы точекъ, связывая ихъ между собою однимъ уравненіемъ вида (559); если число этихъ связей есть p, то только $н = (3n - p)$ варьяцій координатъ независимы и произвольны, прочія же p варьяцій координатъ выражаются изъ p уравненій (559) линейными однородными функціями первыхъ. Число независимыхъ варьяцій координатъ равняется числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, то есть, числу степеней свободы системы точекъ.

Существованіе неудерживающей связи:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n, t) \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots \textbf{(492)}$$

между точками системы подчиняетъ варьяціи координатъ нѣкоторому условію при тѣхъ положеніяхъ точекъ, при которыхъ координаты ихъ обращаютъ ϑ въ нуль или въ ничтожно-малую положительную величину.

Когда координаты $x_1, y_1, z_1, \ldots z_n$ удовлетворяютъ равенству $\vartheta = 0$, тогда варьяціи координатъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\vartheta}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\vartheta}{\partial z_i}\delta z_i\right) \geqslant 0; \ldots\ldots \textbf{(562)}$$

когда координаты точекъ, удовлетворяя неравенству $\vartheta > 0$, дѣлаютъ функцію ϑ равною какой либо ничтожно-малой положительной величинѣ α, тогда варьяціи координатъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\delta\vartheta \geqslant (-\alpha);$$

если же координаты точекъ, удовлетворяя неравенству $\text{в} > 0$, дѣлаютъ функцію в равною какой либо не малой положительной величинѣ, то варьяціи координатъ не подлежатъ тогда никакому ограниченію со стороны этой неудерживающей связи.

G) Слѣдовательно, каждая неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, подчиняетъ варьяціи координатъ связываемыхъ ею точекъ условію вида (562); это условіе можно еще представить такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (P_i \text{в}) \cos(P_i \text{в}, \varepsilon_i) \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(562 bis)}$$

Если положенія точекъ системы, имѣющей $н$ степеней свободы, выражаются помощію $н$ независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_н$, то варьяціи послѣднихъ:

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_н \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(563)}$$

независимы и произвольны, а возможныя варьяціи декартовыхъ координатъ точекъ выражаются слѣдующими линейными функціями варьяцій (563):

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_н}\delta q_н \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_н}\delta q_н \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_н}\delta q_н, \end{aligned}\right\} \ldots \textbf{(564, i)}$$

гдѣ i есть каждое изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$.

Если же число s координатныхъ параметровъ болѣе $н$, то тогда варьяціи этихъ параметровъ связаны между собою $(s - н)$ уравненіями линейными и однородными относительно этихъ варьяцій; если уравненія, связывающія координатные параметры между собою, суть уравненія (540), приведенныя въ § 73-мъ, то возможныя варьяціи $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_s$ должны удовлетворять слѣдующимъ $(s - н)$ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}&\delta в_{g+1}((q_1, q_2, \ldots . q_s, t)) = 0\\&\delta в_{g+2}((q_1, q_2, \ldots . q_s, t)) = 0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\delta в_p((q_1, q_2, \ldots . q_s, t)) = 0;\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (565)$$

здѣсь первая часть каждаго изъ уравненій представлена символически; напримѣръ, послѣднее уравненіе слѣдовало бы написать такъ:

$$\frac{\partial в_p}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial в_p}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots . + \frac{\partial в_p}{\partial q_s}\delta q_s = 0; \ldots . \quad (565, p)$$

Возможныя варьяціи декартовыхъ координатъ выразятся линейными функціями возможныхъ варьяцій координатныхъ параметровъ по формуламъ, подобнымъ формуламъ (564).

§ 76. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія точекъ системы.

Помножимъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (517) параграфа 70-го на возможную варьяцію соотвѣтственной координаты, то есть, обѣ части уравненія (517, a, 1) помножимъ на δx_1, обѣ части уравненія (517, b, 1) — на δy_1, и такъ далѣе; полученные результаты сложимъ; получится слѣдующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i''\delta x_i + y_i''\delta y_i + z_i''\delta z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) + \lambda(в_1)\delta в_1 + \ldots . + \lambda(в_p)\delta в_p, \ldots (566)$$

гдѣ $\delta в_1$, $\delta в_2, \ldots .$ суть суммы вида (560) (§ 75).

Если δx_1, $\delta y_1, \ldots . \delta z_n$ суть возможныя варьяціи координатъ точекъ и если всѣ связи — удерживающія, то равенство (566), на основаніи уравненій (559), получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\Big] = 0, \ldots (567)$$

Такимъ образомъ мы можемъ выставить слѣдующее положеніе:

Положеніе А. *Матерьяльныя точки, связанныя какими либо удерживающими преградами и связями, получаютъ, вслѣдствіе дѣйствія приложенныхъ къ нимъ задаваемыхъ силъ, такія ускоренія, которыя удовлетворяютъ равенству (567) при всякихъ возможныхъ значеніяхъ варьяцій координатъ. Возможныя варьяціи координатъ точекъ суть весьма малыя величины* δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, ... δx_i, δy_i, δz_i, ... δx_n, δy_n, δz_n, *удовлетворяющія равенствамъ*:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \ldots \mathbf{(559,1)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \ldots \mathbf{(559,2)}$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0; \ldots \mathbf{(559,p)}$$

$\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_p$ *суть первыя части уравненій*:

$$\mathfrak{s}_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ldots \mathbf{(491,1)}$$

$$\mathfrak{s}_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ldots \mathbf{(491,2)}$$

. . . .

$$\mathfrak{s}_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ldots \mathbf{(491,p)}$$

всѣхъ удерживающихъ преградъ и связей, связывающихъ матерьяльныя точки.

Примѣчаніе. *Слѣдуетъ обратить вниманіе, что равенства* (559) *не заключаютъ частныхъ производныхъ*:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial t}, \ldots \frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial t}.$$

Если въ числѣ связей, связывающихъ точки системы, имѣются *неудерживающія связи*, находящіяся *въ состояніи напряженія*, то изъ уравненія (566) получается иное условіе.

Положимъ, что связи №№ 1 и 2 суть неудерживающія, а всѣ прочія — удерживающія, и что точки системы находятся въ такихъ положеніяхъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ не только равенствамъ:

$$\text{в}_3 = 0,\ \text{в}_4 = 0, \ldots \text{в}_p = 0, \ldots\ldots \textbf{(491, 3, 4,}\ldots\textbf{p)}$$

но также и равенствамъ $\text{в}_1 = 0$, $\text{в}_2 = 0$; тогда возможныя варьяціи координатъ должны удовлетворять равенствамъ:

$$\delta\text{в}_3 = 0,\ \delta\text{в}_4 = 0, \ldots \delta\text{в}_p = 0 \ldots\ \textbf{(559, 3, 4}\ldots\textbf{p)}$$

и кромѣ того, какъ слѣдуетъ изъ пункта (G) § 75-го, условіямъ

$$\delta\text{в}_1 \geqslant 0,\ \delta\text{в}_2 \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(568)}$$

Принявъ во вниманіе, что *множители* $\lambda(\text{в}_1)$, $\lambda(\text{в}_2)$, *соотвѣтствующіе неудерживающимъ связямъ, не могутъ быть отрицательными* (см. § 68), мы можемъ изъ равенства (566) заключить, что ускоренія, получаемыя точками системы, должны удовлетворять равенству (567) при всѣхъ тѣхъ возможныхъ варьяціяхъ координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ (559, 3), ... (559, p) и равенствамъ (559, 1) (559, 2) и что тѣ же ускоренія должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\Big] < 0 \quad \textbf{(569)}$$

при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ (559, 3), ... (559, p) и неравенствамъ:

$$\delta\text{в}_1 > 0,\ \delta\text{в}_2 > 0\,.$$

Если тѣ же *неудерживающія связи* находятся *въ состояніи ослабленія*, то есть, координаты точекъ удовлетворяютъ равенствамъ (491, 3, 4, . . . p) и неравенствамъ $\text{в}_1 > 0$, $\text{в}_2 > 0$, то тогда неудерживающія связи не могутъ оказывать реакцій, величины $\lambda(\text{в}_1)$, $\lambda(\text{в}_2)$ равны нулю, а потому равенство (566) обратится въ равенство вида (567).

Хотя это равенство имѣетъ тотъ же самый видъ, какъ и равенство, полученное при предположеніи, что связи №№ 1 и 2 суть удерживающія,

но значенія заключающихся въ немъ возможныхъ варьяцій координатъ теперь уже менѣе ограничены, а именно:

если точки системы столь мало сошли съ неудерживающихъ связей, что координаты ихъ дѣлаютъ функціи ϑ_1 и ϑ_2 весьма малыми положительными величинами α_1 и α_2, то возможныя варьяціи координатъ должны удовлетворять условіямъ и равенствамъ:

$$\delta\vartheta_1 \geqslant (-\alpha_1),\ \delta\vartheta_2 \geqslant (-\alpha_2),\ \delta\vartheta_3 = 0, \ldots \delta\vartheta_p = 0; \quad \textbf{(570)}$$

если же неудерживающія связи ослабѣли настолько, что ϑ_1 и ϑ_2 суть не весьма малыя положительныя величины, то тогда возможныя варьяціи координатъ, заключающіяся въ равенствѣ (567), должны удовлетворять только равенствамъ (559, 3), ... (559, p).

Мы увидимъ ниже, какое значеніе имѣетъ положеніе A и какую роль оно играетъ въ механикѣ; теперь же мы докажемъ, что одно равенство (567) заключаетъ въ себѣ неявнымъ образомъ всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ, такъ что, если бы мы и не знали еще этихъ дифференціальныхъ уравненій, а положеніе A было бы дано намъ въ качествѣ основнаго принципа механики, то изъ равенства (567) могли бы вывести всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

При доказательствѣ мы будемъ основываться на нижеслѣдующей леммѣ.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ суть перемѣнныя величины, могущія принимать всякія значенія, заключающіяся въ нѣкоторыхъ предѣлахъ: α — въ предѣлахъ $+\alpha_1$ и $(-\alpha_1)$, β — въ предѣлахъ $+\beta_1$ и $(-\beta_1)$, и т. д.; притомъ мы предполагаемъ, что эти перемѣнныя въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны и совершенно независимы одна отъ другой, т. е. мы можемъ дать произвольное значеніе величинѣ α, въ то же время произвольное значеніе величинѣ β, и т. д.

Пусть $A, B, C, \ldots E$ суть какія либо величины, *независящія* отъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$, или какія либо функціи, *незаключающія* перемѣнныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$.

Лемма. *Для того, чтобы равенство:*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots + E\varepsilon = 0 \quad \textbf{(571)}$$

могло существовать при всякихъ значеніяхъ независимыхъ и произвольныхъ величинъ α, β, γ, $\ldots \varepsilon$, *необходимо, чтобы коэфиціенты этихъ величинъ были порознь равны нулю, т. е.*:

$$A=0,\ B=0,\ C=0, \ldots, E=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ величины α, β, γ, $\ldots \varepsilon$ независимы и въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны, то мы можемъ взять $\beta=0$, $\gamma=0, \ldots \varepsilon=0$, а α — произвольнымъ; такъ какъ равенство (571), получающее тогда видъ: $A\alpha=0$, должно имѣть мѣсто для всякихъ значеній α, даже и не равныхъ нулю, то мы должны заключить, что $A=0$, и т. д.

Эта лемма можетъ быть непосредственно примѣнена къ равенству (567) въ томъ случаѣ, когда всѣ точки свободны; тогда всѣ $3n$ варьяцій координатъ произвольны и независимы (см, пунктъ E въ § 75); онѣ входятъ линейнымъ и однороднымъ образомъ въ первую часть этого равенства и, конечно, незаключаются въ тѣхъ выраженіяхъ $(X_1 - mx_1'')$ и проч., на которыя онѣ помножены; слѣдовательно, эти варьяціи могутъ быть тогда разсматриваемы, какъ величины, означенныя чрезъ α, β, γ, $\ldots$ въ леммѣ, и на основаніи этой леммы мы должны заключить, что равенство (567) распадается на $3n$ дифференціальныхъ уравненій (509) параграфа 64-го; это суть дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ точекъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда точки системы связаны между собою связями, вышеприведенная лемма не можетъ быть примѣнена непосредственно къ равенству (567), потому что не всѣ варьяціи координатъ точекъ произвольны и независимы одна отъ другой; но можно первую часть этого равенства преобразовать такъ, что въ ней останутся только независимыя варьяціи и притомъ линейнымъ однороднымъ образомъ; къ преобразованному равенству лемма будетъ примѣнима.

Пусть, по прежнему, система состоитъ изъ n точекъ, связанныхъ p связями; число независимыхъ варьяцій равно $\varkappa=(3n-p)$ (см. пунктъ (F) въ § 75-мъ).

Выбравъ $н$ варьяцій координатъ за независимыя и рѣшивъ уравненія (559, 1, 2 . . . р) относительно остальныхъ p варьяцій, которыя мы назовемъ зависимыми, получимъ выраженія послѣднихъ въ видѣ линейныхъ однородныхъ функцій отъ независимыхъ варьяцій; если въ равенствѣ (567) замѣнимъ зависимыя варьяціи полученными выраженіями, то первая часть его обратится въ однородную линейную функцію отъ $н$ независимыхъ варьяцій координатъ. Примѣнивъ къ преобразованному равенству вышеприведенную лемму, получимъ $н$ дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ: время, координаты, и производныя отъ координатъ по времени, перваго и втораго порядка.

Можно исключить зависимыя варьяціи изъ равенства (567) и изъ уравненій (559, 1, 2, ... р) другимъ путемъ, не рѣшая послѣднихъ уравненій, но пользуясь пріемомъ, предложеннымъ Эйлеромъ и примѣненнымъ Лагранжемъ къ уравненіямъ механики.

Этотъ пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: каждое изъ равенствъ (559, 1, 2, ... р) помножается на нѣкоторый множитель (равенство (559, 1) — на множитель $\lambda(в_1)$, равенство (559, 2) — на множитель $\lambda(в_2)$, и т. д.); по умноженіи, эти равенства слагаются съ равенствомъ (567), такъ что получается равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(A_i\delta x_i + B_i\delta y_i + C_i\delta z_i) = 0, \ldots\ldots \textbf{(566, bis)}$$

гдѣ

$$A_i = X_i - m_i x_i'' + \lambda(в_1)\frac{\partial в_1}{\partial x_i} + \lambda(в_2)\frac{\partial в_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots + \lambda(в_p)\frac{\partial в_p}{\partial x_i},$$

и проч.; множители $\lambda(в_1)$, $\lambda(в_2)$, ... $\lambda(в_p)$ должны быть таковы, чтобы они обращали въ нуль коэфиціенты зависимыхъ варьяцій въ равенствѣ (566 bis).

Послѣ этого въ равенствѣ (566 bis) останутся только независимыя варьяціи, а по вышеприведенной леммѣ и ихъ коэфиціенты должны быть равны нулю; поэтому мы будемъ имѣть: p равенствъ, выражающихъ, что коэфиціенты зависимыхъ варьяцій равны нулю и $н$ ра-

венствъ, выражающихъ, что коэфиціенты независимыхъ варьяцій равны нулю, всего — $3n$ равенствъ вида:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X_i - m_i x_i'' + \lambda(\vartheta_1)\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda(\vartheta_p)\frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_i} \\ 0 &= Y_i - m_i y_i'' + \lambda(\vartheta_1)\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda(\vartheta_p)\frac{\partial \vartheta_p}{\partial y_i} \\ 0 &= Z_i - m_i z_i'' + \lambda(\vartheta_1)\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda(\vartheta_p)\frac{\partial \vartheta_p}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} ,(517,\text{bis})$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

Полученныя равенства суть совокупныя дифференціальныя уравненія (517), составленны, въ параграфѣ 70-мъ.

Доказавъ, что изъ положенія (A) совокупныя дифференціальныя уравненія (517) § 70-го могутъ быть выведены, мы вправѣ смотрѣть на это положеніе, какъ на особую форму выраженія совокупности дифференціальныхъ уравненій движенія системы матерьяльныхъ точекъ. Поэтому мы должны быть теперь увѣрены, что изъ равенства (567) можно получить тѣ же самые результаты, какіе получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, когда произведемъ надъ ними преобразованія, имѣющія цѣлью исключить множители λ или совершить перемѣну координатныхъ параметровъ; часто случается, что требуемые результаты получаются изъ равенства (567) помощію менѣе сложныхъ дѣйствій, чѣмъ изъ самыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Въ слѣдующихъ главахъ мы будемъ имѣть случаи неоднократно пользоваться равенствомъ (567) съ упомянутою цѣлью.

Для того же, чтобы теперь показать примѣръ подобнаго пользованія равенствомъ (567), приводимъ въ § 78-мъ выводъ Лагранжевыхъ уравненій изъ этого равенства; но такъ какъ въ этомъ и въ другихъ подобныхъ преобразованіяхъ мы встрѣчаемся съ выраженіями такими, какъ напримѣръ:

$$\frac{d\delta x}{dt},\ \delta x',\ \frac{d\delta q_1}{dt},\ \delta q_1',$$

то намъ придется предварительно ознакомиться съ ними въ слѣдующемъ 77-мъ параграфѣ.

§ 77. Варьяція скорости точки и скорость варьяціи движущейся точки.

Пусть нѣкоторая движущаяся точка описываетъ траэкторію $MM'M''\ldots$ (черт. 43); M есть положеніе точки въ пространствѣ въ моментъ t, M' — положеніе ея въ моментъ t', M'' — въ моментъ t'', и т. д.

Если положенія, занимаемыя разсматриваемою точкою въ пространствѣ, могутъ получать какія либо варьяціи, то, сообщивъ варьяціи всѣмъ точкамъ траэкторіи $MM'M''\ldots$, мы произведемъ измѣненіе движенія разсматриваемой точки; это измѣненіе мы будемъ называть *варьяціею движенія* этой точки, а получаемое чрезъ варьяцію новое движеніе будемъ называть *измѣненнымъ*.

Пусть $M_1M_1'M_1''\ldots$ (черт. 43) есть траэкторія измѣненнаго движенія, причемъ M_1, M_1', M_1'', ... суть положенія, занимаемыя движущеюся точкою въ моменты t, t', t'', ... при этомъ измѣненномъ движеніи; длины $\overline{MM_1}=\varepsilon$, $\overline{M'M_1'}=\varepsilon'$, $\overline{M''M_1''}=\varepsilon''$, ... суть варьяціи положеній M, M', M'', ...; вообще варьяція каждой точки первоначальной траэкторіи есть весьма малая длина, проведенная изъ этой точки въ соотвѣтственную точку траэкторіи измѣненнаго движенія.

Варьяціи точекъ первоначальной траэкторіи могутъ быть приписаны или отнесены къ движущейся точкѣ и тогда можно сказать, что *варьяція движущейся точки* измѣняетъ свою длину и свое направленіе съ теченіемъ времени, то есть, вмѣстѣ съ движеніемъ точки. Измѣненное движеніе можетъ быть разсматриваемо какъ результатъ соединенія первоначальнаго движенія съ варьяціею движущейся точки.

Какъ первоначальное, такъ и измѣненное движенія должны обладать неотъемлемыми качествами движенія: непрерывностью и послѣдовательностью положеній точки (см. стр. 6 кинематической части); отсюда слѣдуетъ, что *варьяція движущейся точки* должна измѣнять свою длину и свое направленіе съ теченіемъ времени непрерывнымъ образомъ; въ остальныхъ отношеніяхъ варьяція произвольна.

Если изъ какой либо неподвижной точки O (черт. 44) проведемъ длину, равную и параллельную варьяціи движущейся точки, то другой

конецъ этой длины будетъ чертить *непрерывную* кривую линію $EE'E''$, ..., которую можно назвать *годографомъ варьяціи движущейся точки.* (На чертежѣ 44-мъ проведены радіусы векторы OE, OE', OE'', равные и параллельные длинамъ ε, ε', ε'').

Скорость точки, описывающей годографъ варьяціи, мы будемъ называть *скоростью варьяціи движущейся точки* и будемъ обозначать ее слѣдующимъ знакомъ: $v(\varepsilon)$. (На чертежѣ 44-мъ линія $\overline{EV(\varepsilon)}$ изображаетъ величину и направленіе скорости варьяціи въ моментъ t).

Понятно, что въ измѣненномъ движеніи скорость движущейся точки отличается отъ скорости въ первоначальномъ движеніи; (на чертежѣ 43-мъ изображены скорости того и другаго движенія для момента t, а именно: линія $\overline{MV}$ изображаетъ скорости v движущейся точки въ моментъ t при первоначальномъ движеніи, а линія $\overline{M_1V_1}$— скорость v_1 въ тотъ-же моментъ при измѣненномъ движеніи). Геометрическую разность между скоростью измѣненнаго движенія и соотвѣтствующею скоростью первоначальнаго движенія мы будемъ называть *варьяціею скорости* и обозначать знакомъ $\varepsilon(v)$; конечно, соотвѣтствующія скорости суть тѣ, которыя относятся къ одному и тому же моменту времени, такъ что варьяція скорости въ моментъ t есть геометрическая разность между скоростью v_1 въ моментъ t и скоростью v въ тотъ-же моментъ:

$$\overline{\varepsilon(v)} = \overline{v_1} - \overline{v} \dots\dots\dots\dots\dots (572)$$

(На чертежѣ 43-мъ изъ точки M_1 проведена длина $\overline{M_1\beta}$, равная и параллельная скорости $\overline{MV}$, поэтому длина βV_1 изображаетъ величину и направленіе варьяціи скорости въ моментъ t).

Можно доказать, что *скорость варьяціи движущейся точки равна и параллельна варьяціи скорости ея*, то есть, что:

$$\overline{v(\varepsilon)} = \overline{\varepsilon(v)} \dots\dots\dots\dots\dots (573)$$

Для доказательства мы воспользуемся тѣмъ пріемомъ, который мы употребили при доказательствѣ параллелограмма скоростей на стр. 208 кинематической части.

Проведемъ изъ точки M_1 (черт. 45) длину $M_1\mathfrak{m}'$, равную и параллельную длинѣ MM' и проведемъ линіи изъ M_1, чрезъ точки M_1' и $\mathfrak{m}'$, и изъ $\mathfrak{m}'$ чрезъ точку M_1'; въ образовавшемся треугольникѣ $M_1M_1'\mathfrak{m}'$ сторона $M_1\mathfrak{m}'$ будетъ равна и параллельна хордѣ MM' и сторона $\mathfrak{m}'M_1'$ равна и параллельна хордѣ EE' годографа варьяціи скорости.

Отложимъ по проведеннымъ линіямъ слѣдующія длины, пропорціональныя сторонамъ вышесказаннаго треугольника:

$$\overline{M_1A_1} = \frac{\overline{M_1M_1'}}{\vartheta}, \quad \overline{M_1A} = \frac{\overline{M_1\mathfrak{m}'}}{\vartheta}, \quad \overline{\mathfrak{m}'Q} = \frac{\overline{\mathfrak{m}'M_1'}}{\vartheta},$$

гдѣ $\vartheta = (t' - t)$; соединивъ точки A и A_1 прямою линіею, получимъ треугольникъ M_1A_1A, подобный треугольнику $M_1M_1'\mathfrak{m}'$, а потому длина AA_1 равна и параллельна длинѣ $\mathfrak{m}'Q$.

Слѣдовательно, длина $\mathfrak{m}'Q$ имѣетъ величину и направленіе геометрической разности между длинами M_1A_1 и M_1A.

Уменьшая затѣмъ величину промежутка времени ϑ приближеніемъ момента t' къ моменту t и разсуждая такъ, какъ на стр. 209 кинематической части, мы заключимъ, что въ предѣлѣ (при неограниченномъ приближеніи ϑ къ нулю) длина $\mathfrak{m}'Q$ обращается въ длину $\overline{MQ(\varepsilon)}$ (черт. 43), равную и параллельную скорости $\overline{EV(\varepsilon)}$ (черт. 44) годографа варьяціи, длина M_1A_1 — въ скорость $\overline{M_1V_1}$ измѣненнаго движенія и длина M_1A — въ длину $\overline{M_1\beta}$ (черт. 43), равную и параллельную скорости $\overline{MV}$ первоначальнаго движенія; а такъ какъ длина $\mathfrak{m}'Q$ при всякихъ значеніяхъ ϑ равна и параллельна длинѣ AA_1, даже и тогда, когда t' совпадетъ съ t, то отсюда видно, что скорость варьяціи есть геометрическая разность между скоростью измѣненнаго и скоростью первоначальнаго движенія, т. е., говоря короче: *скорость варьяціи равна и параллельна варьяціи скорости*.

Прежде чѣмъ извлечь слѣдствія изъ этой теоремы, мы должны обратить вниманіе на то обстоятельство, что варьяція положенія точки можетъ быть также названа варьяціею радіуса вектора точки, такъ какъ ее можно разсматривать, какъ геометрическую разность

между радіусами векторами измѣненнаго и первоначальнаго положеній точки.

Знакъ δ, стоящій передъ какою либо функціею отъ координатъ какихъ либо точекъ, мы употребляемъ и будемъ употреблять для обозначенія приращенія, получаемаго значеніемъ этой функціи при варьированіи положеній этихъ точекъ; такъ, напримѣръ, δx или, что то же самое, $\delta(r\cos(r,X))$ означаетъ приращеніе, получаемое проэкціею на ось $X^{овъ}$ радіуса вектора точки при варьированіи положенія точки, т. е., алгебрическую разность между проэкціею радіуса вектора r_1 измѣненнаго положенія точки и проэкціею радіуса вектора r начальнаго положенія ея, т. е.:

$$\delta x = \delta(r\cos(r,X)) = r_1\cos(r_1,X) - r\cos(r,X).$$

Если условимся обозначать варьяцію положенія точки знакомъ $\varepsilon(r)$ (такъ какъ это есть варьяція радіуса вектора), то равенства (561) параграфа 75-го получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= \delta(r\cos(r,X)) = \varepsilon(r)\cos(\varepsilon(r),X),\\ \delta y &= \delta(r\cos(r,Y)) = \varepsilon(r)\cos(\varepsilon(r),Y),\\ \delta z &= \delta(r\cos(r,Z)) = \varepsilon(r)\cos(\varepsilon(r),Z).\end{aligned}\right\}\ldots(\mathbf{561},\text{bis})$$

(Вмѣсто $\varepsilon(r)$ мы будемъ иногда писать просто ε, по прежнему).

На основаніи этихъ замѣчаній изъ приведенной теоремы могутъ быть выведены слѣдующія заключенія.

1) Относительно проэкцій величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на неподвижныя оси. Замѣнивъ въ равенствахъ (561, bis) радіусъ векторъ r — скоростью v, будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned}\delta x' &= \delta(v\cos(v,X)) = \varepsilon(v)\cos(\varepsilon(v),X)\\ \delta y' &= \delta(v\cos(v,Y)) = \varepsilon(v)\cos(\varepsilon(v),Y)\\ \delta z' &= \delta(v\cos(v,Z)) = \varepsilon(v)\cos(\varepsilon(v),Z)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\mathbf{574})$$

Съ другой стороны, проэкціи скорости $v(\varepsilon)$ на неподвижныя оси координатъ выражается такъ:

$$\left.\begin{aligned} v(\varepsilon)\cos\big(v(\varepsilon), X\big) &= \frac{d[\varepsilon(r)\cos\big(\varepsilon(r), X\big)]}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}, \\ v(\varepsilon)\cos\big(v(\varepsilon), Y\big) &= \frac{d[\varepsilon(r)\cos\big(\varepsilon(r), Y\big)]}{dt} = \frac{d\delta y}{dt}, \\ v(\varepsilon)\cos\big(v(\varepsilon), Z\big) &= \frac{d[\varepsilon(r)\cos\big(\varepsilon(r), Z\big)]}{dt} = \frac{d\delta z}{dt}. \end{aligned}\right\}\ldots (575)$$

Такъ какъ $v(\varepsilon)$ равна и параллельна $\varepsilon(v)$, то и проэкціи ихъ на какое бы то ни было направленіе равны между собою, а потому изъ равенствъ (574) и (575) слѣдуетъ:

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\delta x}{dt}, \quad \delta\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d\delta y}{dt}, \quad \delta\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d\delta z}{dt} \ldots\ldots (576)$$

2) Относительно проэкцій величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на направленіе, измѣняющееся одновременно съ движеніемъ точки.

Мы проведемъ это направленіе U черезъ начало координатъ и отложимъ на немъ, отъ начала же координатъ, длину равную единицѣ; точку, находящуюся на концѣ отложенной длины, мы обозначимъ чрезъ $M(U)$, радіусъ векторъ ея — чрезъ (1_U) и скорость ея знакомъ $v(1_U)$ или v_U.

Кромѣ того, мы еще предположимъ, что законъ вращенія направленія U подлежитъ варьированію; обозначимъ варьяцію подвижной точки $M(U)$ или радіуса вектора (1_U) знакомъ $\varepsilon(1_U)$, или просто ε_U; притомъ мы должны имѣть въ виду, что длина радіуса вектора (1_U) остается постоянно равною единицѣ также и при варьированіи.

Проэкціи величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на направленіе U равны между собою:

$$\varepsilon(v)\cos\big(\varepsilon(v), U\big) = v(\varepsilon)\cos\big(v(\varepsilon), U\big) \ldots\ldots\ldots (577)$$

По формулѣ (14) стр. 30 кинематической части проэкція скорости на вращающееся направленіе выражается такъ:

$$v(\varepsilon)\cos\Big(v(\varepsilon), U\Big) = \frac{d[\varepsilon(r)\cos\big(\varepsilon(r), U\big)]}{dt} - \varepsilon(r)v_U\cos\Big(\varepsilon(r), v_U\Big) \ldots (578)$$

Съ другой стороны, проэкція варьяціи скорости на подвижное направленіе U можетъ быть выражена, съ помощію формулъ (574), такъ:

$$\varepsilon(v)\cos\Big(\varepsilon(v), U\Big) = \cos(U,X)\delta\Big(v\cos(v,X)\Big) +$$

$$+ \cos(U,У)\delta\Big(v\cos(v,У)\Big) + \cos(U,Z)\delta\Big(v\cos(v,Z)\Big); \quad \dots \quad \mathbf{(579)}$$

примѣнивъ равенства (561 bis) къ варьяціи точки $M(U)$ и принявъ во вниманіе, что радіусъ векторъ (1_U) этой точки равенъ единицѣ, получимъ:

$$\delta\Big(\cos(U,X)\Big) = \varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,X), \quad \delta\Big(\cos(U,У)\Big) = \varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,У),$$

$$\delta\Big(\cos(U,Z)\Big) = \varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,Z);$$

изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$v\cos(v,X)\delta\Big(\cos(U,X)\Big) + v\cos(v,У)\delta\Big(\cos(U,У)\Big) +$$

$$+ v\cos(v,Z)\delta\Big(\cos(U,Z)\Big) = v\varepsilon_U\cos(v,\varepsilon_U) \dots\dots \mathbf{(580)}$$

По ничтожной малости варьяцій, алгебрическая варьяція δ произведенія двухъ величинъ выражается, подобно дифференціалу произведенія, формулою:

$$\delta(\alpha\beta) = \alpha\delta\beta + \beta\delta\alpha,$$

а потому изъ формулъ (579) и (580) можемъ получить слѣдующую:

$$\varepsilon(v)\cos\Big(\varepsilon(v), U\Big) = \delta\Big(v\cos(v,U)\Big) - v\varepsilon_U\cos(v,\varepsilon_U) \quad \dots \quad \mathbf{(581)}$$

Изъ равенствъ (577), (578) и (581) получаемъ слѣдующее равенство, которымъ мы воспользуемся въ послѣдующихъ главахъ:

$$\delta\Big(v\cos(v,U)\Big) = \frac{d(\varepsilon\cos(\varepsilon,U))}{dt} - \varepsilon v_U\cos(v_U,\varepsilon) + v\varepsilon_U\cos(\varepsilon_U,v), \,. \mathbf{(582)}$$

здѣсь ε поставлено вмѣсто $\varepsilon(r)$.

3) Относительно величинъ $\delta q'_k$ и $\frac{d\delta q_k}{dt}$.

Положимъ, что какіе либо координатные параметры $q_1, q_2, \ldots q_n$ системы точекъ выражены функціями времени и декартовыхъ координатъ системы; взявъ полную производную по времени отъ выраженія:

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial q_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial q_k}{\partial z_i}\delta z_i\right),$$

взявъ затѣмъ алгебрическую варьяцію δ отъ выраженія:

$$q'_k = \frac{\partial q_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial q_k}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial q_k}{\partial z_i}z_i'\right)$$

и сравнивъ полученные результаты, мы найдемъ, что, на основаніи равенствъ (576), должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства:

$$\delta\left(\frac{dq_k}{dt}\right) = \frac{d\delta q_k}{dt}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(583, k)}$$

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

§ 78. Выводъ дифференціальныхъ уравненій Лагранжа изъ равенства (567).

Члены равенства (567), заключающіе ускоренія, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$m_i x_i'' \delta x_i = \frac{d(m_i x_i' \delta x_i)}{dt} - m_i x_i' \frac{d\delta x_i}{dt}.$$

Сдѣлавъ такое преобразованіе во всѣхъ подобныхъ членахъ этого равенства, замѣнимъ производныя отъ варьяцій δx_i, δy_i, δz_i — варьяціями: $\delta x_i'$, $\delta y_i'$, $\delta z_i'$, на основаніи равенствъ (576); тогда равенство (567) получитъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) + \delta T - \frac{dR}{dt} = 0, . \textbf{(567, A)}$$

гдѣ:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i).$$

Замѣнимъ варьяціи декартовыхъ координатъ выраженіями (564) § 75-го, а затѣмъ, въ выраженіи R, производныя отъ декартовыхъ координатъ по $q_1, q_2, \ldots q_n$ замѣнимъ производными отъ x_i', y_i', z_i' по $q_1', q_2', \ldots q_n'$, основываясь на формулахъ:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k},$$

выведенныхъ въ § 73-мъ; тогда равенство (567, A) получитъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta q_k + \delta T - \frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} = 0, \ldots\ldots \quad (584)$$

гдѣ Q_k выражаются формулами (532) § 73-го, а p_k есть частная производная отъ T по q_k' (см. (539) § 73); при этомъ предполагается, что T выражено формулою (535, a) § 73-го.

Затѣмъ развернемъ: выраженіе δT и производную по времени отъ суммы, заключающей величины p_k:

$$\delta T = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k'$$

$$\frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dp_k}{dt} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{d \delta q_k}{dt};$$

принявъ же во вниманіе равенства (583), найдемъ, что равенство (584) (то есть (567)) получаетъ, послѣ всѣхъ этихъ преобразованій, слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{dp_k}{dt} \right) \delta q_k = 0 \ldots\ldots \quad (585)$$

Такъ какъ всѣ варьяціи $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$ произвольны и незави-

симы, то изъ равенства (585), на основаніи леммы, приведенной въ § 76-мъ, получимъ уравненія Лагранжа.

§ 79. Положенія равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ. Уравненія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ точекъ. Условія равновѣсія задаваемыхъ силъ.

Когда всѣ матерьяльныя точки данной системы находятся одновременно въ такихъ положеніяхъ, что приложенныя къ каждой точкѣ задаваемыя силы и реакціи связей взаимно-уравновѣшиваются, тогда говорятъ, что *система точекъ находится въ положеніи равновѣсія.*

Можно выразиться иначе: *когда ускоренія всѣхъ точекъ системы равны нулю, тогда система находится въ положеніи равновѣсія*; подъ словами „положеніе системы" мы подразумѣваемъ совокупность одновременныхъ положеній всѣхъ точекъ системы.

При такомъ положеніи системы, дифференціальныя уравненія движенія (517) § 70 обратятся въ совокупныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X_i + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial x_i} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial x_i} \\ 0 &= Y_i + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial y_i} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial y_i} \\ 0 &= Z_1 + \lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial z_i} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad . . (586, \text{i})$$

гдѣ i есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

Эти уравненія, число которыхъ равно $3n$, т. е., утроенному числу точекъ системы, называются *уравненіями равновѣсія силъ и реакцій, приложенныхъ къ матерьяльнымъ точкамъ системы.*

Если число p связей менѣе утроеннаго числа точекъ системы, то, исключивъ изъ $3n$ уравненій (586) множители $\lambda(\mathfrak{s}_1)$, $\lambda(\mathfrak{s}_2), \ldots \lambda(\mathfrak{s}_p)$, получимъ $\varkappa = 3n - p$ уравненій.

Эти новыя уравненія выражаютъ тѣ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы система точекъ могла

имѣть положеніе равновѣсія; поэтому мы будемъ называть эти n уравненій *условіями равновѣсія задаваемыхъ силъ*, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ точекъ.

Если задаваемыя силы выражаются функціями времени и координатъ точекъ, то изъ n условій равновѣсія и изъ p уравненій связей опредѣлятся, для каждаго момента времени, координаты всѣхъ точекъ въ положеніи равновѣсія системы; если опредѣленныя такимъ образомъ значенія $3n$ координатъ окажутся независящими отъ времени, т. е., постоянными, то выражаемое этими координатами положеніе равновѣсія системы можетъ быть также и положеніемъ ея покоя.

Подробному разсмотрѣнію положеній равновѣсія системы точекъ мы посвятимъ далѣе особую главу; но все то, что уже сказано и что будетъ сказано въ настоящей главѣ относительно положеній, уравненій и условій равновѣсія системы точекъ, необходимо для объясненія статическаго значенія дифференціальныхъ уравненій движенія и равенства (567).

§ 80. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность уравненій равновѣсія.

Это равенство получится изъ равенства (567), если въ послѣднемъ положить равными нулю ускоренія всѣхъ точекъ системы; получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0 \ldots\ldots \mathbf{(567, b)}$$

Такъ что, аналогично положенію (A) § 76-го, можемъ выставить слѣдующее:

Положеніе B. *Система, состоящая изъ n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ между собою p удерживающими связями:* **(491, 1), (491, 2)....(491, p)** (§ 76), ***находится въ положеніи равновѣсія при условіи, чтобы приложенныя къ точкамъ задаваемыя силы удовлетворяли равенству*** (567, b) ***при всякихъ возможныхъ совокупностяхъ варьяцій координатъ; каждая возможная совокупность варьяцій координатъ должна удовлетворять равенствамъ*** (559, 1), (559. 2),....(559, p) (§ 76).

Если нѣкоторыя изъ связей — неудерживающія (положимъ, это суть связи №№ 1 и 2), то при тѣхъ положеніяхъ равновѣсія системы, при которыхъ неудерживающія связи находятся въ состояніи напряженія, задаваемыя силы должны удовлетворять равенству (567, b) при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ:

$$\delta s_1 = 0,\ \delta s_2 = 0,\ \delta s_3 = 0, \ldots \delta s_p = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ задаваемыя силы должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) < 0 \ldots\ldots \textbf{(569, b)}$$

при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій координатъ, которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\delta s_1 > 0,\ \delta s_2 > 0,\ \delta s_3 = 0, \ldots \delta s_p = 0.$$

Поступая такимъ же образомъ, какъ и въ § 76-мъ, мы убѣдимся, что изъ равенства (567, b) и положенія (B) можно вывести уравненія равновѣсія (586) или условія равновѣсія, смотря по желанію; поэтому можно смотрѣть на положеніе (B), какъ на особую форму выраженія уравненій или условій равновѣсія. Впослѣдствіи мы будемъ пользоваться равенствомъ (567, b) и будемъ извлекать изъ него тѣ же самые результаты, какіе получаются изъ уравненій равновѣсія.

§ 81. Такъ называемыя начала: возможныхъ перемѣщеній и д'Аламбера.

Обращаясь теперь къ общепринятому толкованію равенствъ (567, b), (567) и дифференціальныхъ уравненій движенія (517), должно сдѣлать оговорку, что эти толкованія имѣютъ, въ нѣкоторыхъ пунктахъ, нѣсколько метафизическій характеръ.

Замѣнивъ варьяціи координатъ выраженіями (561) § 75-го и означивъ черезъ F_i равнодѣйствующую задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i, можемъ выразить равенство (567, b) такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i F_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(567, c)}$$

заключающіяся здѣсь возможныя варьяціи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ положеній точекъ должны удовлетворять равенствамъ (559, 1, bis), (559, 2, bis), ...(559, p, bis) (§ 75).

Матерьяльныя точки, образующія систему, могутъ совершать весьма различныя движенія при прохожденіи черезъ занимаемыя ими положенія; пусть $Ds_1, Ds_2, \ldots Ds_n$ суть элементы путей, пробѣгаемые точками въ теченіи ничтожно-малаго промежутка времени $\mathfrak{I}$ при какомъ либо возможномъ движеніи системы черезъ занимаемое ею положеніе; эти элементы путей, которые мы будемъ называть *возможными перемѣщеніями точекъ*, должны удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$D\vartheta_1 = 0,\ D\vartheta_2 = 0, \ldots D\vartheta_p = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(587)}$$

гдѣ:

$$D\vartheta_k = \sum_{i=1}^{i=n} Ds_i (P_i \vartheta_k) \cos(P_i \vartheta_k, Ds_i) + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial t} \mathfrak{I}.$$

Сравнивъ эти равенства съ равенствами (559, bis) § 75-го можемъ судить, что *если уравненія всѣхъ связей*, которымъ подчинена система точекъ, *не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то всѣ возможныя варьяціи положеній точекъ могутъ служить возможными перемѣщеніями ихъ и обратно.*

Положимъ, что въ самомъ дѣлѣ уравненія всѣхъ связей системы не заключаютъ времени, тогда въ равенствѣ (567, c) варьяціи могутъ быть замѣнены перемѣщеніями и равенство это получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i Ds_i \cos(F_i, Ds_i) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(567, d)}$$

Каждый изъ членовъ первой части этого равенства выражаетъ величину работы задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ одной изъ точекъ системы, на протяженіи возможнаго перемѣщенія этой точки (см. § 25, стр. 107), а потому въ сказанныхъ случаяхъ положеніе (B) можетъ быть высказано въ слѣдующей формѣ:

Положеніе (B, 1). *Если система n матерьяльныхъ точекъ,*

связанныхъ p удерживающими независящими отъ времени связями, находится въ положеніи равновѣсія и совершаетъ какое либо возможное движеніе, то сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ равна нулю, каково бы ни было возможное движеніе системы и каковы бы ни были возможныя перемѣщенія; всякая совокупность одновременныхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворяетъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i s_1) \cos(P_i s_1, Ds_i) = 0 \ldots\ldots \quad (588, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i s_2) \cos(P_i s_2, Ds_i) = 0 \ldots\ldots \quad (588, 2)$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i s_p) \cos(P_i s_p, Ds_i) = 0 \ldots\ldots \quad (588, p)$$

Обратно, всякое положеніе системы, при которомъ задаваемыя силы удовлетворяютъ равенству (567, d) *при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній (удовлетворяющихъ равенствамъ* (588)*), есть положеніе равновѣсія.*

Если въ числѣ связей есть неудерживающія связи, то, для тѣхъ возможныхъ перемѣщеній, при которыхъ точки системы сходятъ съ одной или съ нѣсколькихъ связей, сумма работъ задаваемыхъ силъ должна быть менѣе нуля, когда положеніе системы есть положеніе равновѣсія.

Это положеніе извѣстно подъ именемъ *начала возможныхъ перемѣщеній*. Оно носитъ названіе „начала“ или „принципа“ потому, что, принявъ его за основаніе въ качествѣ основнаго начала механики, можно изъ него вывести уравненія равновѣсія системы точекъ, связанныхъ удерживающими независящими отъ времени связями, а слѣдовательно и всю статику такихъ системъ.

Существованіе этого принципа было впервые подмѣчено въ теоріи простыхъ машинъ: рычага, блоковъ, ворота и наклонной плоскости, гдѣ этотъ принципъ почти очевиденъ, если не принимать въ разсчетъ тренія и разсматривать простые механизмы какъ идеальныя связи; но нельзя утверждать, чтобы этотъ принципъ былъ самъ по себѣ, безъ доказательства, очевиденъ для всякихъ связей, независящихъ отъ времени. Поэтому въ тѣхъ курсахъ и сочиненіяхъ по механикѣ, въ которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній выставляется какъ основное положеніе статики системы несвободныхъ точекъ, является надобность доказать это начало независимо отъ общихъ уравненій равновѣсія системы; извѣстны многія такія доказательства, придуманныя различными авторами; они состоятъ, по большей части, или въ томъ, что предполагаемыя связи замѣняются другими простѣйшими связями, для которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній очевидно, или въ томъ, что, чрезъ присоединеніе новыхъ простѣйшихъ связей, система точекъ приводится къ системѣ простыхъ машинъ. Въ слѣдующемъ параграфѣ будутъ приведены нѣкоторыя изъ доказательствъ подобнаго рода.

Если уравненія связей заключаютъ время, то равенства (587) отличаются отъ равенствъ (559), а потому тогда возможныя совокупности варьяцій положеній точекъ не могутъ служить возможными перемѣщеніями точекъ.

Напримѣръ, возможныя варьяціи положеній точекъ m_1 и m_2, связанныхъ связью, упомянутою на стр. 307, должны удовлетворять равенству:

$$\varepsilon_1 \cos(r_{21}, \varepsilon_1) - \varepsilon_2 \cos(r_{21}, \varepsilon_2) = 0,$$

между тѣмъ, какъ возможныя перемѣщенія этихъ точекъ должны удовлетворять равенству:

$$Ds_1 \cos(r_{21}, Ds_1) - Ds_2 \cos(r_{21}, Ds_2) + (l_0 - a)ke^{-kt} = 0,$$

а потому не можетъ быть, чтобы ε_1 равнялось Ds_1 и, въ то же время, ε_2 было равно Ds_2.

Въ этихъ случаяхъ правильнѣе было бы называть положеніе (B) на-

чаломъ возможныхъ варьяцій положеній точекъ; оно можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Положеніе В. Если система n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ p удерживающими связями, находится въ положеніи равновѣсія, то сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ варьяцій положеній точекъ равна нулю, каковы бы ни были возможныя варьяціи; всякая совокупность возможныхъ варьяцій положеній точекъ удовлетворяетъ равенствамъ: (559, 1, bis), (559, 2, bis) . . . . (559, p, bis).

Обратно, всякое положеніе системы, удовлетворяющее равенству (567, c) при всякихъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій положеній точекъ, есть положеніе равновѣсія.

Въ параграфѣ 62-мъ на стр. 320—321 было упомянуто, что геометрическія разности $u_1, u_2, \ldots . u_n$ между каждыми двумя совокупностями возможныхъ скоростей точекъ должны удовлетворять равенству (505); точно также геометрическія разности между двумя совокупностями возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворяютъ тѣмъ же самымъ равенствамъ (559), которымъ удовлетворяютъ возможныя варьяціи положеній; поэтому послѣднія могутъ быть названы геометрическими разностями между возможными перемѣщеніями точекъ системы.

На иностранныхъ языкахъ начало возможныхъ перемѣщеній называется такъ: Le principe des vitesses virtuelles, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, the principle of virtual velocities; въ слѣдующемъ параграфѣ будетъ объяснено происхожденіе этого термина и значеніе его.

Говоря о положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, мы можемъ выразиться такимъ образомъ:

При положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ, взаимно-уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей.

Такую форму выраженія мы будемъ употреблять, когда найдемъ нужнымъ, взамѣнъ того выраженія, которое помѣщено въ началѣ этого параграфа.

Обращаемся теперь къ толкованію дифференціальныхъ уравненій движенія въ смыслѣ уравненій равновѣсія.

Вообразимъ себѣ, что къ каждой матерьяльной точкѣ, кромѣ задаваемыхъ силъ и реакцій связей, приложена сила, прямопротивоположная ускоренію ея и равная произведенію изъ массы точки на ускореніе ея; эту воображаемую силу называютъ *силою инерціи*; проэкція на оси ко-

ординатъ силы инерціи J_i, которую мы воображаемъ себѣ приложенною къ точкѣ m_i, суть:

$$\left.\begin{aligned} J_i\cos(J_i, X) &= -m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} \\ J_i\cos(J_i, Y) &= -m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} \\ J_i\cos(J_i, Z) &= -m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (589, \text{I})$$

Вообразивъ себѣ такія силы и сравнивъ дифференціальныя уравненія движенія (517 bis) стр. 389 съ уравненіями равновѣсія (586), стр. 398 можемъ придти къ мысли разсматривать дифференціальныя уравненія движенія какъ уравненія равновѣсія силъ: задаваемыхъ, реакцій связей и силъ инерціи; въ самомъ дѣлѣ, дифференціальныя уравненія движенія точки m_i выражаютъ, что *равнодѣйствующая F_i всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равнодѣйствующая R_i реакцій всѣхъ тѣхъ связей, которымъ подчинена эта точка, и сила инерціи J_i этой точки взаимно уравновѣшиваются*, т. е.:

$$\overline{F_i} + \overline{J_i} + \overline{R_i} = 0 \dots\dots\dots\dots (517, \text{B})$$

Примѣчаніе. Фиктивная *сила инерціи* не имѣетъ ничего общаго со *свойствомъ инерціи матеріи* и эти понятія не должно смѣшивать.

Воображаемая сила $Д_i$, равная и прямопротивоположная силѣ инерціи, называется *движущею* или *эффективною силою* (Effectivkraft), а сила $П_i$, равная и прямопротивоположная равнодѣйствующей R_i реакцій связей, называется *потерянною силою*.

Уравненія (517, bis) стр. 389 можно еще выразить такъ:

$$\overline{F_i} = \overline{Д_i} + \overline{П_i}, \dots\dots\dots\dots (517, \text{C})$$

т. е., *равнодѣйствующая всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ каждой изъ матерьяльныхъ точекъ системы, разлагается на двѣ составляющія: на потерянную силу, которая уравновѣшивается съ реакціями связей, и на движущую силу, которая сообщаетъ матерьяльной точкѣ то самое ускореніе, какое бы она сообщила свободной точкѣ той же массы.*

Кромѣ того, уравненія (517, bis) можно еще представить такъ:

$$\overline{П_i} + \overline{R_i} = 0, \dots\dots\dots\dots (517, \text{D})$$

потому что геометрическая разность между силою F_i и движущею силою есть сила потерянная, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} X_i - m_i x_i'' &= \Pi_i \cos(\Pi_i, X) \\ Y_i - m_i y_i'' &= \Pi_i \cos(\Pi_i, Y) \\ Z_i - m_i z_i'' &= \Pi_i \cos(\Pi_i, Z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(590, I)}$$

а уравненія равновѣсія (586) можно представить такъ:

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(586, D)}$$

Сравнивъ выраженія (517, D) съ выраженіями (586, D) и припомнивъ послѣднюю форму словеснаго выраженія уравненій равновѣсія, а именно слѣдующую: «при положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ, взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей», можемъ сказать слѣдующее относительно движенія системы точекъ:

Положеніе A_1. *Во всякій моментъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ, потерянныя силы всѣхъ точекъ взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей.*

Это положеніе, данное д'Аламберомъ въ его Traité de Dynamique (1743), называется *началомъ или принципомъ д'Аламбера.* Изъ соединенія начала д'Аламбера съ началомъ возможныхъ варьяцій или перемѣщеній получается положеніе A, изъ котораго могутъ быть выведены дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, какъ было показано въ § 76-мъ на стр. 388—389.

§ 82. Нѣкоторыя свѣдѣнія относительно исторіи открытія начала возможныхъ перемѣщеній и нѣкоторые способы непосредственнаго доказательства этого начала.

Несомнѣнно, что практическое знаніе статики и употребленіе нѣкоторыхъ простыхъ машинъ были извѣстны въ глубокой древности; объ этомъ свидѣтельствуютъ съ одной стороны нѣкоторыя указанія древнихъ авторовъ, съ другой — остатки громадныхъ и искусно возведенныхъ построекъ древняго Египта, Индіи и древней Греціи, при возведеніи которыхъ необходимо было доставлять издалека и поднимать на большія высоты огромныя сплошныя массы, что не могло быть выполнено безъ посредства механическихъ приспособленій.

Сомнительно, однако, чтобы въ древности существовала правильная теорія статики; по крайней мѣрѣ правильныя теоретическія разсужденія въ первый разъ встрѣчаются только у Архимеда.

По этой причинѣ сочиненія Архимеда считаются древнѣйшими сочиненіями по механикѣ и его называютъ основателемъ этой науки; однако, дошедшіе до насъ остатки сочиненій этого великаго геометра относятся только къ статикѣ (теорія рычага, равновѣсіе плавающихъ тѣлъ, положенія центровъ инерціи однородныхъ площадей).

Первые слѣды изученія вопросовъ динамики встрѣчаются въ первый разъ 17 столѣтій спустя послѣ Архимеда, а именно въ трудахъ знаменитаго художника Леонардо-да-Винчи (родившагося въ 1452 году), который вполнѣ правильно понималъ нѣкоторые изъ законовъ паденія тѣлъ по наклонной плоскости и законъ возрастанія скорости при этомъ или при свободномъ паденіи [1]). Повидимому Италія въ XV и XVI столѣтіяхъ была мѣстомъ рожденія динамики и возрожденія механики. Бенедетти, умершій въ 1570 году, уже зналъ, что скорость, пріобрѣтенная свободно-падающимъ тѣломъ, не зависитъ отъ массы тѣла; онъ зналъ также о существованіи центробѣжной силы и о томъ, что оторвавшаяся отъ вращающагося тѣла часть его продолжаетъ двигаться по касательной; ему же принадлежитъ первое опредѣленіе понятія о моментѣ вокругъ оси (virtus movens) [2]). Открытіе начала возможныхъ перемѣщеній принадлежитъ, по словамъ Лагранжа [3]), вѣроятно Гвидо Убальди [4]) (1545 — 1607), который подмѣтилъ это начало въ рычагѣ и въ подвижныхъ блокахъ и показалъ, что, основываясь на этомъ принципѣ, можно вывести законы равновѣсія рычага, блоковъ и вòрота. Галилей (1564 — 1642) [5]) распро-

---

[1]) Почерпнуто изъ сочиненія Дюринга: Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Dühring. 1872; Дюрингъ же ссылается (стр. 13—16) на сочиненія:

Venturi, Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci Paris, 1797.

Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, 4 vols. Paris, 1838—41.

[2]) Также изъ сочиненія Дюринга, который цитируетъ (стр. 17):

Benedicti Divers. speculat. Taurini, 1585.

[3]) Mecanique Analytique par Lagrange стр. 18, тома I-го, третьяго изданія.

[4]) Guido Ubaldi marquis del Monte, Mechanicorum liber. Pisauri. 1577.

[5]) Главнѣйшія сочиненія Галилея по механикѣ суть:

Discorsi intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quello si muovono. 1612 (по гидромеханикѣ).

Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo. 1632.

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. 1638.

странилъ это начало на остальныя простыя машины, основанныя на принципѣ наклонной плоскости, и разсматривалъ его какъ основной принципъ законовъ равновѣсія всѣхъ машинъ (во 2-мъ предложеніи III-го діалога сочиненія: Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze, 1638 и въ сочиненіи: Della scienza meccanica).

Галилея называютъ основателемъ динамики; ему мы обязаны открытіемъ начала инерціи, изслѣдованіями надъ паденіемъ тѣлъ, открытіемъ законовъ движенія свободно-падающихъ тѣлъ и тѣлъ, брошенныхъ наклонно къ горизонту, открытіемъ начала независимости движеній, изслѣдованіемъ паденія тѣлъ по наклонной плоскости, открытіемъ соотношенія между длинами и временами качаній маятниковъ; кромѣ того, изъ трудовъ его по статикѣ замѣчательны: дополненіе къ Архимедову доказательству принципа рычага, статика тяжелаго тѣла на наклонной плоскости и гидромеханика, основанная на началѣ возможныхъ перемѣщеній.

Начало возможныхъ перемѣщеній въ примѣненіи къ двумъ силамъ, взаимно-уравновѣшивающимся чрезъ посредство какого либо простаго механизма, выражено Галилеемъ въ формѣ положенія, что моменты обѣихъ силъ при равновѣсіи системы должны быть равны по величинѣ и противоположны по знаку. Подъ словомъ «моментъ» (momentum, movimentum) Галилей подразумѣваетъ (какъ объясняютъ тѣ, которые толкуютъ его сочиненія) произведеніе изъ силы и проэкціи возможной скорости на направленіе силы; это значеніе слова «моментъ» было удержано Валлисомъ въ его механикѣ, изданной въ 1669 году, въ которой статика механизмовъ также выводится изъ начала возможныхъ перемѣщеній.

Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что до Галилея понятіе о величинѣ силы не было еще установлено и поэтому онъ затруднялся дать сжатое и вполнѣ ясное понятіе о значеніи того, что онъ подразумѣваетъ подъ словомъ «моментъ»; взамѣнъ опредѣленія, котораго онъ дать не могъ, Галилей поясняетъ этотъ терминъ нѣсколькими другими наименованіями, которыя впослѣдствіи, по почину различныхъ авторовъ, въ свою очередь сдѣлались терминами; напримѣръ въ 3-мъ днѣ Discorsi встрѣчаемъ слѣдующую фразу: «l'impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del discendere».

Della scienza meccanica; это сочиненіе издано на итальянскомъ языкѣ семь лѣтъ спустя послѣ смерти Галилея, но раньше, въ 1634 году, оно появилось въ переводѣ на французскій языкъ: Mersenne, Les méchaniques de Galilée. Paris.

Обобщеніе начала возможныхъ перемѣщеній на всякія системы матерьяльныхъ точекъ было указано Иваномъ Бернулли (въ письмѣ къ Вариньону) въ 1717 году*), который выразилъ его въ слѣдующей формѣ: «Если какія либо силы приложены какимъ либо образомъ и дѣйствуютъ посредственно или непосредственно, то равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, если сумма положительныхъ *энергій* равняется суммѣ отрицательныхъ. Подъ энергіей надо подразумѣвать произведеніе изъ силы и проэкціи перемѣщенія на направленіе силы; притомъ надо считать энергію положительною или отрицательною, смотря по знаку проэкціи».

Терминъ: «vitesse virtuelle» введенъ Ив. Бернулли; прилагательное «virtuel» происходитъ отъ латинскаго «virtus», равнозначущаго итальянскому «talento», что значитъ *способность, мощь*; это прилагательное выражаетъ, что vitesse virtuelle есть принадлежность, составная часть момента. Слово «возможный» не есть точный переводъ слова virtuel; точный переводъ термина Бернулли былъ бы: «скорость, входящая въ составъ момента».

Наиболѣе обширное и многостороннее развитіе начала возможныхъ перемѣщеній мы находимъ въ аналитической механикѣ Лагранжа, въ которой всѣ уравненія статики, динамики и гидромеханики выводятся изъ этого начала и начала д'Аламбера. Эта книга, появившаяся въ первый разъ въ 1788 году**), есть самое капитальное сочиненіе по механикѣ и не утратила своей новизны даже и до нашихъ дней; можно сказать съ полною увѣренностью, что къ механикѣ Лагранжа прибавлено до настоящаго времени весьма немногое.

Такъ какъ начало возможныхъ перемѣщеній не настолько очевидно, чтобы можно было принять его безъ доказательства, то Лагранжъ, въ первомъ отдѣлѣ своей книги, приводитъ одно изъ двухъ своихъ доказательствъ этого начала; это доказательство мы здѣсь сообщаемъ.

Идея этого доказательства заключается въ замѣнѣ всѣхъ взаимноуравновѣшивающихся задаваемыхъ силъ F_1, $F_2, \ldots F_n$ реакціями особой связи, состоящей изъ одной нити, обходящей систему сложныхъ блоковъ и натягиваемой вѣсомъ одного груза; при этомъ предполагается,

---

*) Это письмо помѣщено въ книгѣ: Nouvelle mécanique. P. Varignon. Paris, 1725.

**) Книга эта состоитъ изъ двухъ частей: статики съ гидростатикою и динамики съ гидродинамикою; первыя главы статики, гидростатики, динамики и гидродинамики заключаютъ въ себѣ весьма подробное изложеніе значенія и историческаго развитія разныхъ принциповъ механики.

что *всѣ связи* суть *идеальныя*, что *на блокахъ нѣтъ тренія*, что *нить не обладаетъ жесткостью и что натяженіе ея одинаково по всей длинѣ*.

Примѣчаніе. Натяженіе нити въ какомъ либо ея сѣченіи есть равнодѣйствующая всѣхъ молекулярныхъ силъ, которыя дѣйствуютъ изъ частицъ, находящихся по одну сторону сѣченія, на частицы, находящіяся по другую сторону его; если дѣйствительно разрѣзать нить по этому сѣченію (перпендикулярному къ длинѣ нити), то, чтобы образовавшіяся оконечности нити не отдѣлились другъ отъ друга, придется къ каждой изъ этихъ оконечностей приложить по силѣ; обѣ силы будутъ равны, прямопротивоположны и перпендикулярны къ сѣченію; каждая изъ этихъ силъ представляетъ величину натяженія нити въ разсматриваемомъ сѣченіи. —

Предположимъ, что величины силъ $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots \boldsymbol{F}_n$ находятся въ соизмѣримыхъ отношеніяхъ между собою, такъ что можно подобрать силу $\boldsymbol{P}$, которая въ цѣлое число k_1 разъ менѣе силы $\boldsymbol{F}_1$, вмѣстѣ съ тѣмъ въ цѣлое число k_2 разъ менѣе силы $\boldsymbol{F}_2$, и т. д.:

$$F_1 = k_1 P,\ F_2 = k_2 P, \ldots F_n = k_n P.$$

Затѣмъ представимъ себѣ механизмъ, состоящій изъ n полиспастовъ, то есть изъ n системъ подвижныхъ блоковъ и n системъ неподвижныхъ блоковъ; блоки каждой системы сидятъ свободно на одной оси, вокругъ которой они могутъ вращаться независимо другъ отъ друга. Къ осямъ подвижныхъ системъ блоковъ прикрѣплены матерьяльныя точки: къ оси $\boldsymbol{M}_1$ (черт. 46) прикрѣплена точка m_1, къ оси $\boldsymbol{M}_2$— точка m_2, и т. д. Оси неподвижныхъ системъ блоковъ прикрѣплены на направленіяхъ силъ $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots$, а именно: ось A_1 прикрѣплена на продолженіи силы $\boldsymbol{F}_1$, ось A_2— на направленіи силы $\boldsymbol{F}_2$, и т. д.

Далѣе, представимъ себѣ, что къ оси M_1 прикрѣпленъ одинъ конецъ тонкой, гибкой и нерастяжимой нити, которая затѣмъ обходитъ по одному разу всѣ блоки всѣхъ полиспастовъ; число блоковъ на каждой оси и расположеніе нити таковы, что нить между $\boldsymbol{M}_1$ и A_1 проходитъ k_1 разъ, между $\boldsymbol{M}_2$ и A_2 проходитъ k_2 разъ, и т. д.; наконецъ, обойдя всѣ блоки, нить свѣшивается съ послѣдняго неподвижнаго блока внизъ, поддерживая грузъ, вѣсъ котораго равенъ $\boldsymbol{P}$.

На чертежѣ 46-мъ изображена система полиспастовъ для трехъ точекъ m_1, m_2, m_3, гдѣ $k_1 = 5$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$; надо замѣтить, что нить, при переходѣ отъ одного полиспаста къ другому, должна сходить съ неподвижнаго блока и направляться къ неподвижному же блоку другаго

полиспаста; такъ и проведены части B_1 и B_2 на чертежѣ 46-мъ; если бы мы провели часть B_1 къ одному изъ блоковъ, сидящихъ на оси M_2, то это было бы ошибкою въ конструкціи механизма.

Радіусы всѣхъ блоковъ должны быть ничтожно-малы; на черт. 46-мъ блокамъ приданы конечные размѣры и радіусамъ блоковъ, сидящихъ на одной оси, даны неодинаковые радіусы; это сдѣлано только для наглядности чертежа.

Понятно, что послѣ введенія этого механизма силы $F_1, F_2, \ldots$ должны быть отняты, такъ какъ грузъ P, черезъ посредство нити и полиспастовъ, тянетъ точку M_1 къ точкѣ A_1 съ силою k_1P, точку M_2 къ точкѣ A_2 съ силою k_2P, и т. д.

Для того, чтобы система точекъ $m_1, m_2, \ldots$ при дѣйствіи натяженій, замѣняющихъ силы $F_1, F_2, \ldots$ и при дѣйствіи реакцій тѣхъ связей, которымъ она подчинена, могла находиться въ положеніи равновѣсія, необходимо, чтобы грузъ P, стремясь опуститься внизъ и сдвинуть съ мѣста точки $m_1, m_2, m_3, \ldots$, побуждалъ ихъ получить только *невозможныя* перемѣщенія; но это требованіе равносильно условію, *чтобы при возможныхъ перемѣщеніяхъ грузъ не опускался.* Выразимъ это условіе формулою.

Пусть $\varepsilon_1 = M_1E_1$ (черт. 46), $\varepsilon_2 = M_2E_2, \ldots$ суть варьяціи положеній или ничтожно-малыя перемѣщенія точекъ. Если направленіе перемѣщенія точки составляетъ острый уголъ съ направленіемъ силы F (какъ напримѣръ въ точкахъ M_2 и M_3 на чертежѣ 46-мъ), то разстояніе EA между новымъ положеніемъ точки m и точкою A будетъ менѣе первоначальнаго разстоянія на длину $(AM - AE)$; но эта длина разнится на величину высшаго порядка малости отъ длины MC (см. въ точкахъ M_2 и M_3 на чертежѣ 46-мъ), гдѣ C есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки E на направленіе MA.

Вслѣдствіе этого сумма длинъ нитей между точками M_2 и A_2 уменьшится на длину

$$k_2(\overline{M_2C_2}) = k_2\,\varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2, F_2)$$

и если бы всѣ остальныя точки не получили никакого перемѣщенія, то грузъ P опустился бы на ту же самую длину.

Если направленіе перемѣщенія составляетъ тупой уголъ съ направленіемъ силы F (какъ напримѣръ въ точкѣ M_1 на чертежѣ 46-мъ), то разстояніе между точкою M и точкою A увеличится на длину

$$k_1(\overline{M_1C_1}) = -k_1\varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1, F_1)$$

и если бы всѣ остальныя точки не получили никакого перемѣщенія, то грузъ P поднялся бы на такую длину.

Если всѣ точки получатъ какія либо перемѣщенія, то грузъ P опустится на длину, равную:

$$k_1\varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1, F_1) + k_2\varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2, F_2) + \ldots + k_n\varepsilon_n \cos(\varepsilon_n, F_n),$$

причемъ поднятіе груза скажется, какъ отрицательное опусканіе.

Условіе, что грузъ не долженъ опускаться при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы, выразится формулою:

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) \leqslant 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) \leqslant 0.$$

Если всѣ связи удерживающія, то возможныя варьяціи должны удовлетворять уравненіямъ (559, bis) § 75-го, а слѣдовательно, тогда каждой совокупности возможныхъ варьяцій соотвѣтствуетъ возможная же совокупность варьяцій равныхъ и противоположныхъ.

Принявъ во вниманіе это обстоятельство, можемъ заключить, что если всѣ связи удерживающія, то грузъ P не долженъ ни опускаться, ни подниматься при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы уже доказали, что онъ не долженъ опускаться, но если возможны перемѣщенія $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ при которыхъ грузъ поднимается, то возможны также перемѣщенія: $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots -\varepsilon_n$, равныя и прямопротивоположныя первымъ; при нихъ грузъ на столько же опустится, на сколько онъ поднимется при первыхъ; а слѣдовательно, при положеніи равновѣсія такой системы, такія перемѣщенія, при которыхъ грузъ поднимается, должны быть также невозможны.

Итакъ, если всѣ связи удерживающія, то положеніе равновѣсія системы точекъ возможно только тогда, когда при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ удовлетворяется равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = 0 \ldots\ldots\ldots \mathbf{(567, b)}$$

Таково доказательство Лагранжа, помѣщенное имъ въ Mécanique analytique; другое доказательство, помѣщенное въ Théorie des fonctions analytique (оно также помѣщено, въ видѣ прибавленія въ концѣ 2 тома, 3-го изданія, Mécanique analytique, просмотрѣннаго и исправленнаго Бертраномъ), не принадлежитъ къ числу непосредственныхъ доказательствъ начала возможныхъ перемѣщеній, это есть выводъ выраженій реакцій связей.

Изъ числа другихъ доказательствъ начала возможныхъ перемѣщеній, упомянемъ объ доказательствахъ Фурье [1]), Поансо [2]), Коши [3]), Ампера [4]), Карла Неймана [5]). Амперово доказательство мы здѣсь сообщаемъ.

Доказательство Ампера, подобно доказательству Коши, относится непосредственно не къ началу возможныхъ перемѣщеній, но къ выводу выраженій реакцій идеальной связи; оно можетъ быть раздѣлено на двѣ части: въ первой доказывается, что реакціи идеальной связи направлены по дифференціальнымъ параметрамъ ея, во второй части доказывается, что во всѣхъ реакціяхъ одной и той же связи множитель λ одинъ и тотъ же.

Первая часть доказательства заключается въ слѣдующемъ. Пусть точки $m_1, m_2, \ldots m_n$ связаны одною связью (491, b) (стр. 315), не заключающею времени. Если введемъ $(3n-3)$ новыхъ связей, такихъ, которыя закрѣпятъ точки $m_2, m_3, \ldots m_n$ въ занимаемыхъ ими положеніяхъ $M_2, M_3, \ldots M_n$, координаты коихъ суть: (a_2, b_2, c_2), $(a_3, b_3, c_3), \ldots$, то уравненіе связи обратится въ уравненіе поверхности:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \ldots a_n, b_n, c_n) = 0,$$

а реакція связи въ точкѣ m_1 — въ реакцію этой поверхности; но реакція поверхности направлена по дифференціальному параметру P_1, а потому и реакція связи имѣетъ то же самое направленіе. Это самое

---

[1]) Fourier. Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des momens. Journal de l'école polytechnique. II Tome, 5 Cahier.

[2]) Poinsot. Eléments de Statique.

[3]) Доказательство Коши можно, между прочимъ, найти въ механикѣ Муаньо.

[4]) Ampère. Sur le principe des vitesses virtuelles. J. de l'école polytechnique. T. VI, Cah. 13.

[5]) Neumann. Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig. 1879.

относится и ко всякой изъ точекъ, связываемыхъ связью; слѣдовательно, реакціи связи должны выражаться формулами (511) страницы 332-й.

Во второй части доказательства предполагается извѣстнымъ, что реакціи идеальнаго стержня равны и прямопротивоположны; имѣется въ виду доказать, что множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ въ выраженіяхъ (511) равны между собою.

Предположимъ, что введены $(3n - 6)$ новыхъ связей, закрѣпляющихъ всѣ точки, за исключеніемъ точекъ m_1 и m_2; черезъ это всякія перемѣщенія точекъ $m_3, m_4, \ldots m_n$ сдѣлаются невозможными и равенство вида: (588) (§ 81), которому должны будутъ удовлетворять возможныя перемѣщенія точекъ m_1 и m_2 получитъ слѣдующій видъ:

$$P_1 Ds_1 \cos(P_1, Ds_1) + P_2 Ds_2 \cos(P_2, Ds_2) = 0 .$$

Присоединимъ затѣмъ еще четыре связи: двѣ неподвижныя поверхности, на которыхъ должна оставаться точка m_1 и двѣ другія поверхности, на которыхъ должна оставаться точка m_2; линія пересѣченія первыхъ двухъ должна быть касательною къ направленію параметра P_1, а линія пересѣченія вторыхъ двухъ поверхностей — касательною къ дифференціальному параметру P_2. Вслѣдствіе такого стѣсненія точекъ m_1 и m_2, перемѣщенія ихъ станутъ возможными только по направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ P_1 и P_2 или по направленіямъ прямопротивоположнымъ, т. е.

$$\cos(P_1, Ds_1) = \pm 1, \ \cos(P_2, Ds_2) = \pm 1,$$

а потому вышеприведенное равенство получитъ видъ:

$$\pm P_1 Ds_1 \pm P_2 Ds_2 = 0; \ldots\ldots\ldots \textbf{(591)}$$

но дифференціальные параметры P_1, P_2 и перемѣщенія Ds_1, Ds_2 суть величины положительныя, слѣдовательно, равенство (591) требуетъ, чтобы знаки косинусовъ были противоположны, т. е., если перемѣщеніе Ds_1 направлено по P_1, то перемѣщеніе Ds_2 должно быть направлено противоположно P_2, или обратно; во всякомъ случаѣ, равенству (591) можно дать слѣдующій видъ:

$$P_1 Ds_1 = P_2 Ds_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(592)}$$

Далѣе, свяжемъ точки m_1 и m_2 идеальными стержнями съ нѣкоторою посторонней матерьяльною точкою A, къ которой приложимъ нѣкоторую силу F такимъ образомъ, чтобы вся система оставалась въ положеніи равновѣсія.

Эта сила F разовьетъ реакціи Λ_1 и Λ_2 въ стержняхъ AM_1 и AM_2, а чрезъ посредство стержней разовьются въ точкахъ M_1 и M_2 реакціи тѣхъ связей, которымъ эти точки подчинены.

Надо замѣтить, что возможныя положенія точки A образуютъ нѣкоторую поверхность и для того, чтобы эта точка находилась въ положеніи равновѣсія, необходимо, чтобы сила F была перпендикулярна къ этой поверхности, а слѣдовательно, и ко всякой линіи, которую можетъ описывать точка A при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ M_1 и M_2; пусть $D\sigma$ есть элементъ одной изъ такихъ линій, т. е. возможное перемѣщеніе точки A; для равновѣсія необходимо, чтобы былъ:

$$\cos(F, D\sigma) = 0;$$

съ другой же стороны, такъ какъ сила F и реакціи $A\Lambda_1$ и $A\Lambda_2$ (черт. 47), приложенныя къ точкѣ A, должны взаимно уравновѣшиваться, то должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство:

$$\Lambda_1 D\sigma \cos(AM_1, D\sigma) + \Lambda_2 D\sigma \cos(AM_2, D\sigma) = 0 \ldots\ldots \textbf{(593)}$$

при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній точки A.

Точка M_1 тоже находится въ положеніи равновѣсія, поэтому реакція $\overline{M_1\Lambda_1}$ стержня M_1A, реакція $\lambda_1 P_1$ связи $s = 0$ и реакція $\mathfrak{N}_1$ линіи пересѣченія двухъ поверхностей, на которой должна оставаться точка M_1, — эти три реакціи должны взаимно уравновѣшиваться; но такъ какъ реакція $\mathfrak{N}_1$ перпендикулярна къ направленію P_1, то, проэктируя эти три реакціи на это направленіе, получимъ:

$$\Lambda_1 \cos(\overline{M_1A}, P_1) + \lambda_1 P_1 = 0,$$

или

$$\Lambda_1 \cos(\overline{AM_1}, P_1) = \lambda_1 P_1; \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(594)}$$

точно также получимъ слѣдующее равенство:

$$\Lambda_2 \cos(\overline{AM_2}, P_2) = \lambda_2 P_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(595)}$$

Къ этому надо еще прибавить, что возможныя перемѣщенія концовъ идеальныхъ стержней должны удовлетворять равенствамъ:

$$Ds_1 \cos(\overline{AM_1}, Ds_1) = D\sigma \cos(\overline{AM_1}, D\sigma) \ldots\ldots \textbf{(596)}$$

$$Ds_2 \cos(\overline{AM_2}, Ds_2) = D\sigma \cos(\overline{AM_2}, D\sigma) \ldots\ldots \textbf{(597)}$$

Помножимъ теперь равенство (594) на Ds_1, вычтемъ изъ него равенство (595), помноженное на Ds_2, и примемъ во вниманіе равенство (592); получимъ:

$$\Delta_1 Ds_1 \cos(\overline{AM}_1, P_1) - \Delta_2 Ds_2 \cos(\overline{AM}_2, P_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) P_1 Ds_1;$$

такъ какъ Ds_1 направлено по P_1 когда Ds_2 направлено противоположно P_2 или обратно, то первую часть этого равенства можно представить такъ:

$$\pm [\Delta_1 Ds_1 \cos(\overline{AM}_1, Ds_1) + \Delta_2 Ds_2 \cos(\overline{AM}_2, P_2)];$$

изъ равенствъ же (596), (597) и (593) слѣдуетъ, что эта сумма равна нулю; а потому должно быть

$$(\lambda_1 - \lambda_2) P_1 Ds_1 = 0$$

при всякихъ значеніяхъ перемѣщенія Ds_1; это требуетъ, чтобы λ_1 равнялось λ_2.

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \ldots . = \lambda_n.$$

Доказательство Коши отличается отъ доказательства Ампера только тѣмъ, что точки m_1 и m_2 связываются равноплечнымъ рычагомъ и притомъ принципъ рычага предполагается уже извѣстнымъ.

ГЛАВА VI.

Объ интегралахъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

§ 83. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія данной системы точекъ; число постоянныхъ произвольныхъ.

Въ § 71-мъ было сказано, какъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія (517) § 70-го получить n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка, заключающихъ столько же независимыхъ координатъ и ихъ производныя по времени.

Эта совокупность дифференціальныхъ уравненій должна послужить для опредѣленія вида тѣхъ $\varkappa$ функцій отъ времени, которыми выражаются независимыя координаты системы движущихся точекъ.

Если эти $\varkappa$ функцій будутъ опредѣлены, то функціи времени, выражающія законъ измѣненія p зависимыхъ координатъ, опредѣлятся изъ уравненій связей (491, 1), (491, 2), ...(491, p).

Для сохраненія симметріи въ тѣхъ формулахъ и выраженіяхъ, которыя мы будемъ писать въ настоящей главѣ, предположимъ, что декартовы координаты могутъ быть выражены функціями отъ $\varkappa$ независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_\varkappa$; притомъ мы можемъ даже допустить, что эти функціи заключаютъ время явнымъ образомъ. Пусть (526) (стр. 359) суть эти выраженія.

Дѣлая такое предположеніе, мы нисколько не ограничиваемъ общности нашихъ разсужденій, потому что независимыя декартовы координаты могутъ быть разсматриваемы какъ независимые координатные параметры.

Для опредѣленія вида тѣхъ функцій времени:

$$q_1 = \mathfrak{f}_1(t),\ q_2 = \mathfrak{f}_2(t), \ldots q_\varkappa = \mathfrak{f}_\varkappa(t), \ldots\ldots: \quad \textbf{(598)}$$

которыя выражаютъ законъ измѣненія координатныхъ параметровъ при движеніи системы точекъ подъ вліяніемъ данныхъ силъ, надо найти надлежащее число интеграловъ совокупности (531) (стр. 367) дифференціальныхъ уравненій Лагранжа.

Относительно интегрированія и интеграловъ этихъ дифференціальныхъ уравненій намъ придется высказать много сходнаго съ тѣмъ, что уже сказано въ § 18 (стр. 46 — 59) относительно интегрированія дифференціальныхъ уравненій движенія одной свободной матерьяльной точки; поэтому, при изложеніи нѣкоторыхъ пунктовъ настоящаго параграфа, мы будемъ выражаться сжато, безъ подробныхъ объясненій.

Функціи (598) должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ (531), обращая ихъ въ тождества.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій (531) можетъ быть произведено по способу составленія рядовъ:

$$q_k = q_{k0} + q'_{k0}\vartheta + q''_{k0}\frac{\vartheta^2}{1.2} + q_{k0}'''\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots, ^{*}) \ldots \textbf{(599, k)}$$

выражающихъ разложенія искомыхъ функцій въ строки, расположенныя по возрастающимъ степенямъ разности $(t - t_0) = \vartheta$; t_0 есть какой либо моментъ движенія; величины координатныхъ параметровъ въ моментъ t_0 мы условимся обозначать знаками:

$$q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}, \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(600)}$$

а величины производныхъ q_1', q_2', ... q_n' — знаками:

$$q'_{10}, q'_{20}, \ldots q'_{n0}, \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(601)}$$

и т. д. Значенія вторыхъ и высшихъ производныхъ: q_{k0}'', q_{k0}''', ... для момента t_0 выразятся функціями: отъ t_0, отъ величинъ (600) и отъ величинъ (601); эти выраженія получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій (531) и изъ производныхъ отъ этихъ уравненій по времени.

Ряды (599) должны выражать искомыя функціи (598); слѣдовательно, эти функціи должны заключать, кромѣ t, еще t_0, величины (600) и величины (601), т. е.:

$$q_k = \mathfrak{f}_k(t, t_0, q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}, q'_{10}, q'_{20}, \ldots q'_{n0}), \cdot \quad \textbf{(598. k)}$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ 1, 2, ... n.

Если изъ дифференціальныхъ уравненій (531) помощію какихъ либо преобразованій можно получить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(602, 1)}$$

гдѣ φ_1 есть какая либо функція отъ t, q_1, q_2, ... q_n, q_1', q_2', ... q'_n, то, интегрируя уравненіе (602, 1), получимъ равенство:

$$\varphi_1(t, q_1, q_2, \ldots q_n, q_1', q_2', \ldots q'_n) = C_1, \ldots \textbf{(603. 1)}$$

---

*) k есть которое либо изъ чиселъ: 1, 2, 3, ... n.

гдѣ C_1 есть произвольная постоянная; равенство (603, 1) есть одинъ изъ *первыхъ интеграловъ* совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Уравненіе (602, 1) обращается въ тождество, если вмѣсто вторыхъ производныхъ q_1'', q_2'', ... q_n'' подставимъ въ него выраженія, получаемыя для этихъ производныхъ изъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Положимъ, что мы нашли n первыхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1,\ \varphi_2 = C_2, \ldots \varphi_n = C_n, \ldots\ldots \quad \textbf{(603)}$$

такихъ, что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \ldots \frac{d\varphi_n}{dt} = 0 \ldots\ldots \quad \textbf{(602)}$$

равносильны совокупности дифференціальныхъ уравненій (531), т. е., что всѣ уравненія (531) могутъ быть получены изъ уравненій (602); въ такомъ случаѣ эти n первыхъ интеграловъ (603) могутъ служить для выраженія величинъ q_1', q_2', ... q'_n въ функціяхъ отъ времени t, отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, ... C_n; пусть эти выраженія будутъ:

$$q'_k = \mathfrak{F}_k(t,\ q_1,\ q_2, \ldots q_n,\ C_1,\ C_2, \ldots C_n), \ldots\ldots \quad \textbf{(604, k)}$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, ... n.

Если изъ n первыхъ интеграловъ (603), помощію какихъ либо преобразованій, можно получить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \ldots\ldots \quad \textbf{(605, 1)}$$

гдѣ Φ_1 есть какая либо функція отъ t, отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, ... C_n, то, интегрируя уравненіе (605, 1), получимъ равенство:

$$\Phi_1(t,\ q_1,\ q_2, \ldots q_n,\ C_1,\ C_2, \ldots C_n) = \Gamma_1, \ldots \quad \textbf{(606, 1)}$$

гдѣ Γ_1 есть произвольная постоянная; равенство (606, 1) есть одинъ

изъ *вторыхъ интеграловъ* совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Положимъ, что мы нашли $н$ такихъ вторыхъ интеграловъ:

$$\Phi_1 = \Gamma_1, \ \Phi_2 = \Gamma_2, \ldots \Phi_н = \Gamma_н, \ldots\ldots \quad \mathbf{(606)}$$

что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \ \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \ldots \frac{d\Phi_н}{dt} = 0 \ldots\ldots \quad \mathbf{(605)}$$

равносильны совокупности первыхъ интеграловъ (603), т. е., что всѣ равенства (603) могутъ быть получены изъ уравненій (605); въ такомъ случаѣ эти $н$ вторыхъ интеграловъ (606) могутъ служить для выраженія координатныхъ параметровъ въ функціяхъ отъ времени t и $2н$ произвольныхъ постоянныхъ; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_k = \psi_k(t, C_1, C_2, \ldots C_н, \ \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_н), \ldots \quad \mathbf{(598, A, k)}$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2,.... $н$.

Выраженія для q'_k получатся или непосредственно изъ выраженій (598, A), взявъ производныя по времени отъ функцій ψ_k, или изъ выраженій (604), если замѣнить въ нихъ $q_1, q_2, \ldots q_н$ функціями $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_н$.

Между произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots C_н, \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_н$, величиною t_0 и величинами (600) и (601) существуетъ зависимость, выражаемая $2н$ равенствами вида:

$$\varphi_k(t_0, q_{10}, q_{20}, \ldots q_{н0}, q'_{10}, q'_{20}, \ldots q'_{н0}) = C_k \ldots \quad \mathbf{(607, k)}$$

$$\Phi_k(t_0, q_{10}, q_{20}, \ldots q_{н0}, C_1, C_2, \ldots C_н) = \Gamma_k, \ldots \quad \mathbf{(608, k)}$$

(гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2,.... $н$).

Эта же зависимость можетъ быть представлена подъ видомъ слѣдующихъ формулъ, выражающихъ, что величины (600) и (601) могутъ быть разсматриваемы какъ функціи отъ t_0 и $2н$ произвольныхъ постоянныхъ:

[redacted]

$$q_{k0} = \psi_k(t_0, C_1, C_2, \ldots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n) \ldots \quad \mathbf{(609, k)}$$

$$q'_{k0} = \psi'_k(t_0, C_1, C_2, \ldots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n); \ldots \quad \mathbf{(610, k)}$$

отсюда слѣдуетъ, что величины (600) и (601) столь же произвольны, какъ и постоянныя $C_1, C_2, \ldots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$.

Функціи ψ_k (598, A) обратятся въ функціи f_k (598), если произвольныя постоянныя C_k и Γ_k выразить по формуламъ (607) и (608) функціями отъ t_0 и отъ величинъ (600) и (601).

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени,* хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ системы точекъ; величины (600) суть координатные параметры *начальнаго положенія* системы и могутъ быть названы *начальными величинами координатныхъ параметровъ*; величины (601) могутъ быть названы *начальными величинами производныхъ* $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$; проэкціи на оси $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$, $Z^{\text{овъ}}$ *начальныхъ скоростей* точекъ системы опредѣлятся изъ формулъ (533) § 73-го по величинамъ (600) и (601).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начальнаго момента, полагая $t_0 = 0$; тогда начальныя величины координатныхъ параметровъ будемъ обозначать знаками: $k_1, k_2, \ldots k_n$, а начальныя величины первыхъ производныхъ отъ координатныхъ параметровъ — знаками: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$; начальныя величины декартовыхъ координатъ точекъ системы будемъ обозначать буквами: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots a_n, b_n, c_n$, а начальныя величины проэкцій скоростей точекъ системы на оси $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$, $Z^{\text{овъ}}$ — буквами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Изъ вышесказаннаго видно, *что функціи времени, выражающія законъ измѣненія координатныхъ параметровъ движущейся системы n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ p связями, заключаютъ въ себѣ 2н постоянныхъ произвольныхъ; столько же произвольныхъ постоянныхъ заключаютъ и тѣ функціи времени, которыя выражаютъ законъ измѣненія декартовыхъ координатъ всѣхъ точекъ системы.*

Существованіе произвольныхъ постоянныхъ въ функціяхъ ψ_k показываетъ, что при дѣйствіи данныхъ задаваемыхъ силъ система можетъ совершать безчисленное множество различныхъ движеній, различающихся количественными значеніями произвольныхъ постоянныхъ, или, что тоже самое, количественными значеніями начальныхъ величинъ координатныхъ параметровъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Примѣчаніе. При помощи выраженій (543), § 74-го, первыя части первыхъ интеграловъ (603) могутъ быть преобразованы въ функціи отъ t, $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$; эти функціи будемъ обозначать знакомъ ϕ; напримѣръ, интегралъ (603, 1) получитъ слѣдующій видъ:

$$\phi_1(t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C \ldots \quad \textbf{(603, 1, bis)}$$

Начальныя значенія величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ будемъ обозначать такъ:

$$\mathrm{п}_1, \mathrm{п}_2, \ldots \mathrm{п}_n.$$

§ 84. Интегралы совокупности (554) дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

Въ § 74-мъ было показано, что совокупныя дифференціальныя уравненія Лагранжа могутъ быть замѣнены совокупностью Гамильтоновыхъ дифференціальныхъ уравненій (554) (стр. 376) перваго порядка.

Интеграломъ этой совокупности (554) называется всякое равенство вида:

$$\phi(t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C, \ldots \ldots \quad \textbf{(611)}$$

(гдѣ C — произвольная постоянная), удовлетворяющее слѣдующему требованію: полная производная по времени отъ функціи ϕ, т. е. сумма

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) \ldots \ldots \quad \textbf{(612)}$$

должна обратиться въ нуль тождественно, когда вмѣсто производ-

ныхъ q'_k и p'_k будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (554).

Вся совокупность (554) дифференціальныхъ уравненій перваго порядка будетъ вполнѣ проинтегрирована, если $q_1, q_2, \ldots q_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_n$ будутъ выражены такими функціями времени, которыя обращаютъ дифференціальныя уравненія въ тождества.

Выраженія эти могутъ быть получены, если найдемъ $2n$ интеграловъ

$$\phi_1 = C_1,\ \phi_2 = C_2, \ldots \phi_{2n} = C_{2n} \ldots\ldots \mathbf{(613)}$$

данной совокупности (554); притомъ эти интегралы должны быть таковы, чтобы совокупность равенствъ:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = 0,\ \frac{d\phi_2}{dt} = 0, \ldots \frac{d\phi_{2n}}{dt} = 0 \ldots\ldots \mathbf{(614)}$$

была равносильна совокупности (554), то есть, чтобы чрезъ рѣшеніе равенствъ (614) относительно $p_1', p_2', \ldots p_n', q_1', q_2', \ldots q_n'$ получились бы всѣ дифференціальныя уравненія совокупности (554).

Если такіе $2n$ интеграловъ будутъ найдены, то, рѣшивъ ихъ относительно величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, получимъ искомыя выраженія этихъ величинъ въ функціяхъ времени; эти функціи будутъ заключать, кромѣ времени, $2n$ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_{2n}$.

Всякое равенство вида:

$$F(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_{2n}) = C \ldots\ldots \mathbf{(615)}$$

есть интегралъ совокупности (554), потому что полная производная первой части его, а именно:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1}\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \phi_2}\frac{d\phi_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \phi_{2n}}\frac{d\phi_{2n}}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ q_1', $q_2', \ldots q_n', p_1', p_2', \ldots p_n'$ вторыми частями дифференціальныхъ уравненій (554), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя по t отъ $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_{2n}$.

Всякій новый интегралъ:

$$\varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = C \ldots\ldots \textbf{(611)}$$

той же совокупности (554), отличающійся отъ $2n$ интеграловъ (613), можетъ быть представленъ подъ видомъ (615). Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ себѣ, что мы исключили изъ φ величины $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ при помощи равенствъ (613); повидимому, φ должно тогда обратиться въ функцію отъ t, C_1, C_2, $C_3, \ldots C_{2n}$, т. е., въ функцію отъ t, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{2n}$

$$\varphi = f(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{2n}),$$

но легко убѣдиться, что функція f не должна заключать времени явнымъ образомъ; въ самомъ дѣлѣ, полная производная отъ f по t, то есть:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{2n}}\frac{d\varphi_{2n}}{dt}$$

должна обращаться, при посредствѣ равенствъ (614), въ нуль; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

значитъ функція f должна быть функціею только отъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{2n}$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что хотя совокупныя дифференціальныя уравненія (554) имѣютъ безчисленное множество интеграловъ, но только $2n$ изъ нихъ суть интегралы независимые, всѣ же прочіе интегралы суть нѣкоторыя комбинаціи независимыхъ интеграловъ; притомъ любые $2n$ интеграловъ могутъ быть приняты за независимые, если изъ нихъ, путемъ полнаго дифференцированія по времени, могутъ быть получены всѣ дифференціальныя уравненія совокупности (554), какъ указано относительно интеграловъ (613).

Каждый изъ интеграловъ совокупности (554), по замѣщеніи въ немъ величинъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ выраженіями (542) параграфа 74-го, обращается въ одинъ изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія (531) параграфа 73-го; поэтому послѣднія

имѣютъ безчисленное множество первыхъ интеграловъ, но только $2n$ изъ нихъ суть интегралы независимые, прочіе же первые интегралы суть комбинаціи независимыхъ первыхъ интеграловъ.

Въ слѣдующихъ трехъ главахъ будутъ показаны нѣкоторые пріемы, при помощи которыхъ могутъ быть найдены нѣкоторые изъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемыя силы и связи удовлетворяютъ опредѣленнымъ условіямъ.

ГЛАВА VII.

Законъ движенія центра инерціи.

§ 85. Составленіе дифференціальныхъ уравненій движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Сложимъ дифференціальныя уравненія (517, a 1) (517, a 2)... ...(517, a n) параграфа 70-го, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \lambda(\vartheta_1)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda(\vartheta_p)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\vartheta_p}{\partial x_i};\ldots \quad \textbf{(616,a)}$$

точно также, сложивъ всѣ тѣ уравненія (517), которыя заключаютъ вторыя производныя отъ координатъ y, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i + \lambda(\vartheta_1)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda(\vartheta_p)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\vartheta_p}{\partial y_i};\ldots \quad \textbf{(616,b)}$$

сложивъ затѣмъ всѣ остальныя уравненія, т. е.: (517, c1) 517, c2)... ..(517, cn), получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i + \lambda(\vartheta_1)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda(\vartheta_p)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\vartheta_p}{\partial z_i}\ldots \quad \textbf{(616,c)}$$

Вторыя части этихъ уравненій суть проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ *геометрической суммы всѣхъ задаваемыхъ силъ и всѣхъ реакцій связей, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ системы.*

§ 86. Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Если геометрическая сумма всѣхъ силъ и всѣхъ реакцій связей равна нулю во все время движенія системы, то тогда дифференціальныя уравненія (616) обратятся въ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = 0 \ldots\ldots \quad (617)$$

Очевидно, каждое изъ этихъ уравненій можетъ быть проинтегрировано два раза: первые интегралы будутъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = C_1; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = C_2; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = C_3; \ldots\ldots \quad (618)$$

вторые интегралы:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i &= C_1 t + \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i &= C_2 t + \Gamma_2, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i &= C_3 t + \Gamma_3. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (619)$$

Представимъ себѣ точку C, координаты (x_c, y_c, z_c) которой связаны съ координатами всѣхъ точекъ системы слѣдующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \\ y_c &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \\ z_c &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (620)$$

Тогда интеграламъ (619) можно будетъ дать слѣдующій видъ:

$$Mx_c = C_1 t + \Gamma_1;\ \ My_c = C_2 t + \Gamma_2;\ \ Mz_c = C_3 t + \Gamma_3, \ldots \textbf{(619 bis)}$$

гдѣ

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(621)}$$

есть *масса всей системы*, т. е., сумма массъ всѣхъ точекъ системы.

Интегралы (619 bis) выражаютъ, что точка C движется равномѣрно и прямолинейно, причемъ скорость ея такова, что если бы эта точка была матерьяльною точкою и масса ея равнялась бы массѣ всей системы, то количество движенія этой точки C равнялось бы геометрической суммѣ количествъ движеній всѣхъ точекъ системы.

Эта точка C называется *центромъ инерціи* системы точекъ.

§ 87. Законъ движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

На основаніи выраженій (620) первыя части дифференціальныхъ уравненій (616) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2},\ \ M\frac{d^2y_c}{dt^2},\ \ M\frac{d^2z_c}{dt^2};$$

тогда эти уравненія (616) обращаются въ дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, совпадающей съ центромъ инерціи системы, масса которой равна массѣ всей системы и къ которой какъ будто приложены всѣ задаваемыя силы и всѣ реакціи связей, приложенныя въ дѣйствительности къ точкамъ системы.

Такимъ образомъ дифференціальныя уравненія (616) выражаютъ слѣдующій *общій законъ движенія* какой либо системы точекъ, называемый *закономъ движенія центра инерціи*:

Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ движется такимъ образомъ, какъ будто бы это была свободная матерьяльная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы и къ которой были бы приложены всѣ задаваемыя силы и реакціи связей.

Въ такомъ видѣ этотъ законъ есть дѣйствительно *общій* законъ

движенія, такъ какъ онъ имѣетъ мѣсто при всякихъ задаваемыхъ силахъ и при всякихъ связяхъ; подчиняя связи и задаваемыя силы нижеслѣдующимъ ограниченіямъ, мы получимъ слѣдующія спеціальныя формы этого закона, имѣющія мѣсто во многихъ вопросахъ и задачахъ механики.

Когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда уравненія (616) получаютъ слѣдующій видъ:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{i=n}X_i;\ M\frac{d^2y_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{i=n}Y_i;\ M\frac{d^2z_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{i=n}Z_i, \dots \quad \mathbf{(616, A)}$$

т. е., *когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда центръ инерціи системы движется какъ свободная матерьяльная точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и къ которой приложены всѣ задаваемыя силы*; эта спеціальная форма закона движенія центра инерціи имѣетъ мѣсто, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

a) когда всѣ точки системы свободны,

b) когда реакціи связей попарно равны и прямопротивоположны; напримѣръ, если всѣ связи суть идеальныя связи, указанныя въ примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ и 55-мъ (см. стр. 336 — 338, 344 — 346) и соединяющія точки системы между собою, но не съ посторонними или неподвижными точками.

Когда не только геометрическая сумма всѣхъ реакцій равна нулю, но также равна нулю и геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ, тогда получается еще болѣе частная форма закона движенія центра инерціи, а именно *тогда центръ инерціи системы движется такъ, какъ двигалась бы по инерціи матерьяльная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы*; въ этихъ случаяхъ мы имѣемъ шесть интеграловъ (618) и (619) дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

Если, напримѣръ, всѣ точки системы свободны и всѣ задаваемыя силы суть силы взаимнодѣйствія между точками системы, попарно равныя и прямопротивоположныя (такъ что всякой силѣ $M_i f$ (черт. 48), при-

ложенной къ одной изъ точекъ, соотвѣтствуетъ сила $M_k f$ равная ей и прямопротивоположная, приложенная къ другой точкѣ системы), то тогда геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ будетъ равна нулю, а потому центръ инерціи системы будетъ двигаться равномѣрно и прямолинейно.

Въ примѣрахъ 61, 62 и 63-мъ (стр. 326—327) центры инерціи системы должны совершать прямолинейныя равномѣрныя движенія, такъ что въ каждомъ изъ этихъ примѣровъ мы имѣемъ по шести интеграловъ вида (618) и (619).

Въ примѣрѣ 66-мъ (§ 73, стр. 371) центръ инерціи системы совпадаетъ съ центромъ C ромба, реакціи идеальныхъ стержней попарно равны и прямопротивоположны; геометрическая сумма силъ притяженія точекъ системы къ началу координатъ равна $2\mu(m_1 + m_2)\rho_c$ и направлена параллельно $\overline{CO}$; въ самомъ дѣлѣ, означивъ абсолютныя координаты вершинъ ромба знаками: $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$, будемъ имѣть слѣдующія выраженія проэкцій геометрической суммы задаваемыхъ силъ:

$$-\mu[m_1(x_1 + x_3) + m_2(x_2 + x_4)] = -2\mu(m_1 + m_2)x_c$$

$$-\mu[m_1(y_1 + y_3) + m_2(y_2 + y_4)] = -2\mu(m_1 + m_2)y_c,$$

такъ какъ

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 2x_c \text{ и } y_1 + y_3 = y_2 + y_4 = 2y_c.$$

Первыя два дифференціальныя уравненія этого примѣра суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы въ полярныхъ координатахъ.

§ 88. Нѣсколько замѣчаній относительно опредѣленія положенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Положеніе центра инерціи данной системы матерьяльныхъ точекъ, занимающихъ данныя положенія въ пространствѣ, опредѣляется вычисленіемъ по формуламъ (620) § 86-го или помощію геометрическихъ построеній, основанныхъ на этихъ формулахъ. Мы ограничиваемся нѣсколькими замѣчаніями, касающимися этого предмета.

1) Если выразить положеніе точекъ системы и центра инерціи въ другихъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ ξ, η, ζ, то

зависимость между новыми координатами центра инерціи и новыми координатами точекъ системы сохранитъ прежній видъ:

$$\xi_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i;\ \eta_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i;\ \zeta_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i, \quad \textbf{(620,}\text{bis)}$$

въ чемъ нетрудно убѣдиться при помощи формулъ преобразованія координатъ (часть кинематическая, стр. 56, формулы (45), (46) и проч.).

2) Въ косоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ зависимость между координатами центра инерціи и координатами точекъ системы выражается формулами того же самаго вида (620), какъ и въ прямоугольныхъ координатахъ.

3) Центръ инерціи двухъ матерьяльныхъ точекъ находится на линіи кратчайшаго разстоянія между ними и дѣлитъ это разстояніе на части, обратно пропорціональныя массамъ прилежащихъ матерьяльныхъ точекъ.

4) Центръ инерціи нѣсколькихъ матерьяльныхъ точекъ можетъ быть опредѣленъ помощію ряда послѣдовательныхъ дѣйствій: опредѣливъ положеніе центра инерціи $C(1, 2)$ точекъ m_1 и m_2 и представивъ себѣ, что въ $C(1, 2)$ сосредоточена масса $(m_1 + m_2)$, опредѣлимъ положеніе центра инерціи точекъ $C(1, 2)$ и m_3; найденная точка $C(1, 2, 3)$ будетъ центромъ инерціи трехъ точекъ m_1, m_2, m_3 и т. д.

5) Если всѣ точки системы лежатъ въ одной плоскости, то центръ инерціи системы находится въ той же плоскости; въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту плоскость за плоскость **YZ** и принявъ во вниманіе, что $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n$, найдемъ: $\xi_c = 0$.

6) Если всѣ точки системы лежатъ на одной прямой, то центръ инерціи системы находится на той же прямой; въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту прямую за ось Ξ, мы найдемъ $\eta_c = 0$, $\zeta_c = 0$.

7) Если система состоитъ изъ четнаго числа матерьяльныхъ точекъ или, иначе сказать, изъ нѣкотораго числа паръ точекъ; если массы обѣихъ точекъ каждой пары равны между собою, а расположе-

ніе системы таково, что середины кратчайшихъ разстояній между парными точками заключаются въ одной плоскости, то въ этой плоскости очевидно заключается центръ инерціи всей системы; въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ эту плоскость за плоскость YZ и составимъ выраженіе для ξ_c; такъ какъ обѣ точки каждой пары имѣютъ равныя массы и находятся по обѣ стороны плоскости YZ въ равныхъ разстояніяхъ отъ нея, то получимъ $\xi_c = 0$.

8) Если подобная симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится на линіи пересѣченія этихъ плоскостей.

9) Если симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ тремъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія ихъ.

10) Если распредѣлить систему точекъ на нѣсколько группъ и сначала опредѣлить положеніе центра инерціи каждой изъ этихъ группъ, то, чтобы затѣмъ найти положеніе центра инерціи всей системы, надо поступить такъ: предположивъ, что масса каждой группы сосредоточена въ ея центрѣ инерціи, надо искать положеніе центра инерціи всѣхъ этихъ новыхъ воображаемыхъ матерьяльныхъ точекъ.

Эти замѣчанія оказываются весьма полезными во многихъ частныхъ случаяхъ.

§ 89. Объ томъ, какъ разсматривается сплошное тѣло въ механикѣ системы матерьяльныхъ точекъ.

Мы должны здѣсь обратить вниманіе на способы опредѣленія и вычисленія положеній центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ, но прежде этого слѣдуетъ объяснить, какимъ образомъ механика системы точекъ примѣняется къ сплошнымъ тѣламъ.

Данное сплошное тѣло мысленно раздѣляютъ на весьма большое число мелкихъ частей, называемыхъ элементами тѣла и представляютъ себѣ, что каждый элементъ замѣняется матерьяльною точкою той же массы, заключающеюся въ объемѣ элемента или на его поверхности; къ этой совокупности матерьяльныхъ точекъ, которая замѣняетъ сплошное тѣло, примѣняютъ теоремы и формулы механики системы матерьяльныхъ точекъ.

Совокупность матерьяльныхъ точекъ, которою мы замѣняемъ сплошное тѣло, тѣмъ болѣе походитъ на самое тѣло, чѣмъ мельче элементы, на которые мысленно раздробляемъ тѣло; поэтому мы раздробляемъ тѣло на элементы безконечно малыхъ размѣровъ и предполагаемъ, что размѣры ихъ приближаются къ нулю, а число элементовъ — къ безконечности.

Если принять въ разсчетъ кинематическія свойства разсматриваемаго тѣла, то придется допустить существованіе нѣкоторыхъ связей между матерьяльными точками, замѣняющими элементы тѣла; вслѣдствіе этого совокупность точекъ обратится въ систему точекъ, замѣняющую данное сплошное тѣло, обладающее данными кинематическими свойствами.

Напримѣръ, если данное сплошное тѣло предполагается идеально твердымъ, то придется допустить, что разстоянія между матерьяльными точками, замѣняющими собою элементы тѣла, остаются неизмѣнными, какимъ бы силамъ тѣло ни было подвержено; поэтому идеально-твердое тѣло замѣняется въ механикѣ такъ называемою *неизмѣняемою системою матерьяльныхъ точекъ*.

Объ условіяхъ, выражающихъ кинематическія свойства деформирующихся тѣлъ, мы будемъ говорить въ другихъ мѣстахъ нашего курса.

Дробленіе тѣла на безконечно-малые элементы производится разсѣченіемъ его координатными поверхностями той системы координатъ, помощію которой выражаютъ положеніе точекъ тѣла въ пространствѣ.

При употребленіи прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ каждый безконечно-малый элементъ объема имѣетъ видъ прямоугольнаго параллелопипеда, имѣющаго безконечно-малыя ребра dx, dy, dz; объемъ такого параллелопипеда равенъ:

$$dO = dxdydz$$

и масса его равна:

$$dm = \sigma dxdydz,$$

гдѣ σ есть плотность матеріи тѣла въ одной изъ точекъ этого элемента (см. стр. 29).

Матерьяльная точка, которою мы замѣняемъ элементъ тѣла, должна быть помѣщена внутри или на поверхности этого элемента; положеніе ея въ самомъ элементѣ можетъ быть какое угодно, такъ какъ въ окончательныхъ результатахъ предполагается, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля; мы можемъ предположить, что матерьяльная точка, замѣняющая элементъ, находится или въ центрѣ параллелопипеда, или въ одной изъ его вершинъ; мы предпочтемъ помѣщать ее въ той вершинѣ элементарнаго параллелопипеда, координаты которой имѣютъ наименьшія значенія.

При употребленіи прямолинейныхъ косоугольныхъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ косоугольныхъ безконечно-малыхъ параллелопипедовъ; объемъ такого параллелопипеда равенъ:

$$dO = \omega dxdydz;$$

ω есть объемъ косоугольнаго параллелопипеда, ребра котораго параллельны осямъ координатъ и имѣютъ длины, равныя единицѣ; этотъ объемъ выражается такъ:

$$\omega = \begin{vmatrix} 1, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & 1, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma,$$

гдѣ

$$\alpha = \cos(Y, Z),\ \ \beta = \cos(Z, X),\ \ \gamma = \cos(X, Y).$$

При употребленіи круговыхъ цилиндрическихъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ отрѣзковъ колецъ съ прямоугольными сѣченіями; на чертежѣ 49-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ такой элементъ. Если координаты точки A суть ρ, θ, z, то координаты точки C_1 суть $(\rho + d\rho)$, $(\theta + d\theta)$, $(z + dz)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: плоскости $z(ABB_1A_1)$ и $(z + dz)$ (DCC_1D_1), плоскости $\theta(ADD_1A_1)$ и $(\theta + d\theta)$ (BCC_1B_1), цилиндрическія поверхности $\rho(ADCB)$ и $(\rho + d\rho)$ $(A_1D_1C_1B_1)$. Пре-

небрегая безконечно-малыми величинами четвертаго и высшихъ порядковъ малости, найдемъ, что объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = d\rho \,.\, \rho d\theta \,.\, dz = \rho d\rho d\theta dz\,.$$

Въ сферическихъ координатахъ элементъ объема есть часть сферическаго слоя, заключающагося между сферами r и $(r + dr)$; на чертежѣ 50-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ изъ такихъ элементовъ. Положимъ, что координаты точки A суть r, φ, ψ, а координаты точки $C_1 : (r + dr)$, $(\varphi + d\varphi)$, $(\psi + d\psi)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: двѣ плоскости $\psi(ADD_1A_1)$ и $(\psi + d\psi)$ (BCC_1B_1), двѣ шаровыя поверхности $r(ADCB)$ и $(r + dr)$ $(A_1D_1C_1B_1)$, двѣ коническія поверхности $\varphi(DCC_1D_1)$ и $(\varphi + d\varphi)$ (ABB_1A_1).

Если пренебречь безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ малости, начиная съ четвертаго, то объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \,.\, rd\varphi \,.\, r\sin\varphi d\psi = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi\,.$$

§ 90. Центръ инерціи сплошнаго тѣла.

Центромъ инерціи сплошнаго тѣла называется та точка, къ которой приближается и съ которою совпадаетъ центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, замѣняющей тѣло, по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ размѣры элементовъ тѣла до нуля, а число ихъ увеличиваемъ до безконечности.

Центръ инерціи есть весьма важная въ механическомъ отношеніи точка сплошнаго тѣла; такъ, центръ инерціи идеально-твердаго тѣла обладаетъ слѣдующими свойствами.

Такъ какъ реакціи неизмѣняемыхъ связей той системы точекъ, которая замѣняетъ собою идеально-твердое тѣло, попарно равны и прямопротивоположны, то центръ инерціи свободнаго твердаго тѣла, неподверженнаго никакимъ силамъ, движется равномѣрно и прямолинейно; при этомъ само тѣло можетъ двигаться не поступательно, тогда центръ инерціи будетъ единственною точкою тѣла, имѣющею прямо-

линейное и равномѣрное движеніе, всѣ же прочія точки тѣла будутъ описывать криволинейныя траэкторіи.

Если твердое тѣло свободно, но подвержено какимъ бы то ни было силамъ, то центръ инерціи его будетъ двигаться такимъ образомъ, какъ будто бы въ немъ была сосредоточена масса всего тѣла и къ нему были приложены всѣ силы, приложенныя къ точкамъ тѣла.

Поэтому, въ тѣхъ вопросахъ механики, въ которыхъ возможно замѣнить каждое сплошное твердое тѣло матерьяльною точкою, слѣдуетъ помѣщать эту точку въ центрѣ инерціи, а не въ иной точкѣ твердаго тѣла.

§ 91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверхностей и линій. Примѣры.

Для полученія формулъ, выражающихъ положеніе центра инерціи сплошнаго тѣла въ прямолинейныхъ координатахъ, примѣнимъ формулы (620) (§ 86-го) къ системѣ матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ элементы тѣла и затѣмъ предположимъ, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля, а число ихъ увеличивается до безконечности; тогда получимъ:

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint \sigma x dO;\ y_c = \frac{1}{M}\iiint \sigma y dO;\ z_c = \frac{1}{M}\iiint \sigma z dO, \ldots (622)$$

гдѣ

$$M = \iiint \sigma dO,\ dO = dxdydz,$$

а интегрированія распространены на весь объемъ тѣла.

Во многихъ случаяхъ опредѣленіе положенія центра инерціи сплошнаго тѣла сведется на опредѣленіе положенія центра инерціи нѣкоторой поверхности или площади или даже нѣкоторой линіи. Напримѣръ, положимъ, что данное сплошное тѣло ограничено: цилиндрическою поверхностью, производящія которой параллельны оси Z, плоскостью XY и поверхностью:

$$z = f(x, y),$$

кромѣ того предполагается, что плотность σ матеріи этого тѣла есть функція только отъ x и y, но не отъ z, такъ что во всѣхъ точкахъ каждой линіи, параллельной оси $Z^{овъ}$, плотность одна и таже.

Примѣнивъ формулы (622) къ этому случаю и произведя интегрированіе по z въ предѣлахъ отъ $z=0$ до $z=f(x, y)$, получимъ:

$$x_c = \frac{1}{M}\iint \varkappa x dx dy, \quad y_c = \frac{1}{M}\iint \varkappa y dx dy, \quad \varkappa = \sigma f(x, y) \ldots \mathbf{(623)}$$

$$z_c = \frac{1}{2M}\iint \varkappa f(x, y) dx dy, \quad M = \iint \varkappa dx dy,$$

гдѣ интегрированія распространены по площади основанія цилиндрическаго тѣла.

Очевидно, координаты x_c и y_c выражаются какъ координаты центра инерціи воображаемой матеріи, расположенной по площади основанія цилиндрическаго тѣла съ *поверхностною плоскостью* $\varkappa = \sigma f(x, y)$.

Въ другихъ случаяхъ вопросъ приводится къ опредѣленію положенія центра инерціи воображаемой матеріи, расположенной вдоль по нѣкоторой кривой или прямой линіи съ данною *линейною плотностью* λ, такъ, что на элементъ ds линіи приходится количество массы λds.

Замѣчанія, приведенныя въ § 88, примѣняются съ пользою и при опредѣленіи центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ и площадей.

Обращаемся къ примѣрамъ.

Примѣръ 67-й. Центръ инерціи однородной дуги круга находится на радіусѣ, проведенномъ къ серединѣ дуги; взявъ центръ круга за начало координатъ, а направленіе вышесказаннаго радіуса — за ось $X^{овъ}$, опредѣлимъ разстояніе центра инерціи C отъ O по формулѣ:

$$OC = x_c = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{2R^2 \int_0^\alpha \cos\theta d\theta}{2R\int_0^\alpha d\theta} = \frac{R(2R\sin\alpha)}{2R\alpha},$$

гдѣ R — радіусъ круга и 2α уголъ при центрѣ, занимаемый дугою.

Такъ какъ $2R\sin\alpha$ есть длина хорды, а $2R\alpha$ — длина дуги, то OC выражается такъ

$$OC = \frac{(\text{радіусъ}).(\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 68-й. Центръ инерціи дуги однородной цѣпной линіи:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

предполагая, что одинъ конецъ дуги совпадаетъ съ самою нижнею точкою кривой.

Вычисленіе положенія центра инерціи произведемъ по формуламъ:

$$sx_c = \int xds, \quad sy_c = \int yds.$$

Вычисленіе значительно облегчается при помощи слѣдующихъ выраженій:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{y}{a}; \quad s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\frac{dy}{dx}.$$

Координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = x - \frac{a}{s}(y - a); \quad y_c = \frac{1}{2}\left(y + \frac{a}{s}x\right).$$

Опредѣленіе положенія центровъ инерціи дугъ другихъ плоскихъ кривыхъ можно найти въ собраніяхъ задачъ по механикѣ: Jullien *), de Saint-Germain **) и въ Раціональной Механикѣ Сомова.

Примѣръ 69-й. Положеніе центра инерціи дуги винтовой однородной линіи:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = b\arccos\frac{x}{a},$$

считая дугу отъ точки: $z = 0$, $y = 0$, $x = a$.

Координаты центра инерціи дуги суть:

$$x_c = b\frac{y}{z}, \quad y_c = b\frac{(a - x)}{z}, \quad z_c = \frac{z}{2}.$$

---

*) Jullien. Problèmes de Mécanique rationnelle 1855.

**) de Saint Germain. Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle 1877.

Примѣръ 70-й. Положеніе центра инерціи однородной площади кругового сектора.

Разстояніе центра инерціи C_1 отъ центра O круга равно:

$$x_1 = OC_1 = \frac{2}{3} \frac{(\text{радіусъ}).(\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 71-й. Положеніе центра инерціи однородной площади кругового сегмента можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ. Площадь сектора можно раздѣлить на двѣ части хордою, стягивающею дугу сектора; одна часть будетъ площадь равносторонняго треугольника, другая — площадь сегмента.

Центры инерціи всѣхъ этихъ площадей находятся на оси $X^{\text{овъ}}$; означимъ чрезъ x_1, x_2 и x разстоянія отъ O центровъ инерціи площадей сектора, треугольника и сегмента; знаками S_1, S_2 и S обозначимъ величины этихъ площадей.

Нетрудно видѣть, что x опредѣлится по формулѣ:

$$x = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2},$$

гдѣ x_1 есть разстояніе, приведенное въ предыдущемъ примѣрѣ, $x_2 = \frac{2}{3} R \cos\alpha$, $S_1 = R^2\alpha$, $S_2 = R^2 \sin\alpha \cos\alpha$; поэтому:

$$x = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Примѣръ 72-й. Центръ инерціи площади, ограниченной осью $X^{\text{овъ}}$ и циклоидою:

$$x = R(\omega + \sin\omega),\ y = R(1 + \cos\omega).$$

Величина площади:

$$2\int_0^{2R} x dy = 3\pi R^2.$$

Центръ инерціи находится на оси $Y^{\text{овъ}}$ въ разстояніи $\frac{5}{6} R$.

Примѣръ 73-й. Положеніе центра инерціи площади, заключающейся между дугою AE эллипса (черт. 51), діаметромъ OA и полухордою DE, сопряженною этому діаметру.

Къ этому случаю лучше всего примѣнить косоугольныя прямолиней-

ныя координаты, оси которыхъ суть: ось OX, направленная вдоль по діаметру OA, и ось OY, направленная вдоль по діаметру, сопряженному къ діаметру OA; въ этихъ координатахъ уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

гдѣ α и β суть длины сопряженныхъ полудіаметровъ.

Величина площади выразится такъ:

$$S=\sin\theta\int_{x_1}^{\alpha} y\,dx=\frac{\sin\theta}{2}\left(\alpha\beta\arccos\frac{x_1}{\alpha}-x_1y_1\right),$$

гдѣ x_1 есть длина OD, а y_1 — длина DE; θ есть уголъ уголъ YOX.

Косоугольныя координаты x_c и y_c центра инерціи C опредѣлятся по формуламъ:

$$Sx_c=\sin\theta\int_{x_1}^{\alpha} xy\,dx=\sin\theta\cdot\frac{\alpha^2y_1^3}{3\beta^2},$$

$$Sy_c=\frac{\sin\theta}{2}\int_{x_1}^{\alpha} y^2dx=\sin\theta\cdot\frac{\beta^2(\alpha-x_1)^2}{2.3\alpha^2}(2\alpha+x_1).$$

Центръ инерціи площади $AOB(x_1=0,\ y_1=\beta)$ находится въ точкѣ, имѣющей слѣдующія координаты:

$$\frac{4\alpha}{3\pi},\quad \frac{4\beta}{3\pi}.$$

Примѣръ 74-й. Центръ инерціи площади, ограниченной параболою AE (черт. 52), побочною осью AD, проведенною черезъ точку A и полухордою DE, сопряженною къ этой оси.

За оси косоугольныхъ координатъ возьмемъ: побочную ось AD — за ось $X^{овъ}$ и касательную къ параболѣ въ точкѣ A — за ось $Y^{овъ}$; уравненіе параболы: $y^2=2px$. Координаты центра инерціи:

$$x_c=\frac{3}{5}x,\quad y_c=\frac{3}{8}y_1.$$

Примѣръ 75-й. Центръ инерціи площади эллиптическаго сегмента

$E_1AE_2E_1$ (черт. 51-й) находится на полудіаметрѣ OA_1, сопряженномъ хордѣ сегмента, и отстоитъ на разстояніи:

$$OC_1 = \frac{2\alpha^2 y_1^3}{3\beta^2\left(\alpha\beta\arccos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) - x_1y_1\right)}$$

отъ центра эллипса, гдѣ y_1 есть длина половины хорды, а x_1 — разстояніе OD_1.

Примѣръ 76-й. Опредѣлить положеніе центра инерціи площади эллиптическаго сектора OE_1AE_2 (черт. 51-й).

Эта площадь состоитъ изъ площади сектора $E_1AE_2E_1$ и изъ площади треугольника OE_1E_2; величина площади послѣдняго равна $x_1y_1 \sin\theta$ и центръ инерціи его находится въ точкѣ C_2, отстоящей отъ центра на длину $OC_2 = \frac{2}{3}x_1$; поэтому величина площади сектора равна:

$$\alpha\beta \sin\theta \arccos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right),$$

а центръ инерціи ея находится на діаметрѣ OA и отстоитъ отъ центра эллипса на разстояніи:

$$OC' = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha y_1}{\beta\arccos\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)}\,.$$

Примѣръ 77-й. Положеніе центра инерціи трапеціи.

Очевидно, центръ инерціи находится на линіи DD_1, соединяющей середины параллельныхъ сторонъ трапеціи ABB_1A_1 (черт. 53-й); чтобы найти положеніе его на этой линіи, примемъ во вниманіе, что трапеція можетъ быть раздѣлена на два треугольника ABA_1 и A_1BB_1, что центръ инерціи перваго находится въ точкѣ пересѣченія K прямой BD_1 съ прямою линіею QQ_1, отстоящею отъ AA_1 на одну треть высоты трапеціи, что центръ инерціи втораго находится въ точкѣ пересѣченія L прямой A_1D съ прямою PP_1, отстоящею на одну треть высоты трапеціи отъ BB_1 и что центръ инерціи трапеціи долженъ находиться на прямой линіи LK, соединяющей точки K и L; слѣдовательно, искомый центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія C линіи DD_1 линіею KL.

Для составленія формулы, выражающей разстояніе центра инерціи C отъ AA_1, замѣтимъ, что площади треугольниковъ ABA_1 и BA_1B_1 равны $\frac{1}{2}ha$ и $\frac{1}{2}hb$, что площадь трапеціи $= \frac{1}{2}h(a+b)$, гдѣ h озна-

чаетъ высоты треугольниковъ и трапецій, а a и b — длины сторонъ AA_1 и BB_1 и что разстоянія точекъ K и L отъ AA_1 равны $\frac{1}{3}h$ и $\frac{2}{3}h$; окажется, что разстояніе точки C отъ этой же стороны равно:

$$\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$$

и что отношеніе длинъ CD_1 и CD_1 равно:

$$\frac{\overline{CD_1}}{\overline{CD}}=\frac{a+2b}{b+2a}.$$

Примѣръ 78. Положенія центровъ инерціи частей поверхности сферы.

Положенія центровъ инерціи какихъ либо частей сферической поверхности могутъ быть опредѣлены при помощи слѣдующихъ формулъ.

Пусть S есть величина площади нѣкоторой сферической фигуры ABC (черт. 54), находящейся на сферѣ радіуса R, и S_p — величина площади ортогональной проэкціи площади S на какую либо плоскость P_1P, проходящую черезъ центръ сферы.

Разстояніе p центра инерціи площади S отъ плоскости P_1P выразится такъ:

$$p=\frac{R\int\int\cos(r,n)\,dS}{S}, \qquad \text{(624)}$$

гдѣ n означаетъ направленіе нормали къ плоскости P_1P, а r — направленіе радіуса вектора, проведеннаго изъ центра O сферы къ элементу поверхности dS; произведеніе $R\cos(r,n)$ выражаетъ разстояніе элемента dS отъ плоскости P_1P; интегралъ числителя распространенъ по всей площади S.

Такъ какъ направленіе r есть направленіе наружной нормали элемента поверхности dS, то интегралъ числителя выражаетъ величину площади S_p, а потому формула (624) выражаетъ, что

$$p=\frac{RS_p}{S} \qquad \text{(624)}$$

Если черезъ центръ сферы проведемъ какую либо другую плоскость $P_1'P'$, то пересѣченіе ея съ проэктирующею цилиндрическою поверхностью сферической фигуры ABC будетъ косоугольною проэкціею этой фигуры на эту новую плоскость (на чертежѣ (54) ортогональная проэкція сферической фигуры ABC на плоскость P_1P есть фигура $A_1B_1C_1$,

фигура же $A'B'C'$ есть пересѣченіе плоскости $P_1'P'$ съ проэктирующимъ цилиндромъ); означимъ черезъ α уголъ между плоскостями P_1P и $P_1'P'$ и черезъ S'_p величину площади пересѣченія проэктирующаго цилиндра съ плоскостью $P_1'P'$; кромѣ того, опустимъ изъ центра инерціи $Ц$ площади S перпендикуляръ на плоскость $P_1'P'$ и продолжимъ его до пересѣченія Q съ плоскостью P_1P; длину $ЦQ$ означимъ черезъ p'.

Очевидно, что $S_p = S_p' \cos\alpha$ и что $p = p' \cos\alpha$, поэтому изъ формулы (624) получится слѣдующая:

$$p' = \frac{RS'_p}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(625)}$$

Примѣнимъ формулу (624) къ опредѣленію положенія центра инерціи площади сферическаго сегмента. Очевидно, что центръ инерціи находится на оси фигуры сегмента. Взявъ за плоскость P_1P плоскость, перпендикулярную къ этой оси, и принявъ во вниманіе, что величина поверхности сегмента равна $2\pi R^2(1 - \cos\beta)$, а величина площади его проэкціи $= \pi R^2 \sin^2\beta$, гдѣ β есть уголъ (r, n) для точекъ ребра сегмента, мы найдемъ, что

$$p = \frac{1}{2}R(1 + \cos\beta),$$

то есть, что центръ инерціи поверхности сегмента находится на серединѣ его высоты.

Центръ инерціи поверхности сферическаго пояса также находится на серединѣ его высоты.

Примѣнимъ ту же формулу (624) къ опредѣленію положенія центра инерціи сферическаго треугольника; а именно, опредѣлимъ разстоянія $p(BC)$, $p(CA)$, $p(AB)$ центра инерціи до плоскостей, проведенныхъ черезъ стороны треугольника.

Проэкція площади треугольника на плоскость OBC (черт. 55) равняется площади сектора BOC, безъ площадей OA_1B и OA_1C проэкцій секторовъ OAB и OAC на ту же плоскость, т. е.:

$$S_p = \frac{R^2}{2}\left(a - c\cos B - b\cos C\right).$$

Величина площади сферическаго треугольника выражается, какъ извѣстно, такъ:

$$S = R^2(A + B + C - \pi) \text{ *)}.$$

---

*) Предполагается, что углы a, b, c, A, B, C измѣряются отношеніями длинъ дугъ къ радіусу.

Поэтому, изъ формулы (624) получимъ:

$$p(BC)=\frac{R(a-c\cos B-b\cos C)}{2(A+B+C-\pi)};$$

точно такъ же получимъ:

$$p(CA)=\frac{R(b-a\cos C-c\cos A)}{2(A+B+C-\pi)},\quad p(AB)=\frac{R(c-b\cos A-a\cos B)}{2(A+B+C-\pi)}.$$

Положеніе центра инерціи $Ц$ можетъ быть еще выражено разстояніями его отъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ сферы и перпендикулярныхъ къ радіусамъ OA, OB, OC; эти разстоянія опредѣлимъ по формулѣ (625), разсматривая секторы OBC, OCA и OAB какъ косоугольныя проэкціи площади треугольника ABC на плоскости большихъ круговъ BC, CA и AB; найдемъ, что эти разстоянія суть:

$$\frac{R^3a}{2S},\quad \frac{R^3b}{2S},\quad \frac{R^3c}{2S}.$$

Переходя теперь къ примѣрамъ опредѣленія положеній центровъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, мы докажемъ слѣдующую теорему, которая оказывается весьма полезною въ примѣненіи ко многимъ вопросамъ этого рода.

Теорема. Представимъ себѣ сплошное однородное тѣло, ограниченное двумя параллельными плоскостями $П_1$ и $П_2$ (черт. 56) и боковою поверхностью такого рода, что величина площади сѣченія тѣла какою либо плоскостью, параллельною плоскостямъ $П_1$ и $П_2$, выражается такъ:

$$П=a+bz+cz^2, \qquad \textbf{(626)}$$

гдѣ z есть разстояніе плоскости сѣченія отъ плоскости $П_1$; a, b, c суть постоянные коэфиціенты, зависящіе отъ вида боковой поверхности. Отношеніе между разстояніями центра инерціи этого тѣла отъ плоскостей $П_1$ и $П_2$ выражается такъ:

$$\frac{z_c}{h-z_c}=\frac{2П_0+П_2}{2П_0+П_1}, \qquad \textbf{(627)}$$

гдѣ $П_1$ и $П_2$ — величины площадей основаній нижняго и верхняго, $П_0$ — площадь сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты h.

Легко доказать эту теорему. Разстояніе центра инерціи отъ нижняго основанія выразится формулою:

$$z_c=\frac{1}{V}\int_0^h zПdz=\frac{1}{V}\left(a\frac{h^2}{2}+b\frac{h^3}{3}+c\frac{h^4}{4}\right),$$

гдѣ V есть объемъ тѣла; но числитель этого выраженія можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{h^2}{6}\left[2\left(a+b\frac{h}{2}+c\frac{h^2}{4}\right)+(a+bh+ch^2)\right],$$

поэтому:

$$z_c = h^2\frac{(2\Pi_0+\Pi_2)}{6V}.$$

Такъ же найдемъ, что разстояніе центра инерціи отъ верхняго основанія выражается такъ:

$$h-z_c = h^2\frac{(2\Pi_0+\Pi_1)}{6V},$$

а потому и получимъ равенство (627).

Примѣръ 79-й. Центръ инерціи объема сферическаго пояса находится на оси его; пусть k_1 и k_2 суть разстоянія основаній сегмента отъ центра сферы; въ этомъ случаѣ:

$$\Pi = \pi(R^2 - k_1^2 - 2k_1 z - z^2).$$

По формулѣ (627) найдемъ:

$$\frac{z_c}{h-z_c} = \frac{3R^2 - k_2^2 - \frac{1}{2}(k_1+k_2)^2}{3R^2 - k_1^2 - \frac{1}{2}(k_1+k_2)^2};\ h = k_2 - k_1.$$

Чтобы примѣнить эту формулу къ сферическому сегменту, надо положить въ ней $k_2 = R$.

Изъ этой формулы окажется, что центръ инерціи однородной полусферы дѣлитъ ось ея въ отношеніи 3 къ 5.

Примѣръ 80-й. Центръ инерціи части параболоида вращенія, заключающейся между плоскостями, отстоящими отъ вершины на разстояніяхъ k_1 и k_2.

Въ этомъ случаѣ:

$$\Pi_1 = 2\pi p k_1,\ \Pi_2 = 2\pi p k_2,\ \Pi_0 = \pi p(k_1+k_2),$$

а потому

$$\frac{z_c}{h-z_c} = \frac{k_1+2k_2}{k_2+2k_1}.$$

Примѣръ 81-й. Центръ инерціи какого либо пояса однополаго гипер-

болоида вращенія. Пусть k_1 и k_2 суть разстоянія плоскостей пояса отъ центра гиперболоида.

$$\Pi_1 = \pi a^2\left(1 + \frac{k_1^2}{b^2}\right), \quad \Pi_2 = \pi a^2\left(1 + \frac{k_2^2}{b^2}\right)$$

$$\Pi_0 = \pi a^2\left(1 + \frac{(k_1 + k_2)^2}{4b^2}\right)$$

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{6b^2 + (k_1 + k_2)^2 + 2k_2^2}{6b^2 + (k_1 + k_2)^2 + 2k_1^2}.$$

Примѣръ 82-й. Положеніе центра инерціи какой либо части трехоснаго эллипсоида, заключающейся между двумя параллельными плоскостями.

Главные діаметры діаметральной плоскости, параллельной плоскостямъ Π_1 и Π_2, примемъ за оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$, а направленіе полудіаметра, сопряженнаго къ этой діаметральной плоскости, за ось Z; слѣдовательно, оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ ортогональны между собою, а ось Z можетъ быть наклонена къ нимъ. Въ этихъ координатахъ уравненіе поверхности эллипсоида будетъ:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 1,$$

гдѣ A и B суть длины главныхъ полудіаметровъ діаметральнаго сѣченія, а γ — длина полудіаметра, совпадающаго съ осью Z.

Пусть k_1 и k_2 суть разстоянія по оси $Z^{овъ}$, плоскостей Π_1 и Π_2 отъ центра эллипсоида; на основаніи извѣстнаго выраженія площади эллипса найдемъ:

$$\Pi_1 = \pi AB\left(1 - \frac{k_1^2}{\gamma^2}\right), \quad \Pi_2 = \pi AB\left(1 - \frac{k_2^2}{\gamma^2}\right)$$

$$\Pi_0 = \pi AB\left(1 - \frac{(k_1 + k_2)^2}{4\gamma^2}\right).$$

Однородный эллипсоидъ симметриченъ по отношенію ко всякой діаметральной плоскости, а слѣдовательно и по отношенію къ плоскостямъ XZ и YZ; эти плоскости суть также плоскости симметріи разсматриваемаго нами эллиптическаго пояса, а потому центръ инерціи его находится на оси Z. Примѣняя формулу (627), мы замѣнимъ въ ней отношеніе кратчайшихъ разстояній центра инерціи отъ плоскостей Π_1 и Π_2 отношеніемъ разстояній, считаемыхъ по оси Z; получимъ:

$$\frac{\zeta_c - k_1}{k_2 - \zeta_c} = \frac{6\gamma^2 - (k_1 + k_2)^2 - 2k_2^2}{6\gamma^2 - (k_1 + k_2)^2 - 2k_1^2}.$$

Если положить $k_1 = 0$ и $k_2 = \gamma$, то найдемъ, что $\zeta_c = \frac{3}{8}\gamma$.

Примѣръ 83-й. Центръ инерціи конуса, боковая поверхность котораго есть коническая поверхность какого либо порядка и вида, находится на прямой линіи, соединяющей вершину конуса съ центромъ инерціи его основанія; нетрудно убѣдиться, что центръ инерціи отстоитъ отъ основанія на одну четверть длины этой линіи, если считать разстояніе вдоль по ней.

Примѣръ 84-й. Однородное тѣло имѣетъ видъ многогранника, двѣ противоположныя грани котораго параллельны, а остальныя грани, образующія боковую поверхность, суть треугольники и трапеціи; въ этомъ случаѣ площадь каждаго сѣченія, параллельнаго основаніямъ, тоже выразится формулою (626).

Въ самомъ дѣлѣ, площадь Π можетъ быть разбита на нѣсколько треугольниковъ, вершины которыхъ совпадаютъ съ вершинами периметра площади Π; площадь каждаго такого треугольника выражается такъ:

$$\frac{1}{2}\Big[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\Big],$$

гдѣ (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) суть координаты вершинъ треугольника (предполагается, что плоскость XY совпадаетъ съ основаніемъ Π_1). Такъ какъ каждая вершина находится на одномъ изъ прямолинейныхъ боковыхъ реберъ многогранника, то координаты x_i, y_i вершины (i) опредѣлятся изъ уравненій

$$x_i = \alpha_i z + \beta_i,\ y_i = \gamma_i z + \delta_i$$

того ребра, на которомъ находится эта вершина, а потому площадь каждаго треугольника выразится трichленомъ вида (626) и подобнымъ же трехчленомъ выразится площадь Π.

По этой причинѣ разстояніе центра инерціи такого многогранника отъ одного изъ основаній будетъ извѣстно, если будемъ знать высоту многогранника, величины площадей основаній, верхняго и нижняго, и величину площади сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты.

Центръ инерціи пирамиды, усѣченной параллельно основанію, находится на линіи, соединяющей центры инерціи верхняго и нижняго основаній; онъ отстоитъ отъ нижняго основанія на разстояніи:

$$z_c = h\frac{\Pi_1 + 3\Pi_2 + 2\sqrt{\Pi_1\Pi_2}}{4(\Pi_1 + \Pi_2 + \sqrt{\Pi_1\Pi_2})},$$

считая разстояніе по вертикальному направленію, такъ же, какъ и высоту h.

Тетраэдръ можно тоже причислить къ многогранникамъ разсматриваемой нами категоріи. Каждую пару противолежащихъ реберъ тетраэдра можно разсматривать какъ два безконечно-узкіе прямоугольника, плоскости которыхъ параллельны. Примѣняя къ тетраэдру формулу (627), мы должны положить: $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$; окажется, что центръ инерціи однороднаго тетраэдра находится въ точкѣ пересѣченія четырехъ прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ реберъ; эта точка дѣлитъ каждую изъ этихъ прямыхъ пополамъ.

§ 92. Открытіе закона движенія центра инерціи Лагранжъ приписываетъ Ньютону; въ книгѣ: Philosophiae naturalis principia mathematica, въ главѣ: Axiomata sive leges motus, въ примѣчаніи (corollaria) 4-мъ, находимъ слѣдующее выраженіе:

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitationis vel quiescit vel movetur uniformiter in directam.

(Общій центръ тяжести двухъ или нѣсколькихъ тѣлъ не измѣняетъ своего состоянія движенія или покоя вслѣдствіе взаимно-дѣйствій между этими тѣлами; если существуютъ только взаимнодѣйствія между тѣлами и нѣтъ ни внѣшнихъ силъ, ни препятствій, то общій центръ тяжести либо покоится, либо движется равномѣрно по прямой линіи).

Это выраженіе опредѣляетъ только частный случай закона движенія центра инерціи. Лагранжъ говоритъ, что общая форма закона дана д'Аламберомъ, но слѣдуетъ признать, что ясное выраженіе самой общей формы закона принадлежитъ самому же Лагранжу (въ Mécanique analytique).

ГЛАВА VIII.

Законъ площадей.

§ 93. Составленіе трехъ дифференціальныхъ уравненій.

Къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія (517) (§ 70) каждой точки системы приложимъ первый изъ тѣхъ двухъ пріемовъ преобразованія, которые указаны въ § 21-мъ; всѣ уравненія вида (110, a) сложимъ; составится слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d\text{л}_x}{dt} = \text{Л}_x + \lambda(\vartheta_1)\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial\vartheta_1}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial\vartheta_1}{\partial y_i}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \lambda(\vartheta_p)\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial\vartheta_p}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial\vartheta_p}{\partial y_i}\right); \ldots\ldots \quad \textbf{(628, a)}$$

здѣсь л_x и Л_x суть суммы, выражаемыя формулами (629, a) и (630, a), приведенными ниже.

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d\text{л}_y}{dt} = \text{Л}_y + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\vartheta_k)\sum_{i=1}^{i=n}\left(z_i\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial\vartheta_k}{\partial z_i}\right) \ldots\ldots \quad \textbf{(628, b)}$$

$$\frac{d\text{л}_z}{dt} = \text{Л}_z + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\vartheta_k)\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i\frac{\partial\vartheta_k}{\partial y_i} - y_i\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\right), \ldots\ldots \quad \textbf{(628, c)}$$

гдѣ:

$$\text{л}_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(629, a)}$$

$$\text{л}_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(629, b)}$$

$$Л_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (629, c).$$

$$Л_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (630, a)$$

$$Л_y = \sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (630, b)$$

$$Л_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (630, c)$$

§ 94. Главный моментъ силъ вокругъ даннаго центра. Перемѣна центра моментовъ. Главный векторъ.

Въ параграфѣ 22-мъ было объяснено значеніе разностей, заключающихся подъ знакомъ суммъ въ выраженіяхъ (630); это суть моменты вокругъ положительныхъ направленій осей $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ равнодѣйствующей F_i задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, это суть проэкціи на тѣ же оси момента силы F_i вокругъ начала координатъ.

Обозначая, какъ условлено въ § 22-мъ, знакомъ $L_0(F_i)$ величину и направленіе момента силы F_i вокругъ начала координатъ, можемъ представить формулы (630) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left.\begin{aligned} Л_x &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos(L_0(F_i), X), \\ Л_y &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos(L_0(F_i), Y), \\ Л_z &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos(L_0(F_i), Z). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (631)$$

Мы будемъ предполагать, что моментъ каждой силы вокругъ даннаго центра изображенъ длиною, отложенною отъ центра; относительно величины и направленія этой длины см. стр. 89 — 91 параграфа 22-го; согласно съ этимъ линейныя изображенія моментовъ силъ F_1, $F_2, \ldots F_n$ вокругъ начала координатъ суть длины, отложенныя отъ этой точки.

Изъ выраженій (631) видно, что $Л_x$, $Л_y$, $Л_z$ суть проэкціи на оси координатъ геометрической суммы моментовъ задаваемыхъ силъ $F_1, F_2, \ldots F_n$ вокругъ начала координатъ (точка O); эта геометрическая сумма называется *главнымъ моментомъ силъ* $F_1, F_2, \ldots F_n$ *вокругъ центра* O. Условимся обозначать величину и направленіе этого главнаго момента знакомъ $Л_0$; вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ предполагать, что *линейное изображеніе этого главнаго момента отложено отъ точки* O.

Слѣдовательно:

$$Л_x = Л_0 \cos(Л_0, X), \;\; Л_y = Л_0 \cos(Л_0, У), \;\; Л_z = Л_0 \cos(Л_0, Z).$$

Если вмѣсто точки O взять за центръ моментовъ другую точку $K(x_k, y_k, z_k)$, то моменты тѣхъ же силъ вокругъ новаго центра будутъ имѣть другія величины и другія направленія.

Чтобы составить выраженія проэкцій на оси координатъ момента $L_k(F_i)$ силы F_i (приложенной къ точкѣ m_i) вокругъ центра K, мы на время предположимъ, что этотъ центръ взятъ за новое начало координатъ и примѣнимъ прежнія формулы (113) § 22-го; такъ какъ координаты точки m_i относительно новыхъ плоскостей координатъ (которыя параллельны прежнимъ, но пересѣкаются въ новомъ началѣ координатъ K) равны $(x_i - x_k)$, $(y_i - y_k)$, $(z_i - z_k)$, то, по формуламъ (113) § 22-го, получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} L_k(F_i)\cos(L_k(F_i), X) &= (y_i - y_k) Z_i - (z_i - z_k) У_i, \\ L_k(F_i)\cos(L_k(F_i), У) &= (z_i - z_k) X_i - (x_i - x_k) Z_i, \\ L_k(F_i)\cos(L_k(F_i), Z) &= (x_i - x_k) У_i - (y_i - y_k) X_i. \end{aligned}\right\} \ldots \quad \textbf{(632)}$$

Геометрическая сумма моментовъ силъ F_1, F_2, ... F_n вокругъ центра K называется главнымъ моментомъ этихъ силъ вокругъ этого центра; мы будемъ обозначать этотъ главный моментъ знакомъ $Л_k$, а его проэкціи на оси координатъ — знаками $(Л_k)_x$, $(Л_k)_y$, $(Л_k)_z$; линейное изображеніе его, т. е. длину, изображающую величину и направленіе этого главнаго момента, мы будемъ предполагать отложенною или проведенною изъ точки K.

Проэкція на ось $X^{овъ}$ главнаго момента $Л_k$ выразится слѣдующею суммою:

$$(Л_k)_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left((y_i - y_k) Z_i - (z_i - z_k) Y_i\right),$$

или, что то же самое, такъ:

$$(Л_k)_x = Л_x + z_k B_y - y_k B_z \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(633, a)}$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$(Л_k)_y = Л_y + x_k B_z - z_k B_x, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(633, b)}$$

$$(Л_k)_z = Л_z + y_k B_x - x_k B_y; \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(633, c)}$$

здѣсь B_x, B_y, B_z, означаютъ слѣдующія суммы:

$$B_x = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad B_y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \quad B_z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \ldots\ldots \quad \textbf{(634)}$$

т. е., это суть проэкціи на оси координатъ геометрической суммы B всѣхъ силъ F_1, F_2, ... F_n; если бы всѣ эти силы, сохраняя свои величины и направленія, были приложены къ одной точкѣ, то сила B была бы ихъ равнодѣйствующею. Мы условимся называть геометрическую сумму B данныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, *главнымъ векторомъ этихъ силъ* *).

---

*) Многіе авторы называютъ геометрическую сумму B данныхъ силъ — равнодѣйствующею и тѣмъ даютъ поводъ нѣкоторымъ читателямъ, мало зна-

Изъ формулъ (632) и (633) можно извлечь правило, опредѣляющее, какъ измѣняется величина и направленіе главнаго момента данныхъ силъ при перемѣнѣ центра моментовъ.

Предположимъ, что главный векторъ B данныхъ силъ проведенъ изъ начала координатъ O и вообразимъ, что онъ изображаетъ нѣкоторую силу, приложенную къ этой точкѣ; означимъ черезъ $L_k(B_0)$ моментъ этой воображаемой силы вокругъ центра K и составимъ, по формуламъ (632), выраженія проэкцій этого момента на оси координатъ; для этого надо въ этихъ формулахъ подставить: B_0, B_x, B_y, B_z вмѣсто F_i, X_i, $У_i$, Z_i и нули — вмѣсто x_i, y_i, z_i; получимъ:

$$L_k(B_0)\cos(L_k(B_0), X) = z_k B_y - y_k B_z\,,$$

$$L_k(B_0)\cos(L_k(B_0), У) = x_k B_z - z_k B_x\,,$$

$$L\ (B_0)\cos(L_k(B_0), Z) = y_k B_x - x_k B_y\,;$$

это — тѣ самыя разности, которыя находятся во вторыхъ частяхъ формулъ (633), слѣдовательно, эти формулы выражаютъ, что:

$$\overline{Л_k} = \overline{Л_0} + \overline{L_k(B_0)}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(635)}$$

т. е., *что главный моментъ данныхъ силъ вокругъ центра K можетъ быть полученъ какъ геометрическая сумма, составленная изъ главнаго момента тѣхъ же силъ вокругъ центра O и изъ момента вокругъ центра K главнаго вектора тѣхъ же силъ, проведеннаго изъ точки O.*

На чертежѣ 57-мъ изображено построеніе главнаго момента $Л_k$ по этому правилу; $\overline{OЛ_0}$ изображаетъ главный моментъ $Л_0$, длина $\overline{KL'}$ — моментъ воображаемой силы $\overline{OB_0}$, приложенной къ точкѣ O, вокругъ

комымъ съ механикою, впадать въ заблужденія относительно значенія этой воображаемой силы B.

Мы назвали силу B «главнымъ векторомъ» слѣдуя примѣру О. И. Сомова (см. Раціональную Механику, часть 2-ю, стр. 276).

центра K; длина $\overline{KЛ_k}$, изображающая главный моментъ $Л_k$, есть діагональ параллелограмма, построеннаго на сторонахъ $\overline{KL'}$ и $\overline{KЛ_0'}$; послѣдняя равна и параллельна длинѣ $\overline{OЛ_0}$.

Приведенное здѣсь правило измѣненія главнаго момента при перемѣнѣ центра моментовъ тождественно съ правиломъ, опредѣляющимъ измѣненіе скорости поступательной части движенія твердаго тѣла при перемѣнѣ полюса вращенія (см. стр. 127 кинематической части); формулы (633) имѣютъ тотъ же составъ, что и формулы (144) страницы 127-й кинематической части, такъ что изъ послѣднихъ получимъ первыя, если замѣнимъ:

полюсъ $Ю(x_ю, y_ю, z_ю)$	— —	центромъ O,
полюсъ $Я(x_я, y_я, z_я)$	— —	центромъ $K(x_k, y_k, z_k)$,
угловую скорость: $\Omega(P, Q, R)$,	— —	главнымъ векторомъ: $B(B_x, B_y, B_z)$,
скорость полюса $Ю$: $w_ю(x'_ю, y'_ю, z'_ю)$,	— —	главнымъ моментомъ: $Л_0(Л_x, Л_y, Л_z)$,
скорость полюса $Я$: $w_я(x_я', y_я', z_я')$	— —	главнымъ моментомъ: $Л_k((Л_k)_x, (Л_k)_y, (Л_k)_z)$.

Подмѣтивъ такую взаимность между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею главныхъ моментовъ данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, мы можемъ, на основаніи этой взаимности, заключить о существованіи слѣдующей зависимости между величинами и направленіями главныхъ моментовъ вокругъ различныхъ центровъ.

Главные моменты данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, находящихся на какой либо, параллельной главному вектору этихъ силъ, прямой, равны и параллельны между собою.

Всѣ главные моменты данныхъ силъ вокругъ всевозможныхъ

центровъ имѣютъ равныя проэкціи на направленіе главнаго вектора; а именно эти проэкціи равны:

$$Л_k \cos(Л_k, B) = \frac{Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z}{B} = Л_0 \cos(Л_0, B) \; . \; . \; \textbf{(636)}$$

Существуетъ прямая линія, параллельная главному вектору, образуемая тѣми центрами, вокругъ которыхъ главный моментъ имѣетъ наименьшую величину; эта линія называется центральною осью данныхъ силъ. Главный моментъ вокругъ какого либо центра, находящагося на центральной оси, направленъ по самой оси и равенъ:

$$Л_ц = Л_0 \cos(Л_0, B) = \frac{Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z}{B} \; . \; . \; . \; \textbf{(636, bis)}$$

Если главный моментъ вокругъ какого либо центра перпендикуляренъ къ главному вектору, то главные моменты вокругъ всѣхъ центровъ перпендикулярны къ тому же направленію, а главный моментъ вокругъ центровъ, находящихся на центральной оси, равенъ нулю; значитъ, если главный векторъ и главный моментъ данныхъ силъ вокругъ начала координатъ удовлетворяютъ условію:

$$Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{(637)}$$

то можно найти безчисленное множество центровъ, вокругъ которыхъ главный моментъ данныхъ силъ равенъ нулю; всѣ эти центры лежатъ на прямой, параллельной главному вектору данныхъ силъ.

§ 95. Главный моментъ количествъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ.

Величины $л_x$, $л_y$, $л_z$ (629) § 93 суть проэкціи на оси координатъ *главнаго момента* вокругъ начала координатъ *количествъ движенія* всѣхъ точекъ системы; мы будемъ обозначать величину и направленіе этого главнаго момента знакомъ $л_0$ и будемъ изображать его длиною, проведенною изъ начала координатъ, равною геометрической суммѣ длинъ, изображающихъ моменты $l_0(m_1v_1)$, $l_0(m_2v_2)$, ... $l_0(m_nv_n)$ количествъ движеній точекъ системы вокругъ того же начала координатъ.

Относительно главныхъ моментовъ количествъ движенія системы точекъ вокругъ другихъ центровъ можно сказать то же самое, что сказано относительно главныхъ моментовъ силъ.

Главный векторъ количествъ движенія системы точекъ можетъ быть названъ количествомъ движенія центра инерціи всей системы, если предположить, что въ послѣднемъ сосредоточена масса всей системы; въ самомъ дѣлѣ, на основаніи равенствъ (620) § 86-го получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = M x_c', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = M y_c', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = M z_c' \; . \; . \; (638)$$

Проэкціи на оси координатъ главнаго момента л_k количествъ движенія системы вокругъ центра K выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$(\text{л}_k)_x = \text{л}_k \cos(\text{л}_k, X) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big((y_i - y_k) z_i' - (z_i - z_k) y_i' \Big) =$$

$$= \text{л}_x + M y_c' z_k - M z_c' y_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (639, \text{a})$$

$$(\text{л}_k)_y = \text{л}_k \cos(\text{л}_k, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big((z_i - z_k) x_i' - (x_i - x_k) z_i' \Big) =$$

$$= \text{л}_y + M z_c' x_k - M x_c' z_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (639, \text{b})$$

$$(\text{л}_k)_z = \text{л}_k \cos(\text{л}_k, Z) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big((x_i - x_k) y_i' - (y_i - y_k) x_i' \Big) =$$

$$= \text{л}_z + M x_c' y_k - M y_c' x_k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (639, \text{c})$$

Проэкціи на оси координатъ главнаго момента количествъ движенія системы точекъ могутъ быть еще выражены въ секторьяльныхъ

скоростяхъ проэкцій точекъ на плоскости координатъ (см. стр. 99—101); напримѣръ:

$$л_x = 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i\sigma_i(yz), \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(640, a)}$$

$$л_y = 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i\sigma_i(zx), \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(640, b)}$$

$$л_z = 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i\sigma_i(xy) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(640, c)}$$

§ 96. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (628), составленныхъ въ § 93-мъ.

Во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій заключаются проэкціи на оси координатъ главнаго момента вокругъ начала координатъ всѣхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкамъ системы.

Длина, изображающая $л_0$ и проведенная изъ начала координатъ измѣняетъ съ теченіемъ времени свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ нѣкоторую кривую линію, которую можно назвать *годографомъ главнаго момента количествъ движенія* системы точекъ.

Уравненія (628) выражаютъ, что скорость точки, чертящей годографъ главнаго момента (вокругъ O) количествъ движенія системы точекъ, равна и параллельна длинѣ, изображающей главный моментъ (вокругъ O) всѣхъ задаваемыхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкамъ системы.

§ 97. Видъ дифференціальныхъ уравненій (628) въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ реакцій равенъ нулю.

Если главный моментъ вокругъ начала координатъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю во всѣхъ положеніяхъ системы, то тогда дифференціальныя уравненія (628) получаютъ такой видъ:

$$\frac{dл_x}{dt} = Л_x,\ \frac{dл_y}{dt} = Л_y,\ \frac{dл_z}{dt} = Л_z \ldots\ldots\ \textbf{(641}$$

Главный моментъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

Когда всѣ точки системы свободны.

Когда точки системы связаны только между собою идеальными стержнями, или гибкими нерастяжимыми нитями, или связями примѣра 55-го, §§ *59 и 68, стр. 306 и 345 — 346,* потому что тогда моменты обѣихъ реакцій каждой такой связи равны и прямопротивоположны; но ни одна изъ точекъ системы не должна быть связана никакою связью съ какими либо неподвижными точками или съ точками, посторонними системѣ.

Въ этихъ случаяхъ равенъ нулю главный моментъ всѣхъ реакцій не только вокругъ начала координатъ, но также и вокругъ любаго центра.

Въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы будемъ предполагать, что связи, которымъ подчинены точки системы, принадлежатъ къ числу тѣхъ, для которыхъ главный моментъ реакцій есть нуль.

§ 98. Интегралы, выражающіе законъ площадей. Неизмѣняемая плоскость.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемыя силы при всѣхъ положеніяхъ системы удовлетворяютъ условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

тогда первое изъ дифференціальныхъ уравненій (641) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\text{л}_x}{dt} = 0,$$

а такъ какъ дифференціальныя уравненія (628) или (641) получены изъ дифференціальныхъ уравненій (517) движенія системы точекъ, то интегралъ

$$\text{л}_x = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(642, a)}$$

есть одинъ изъ первыхъ интеграловъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (517); этотъ интегралъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{642, a})$$

можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$2(m_1\sigma_1(yz) + m_2\sigma_2(yz) + \ldots + m_n\sigma_n(yz)) = C_1 \ldots (\mathbf{642, a}, \text{bis})$$

Слѣдовательно, *если при всѣхъ положеніяхъ системы точекъ проэкція на ось $X^{\text{овъ}}$ главнаго момента задаваемыхъ силъ равна нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ имѣютъ интегралъ, выражающій, что проэкція на ту же ось главнаго момента количествъ движенія сохраняетъ постоянную величину.*

Законъ движенія, представляемый этимъ интеграломъ, называется *закономъ площадей въ плоскости* YZ и можетъ быть выраженъ (по формулѣ (642, a, bis)) слѣдующимъ образомъ: *секторьяльную скорость проэкціи каждой точки на плоскость* YZ *помножимъ на массу ея и составимъ подобныя произведенія для всѣхъ точекъ системы; сумма всѣхъ этихъ произведеній будетъ постоянною величиною во все время движенія системы.*

Если при всѣхъ положеніяхъ системы точекъ главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей будетъ имѣть мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, т. е., дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ будутъ тогда имѣть три интеграла: (642, a) и два слѣдующіе:

$$\text{л}_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i x_i' - x_i z_i') = C_2 \ldots\ldots\ldots (\mathbf{642, b})$$

$$\text{л}_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i y_i' - y_i x_i') = C_3 \ldots\ldots\ldots (\mathbf{642, c})$$

Эти три интеграла выражаютъ, что *главный моментъ* (*вокругъ* O) *количествъ движенія системы точекъ сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе.*

Въ этихъ случаяхъ, въ которыхъ законъ площадей имѣетъ мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, онъ имѣетъ мѣсто также и во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть $\mathfrak{F}$ есть одна изъ такихъ плоскостей и OP — направленіе, перпендикулярное къ ней; по формулѣ (142), стр. 105, § 24-го, секторьяльная скорость проэкціи точки m на плоскость $\mathfrak{F}$ выражается такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \frac{l_0 \cos(l_0, P)}{2m}, \qquad \textbf{(142)}$$

поэтому секторьяльная скорость проэкціи точки m_i на плоскость $\mathfrak{F}$ выразится такъ:

$$\sigma_i(\mathfrak{F}) = \frac{l_0(m_i v_i) \cos(l_0(m_i v_i), P)}{2m_i}, \qquad \textbf{(643)}$$

гдѣ $l_0(m_i v_i)$ означаетъ величину и направленіе момента вокругъ начала координатъ количества движенія точки m_i.

Изъ формулы (643) слѣдуетъ:

$$2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = \sum_{i=1}^{i=n} l_0(m_i v_i) \cos(l_0(m_i v_i), P),$$

но такъ какъ главный моментъ количествъ движенія есть геометрическая сумма моментовъ количествъ движенія всѣхъ точекъ, то вторая часть послѣдняго равенства равна проэкціи л_0 на направленіе P:

$$2\sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = \text{л}_0 \cos(\text{л}_0, P), \qquad \textbf{(644)}$$

а это равенство выражаетъ законъ площадей въ плоскости $\mathfrak{F}$, потому что $\text{л}_0 \cos(\text{л}_0, P)$ есть величина постоянная, такъ какъ OP есть направленіе постоянное и л_0 сохраняетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину.

Если означимъ черезъ $\mathfrak{r}_i$ проэкцію радіуса вектора точки m_i на

плоскость $\mathfrak{F}$, а черезъ $\mathfrak{f}_i$ — уголъ, составляемый направленіемъ $\mathfrak{r}_i$ съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости $\mathfrak{F}$, то, съ помощью извѣстныхъ намъ выраженій (§ 23) секторьяльной скорости, можно представить равенство (644) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \mathfrak{r}_i^{\,2} \frac{d\mathfrak{f}_i}{dt} = \lambda_0 \cos(\lambda_0, P) \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(644, bis)}$$

И такъ, *если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, и притомъ удвоенная сумма произведеній, составленныхъ изъ массъ точекъ и изъ ихъ секторьяльныхъ скоростей въ этой плоскости, равна проэкціи главнаго момента количествъ движенія на нормаль къ плоскости.*

Одна изъ этихъ плоскостей отличается отъ всѣхъ прочихъ тѣмъ, что для нея вышесказанная сумма имѣетъ величину бо̀льшую, чѣмъ для всякой другой плоскости; эта плоскость, перпендикулярная къ направленію λ_0, названа Лапласомъ *неизмѣняемою плоскостью*; законъ площадей въ этой плоскости выражается такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^{\,2} \frac{d\theta_i}{dt} = \lambda_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(645)}$$

гдѣ ρ_i означаетъ проэкцію радіуса вектора точки m_i на неизмѣняемую плоскость, а θ_i — уголъ, составляемый направленіемъ ρ_i съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ этой плоскости.

Для всякой плоскости, проходящей черезъ направленіе λ_0, постоянная, находящаяся во второй части равенства (644, bis), равна нулю.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ системы, таковы, что при всякомъ положеніи системы главный моментъ ихъ вокругъ центра K равенъ нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ имѣютъ три интеграла:

$$(\lambda_k)_x = C_1, \; (\lambda_k)_y = C_2, \; (\lambda_k)_z = C_3,$$

(гдѣ $(\lambda_k)_x$, $(\lambda_k)_y$, $(\lambda_k)_z$ суть выраженія (639, a, b, c) § 95) и законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ точку K; неизмѣняемая плоскость, конечно, перпендикулярна къ направленію главнаго момента λ_k количествъ движенія вокругъ центра K.

§ 99. Законъ площадей въ относительномъ движеніи системы матерьяльныхъ точекъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, совершающую поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ; центръ инерціи C возьмемъ за начало подвижныхъ координатныхъ осей $C\Xi$, CY, CZ, параллельныхъ неподвижнымъ осямъ координатъ; относительныя координаты точки m_i по отношенію къ этимъ осямъ будутъ:

$$\xi_i = x_i - x_c,\ \ \eta_i = y_i - y_c,\ \ \zeta_i = z_i - z_c.$$

Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія (517) системы точекъ можно замѣнить абсолютныя координаты x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,... суммами: $(\xi_1 + x_c)$, $(\eta_1 + x_c)$, $(\zeta_1 + x_c)$, $(\zeta_2 + x_c)$, ...; это въ особенности умѣстно въ тѣхъ случаяхъ, когда функціи ϑ_1, ϑ_2, . . . ϑ_p и выраженія задаваемыхъ силъ заключаютъ только разности соотвѣтственныхъ координатъ различныхъ паръ точекъ, а не самыя координаты въ отдѣльности; въ этихъ случаяхъ дифференціальныя уравненія (517) легко преобразовать въ дифференціальныя уравненія, заключающія только относительныя координаты и ихъ производныя по времени.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ связей заключаются только разности координатъ: $(x_i - x_j)$, $(y_i - y_j)$, $(z_i - z_j)$ и др., а не отдѣльныя координаты, то тогда въ уравненіяхъ (616) § 85-го члены, заключающіе множителей $\lambda(\vartheta_1)$, $\lambda(\vartheta_2)$, ... $\lambda(\vartheta_p)$, взаимно сокращаются; напримѣръ, если ϑ_1 заключаетъ x_i только въ разностяхъ: $(x_i - x_1)$,

$(x_i - x_2)$, которыя мы временно означимъ черезъ x_{1i} и x_{2i}, то въ уравненіи (616, а) будетъ заключаться членъ:

$$\lambda(\varepsilon_1)\left[\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_{2i}}\right],$$

выражающій проэкцію на ось $X^{овъ}$ реакціи связи $\varepsilon_1 = 0$ въ точкѣ m_i; этотъ членъ сократится съ членами:

$$-\lambda(\varepsilon_1)\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_{1i}}, \quad -\lambda(\varepsilon_1)\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_{2i}},$$

входящими въ составъ выраженій проэкцій на ось $X^{овъ}$ реакцій той же связи въ точкахъ m_1 и m_2; изъ этого слѣдуетъ, что при такихъ связяхъ дифференціальныя уравненія (616) § 85-го получаютъ видъ уравненій (616 А) § 87, то есть:

$$Mx_c'' = B_x, \ My_c'' = B_y, \ Mz_c'' = B_z; \ldots \quad \textbf{(616, A)}$$

при посредствѣ этихъ уравненій дифференціальныя уравненія (517) § 70-го могутъ быть преобразованы въ слѣдующія:

$$m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = X_i - \frac{m_i}{M}B_x + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\varepsilon_k)\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} \ldots\ldots \quad \textbf{(646,ai)}$$

$$m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = Y_i - \frac{m_i}{M}B_y + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\varepsilon_k)\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial y_i} \ldots\ldots \quad \textbf{(646,bi)}$$

$$m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = Z_i - \frac{m_i}{M}B_z + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda(\varepsilon_k)\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z_i}, \ldots\ldots \quad \textbf{(646,ci)}$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ 1, 2, 3, ... n; вторыя части этихъ дифференціальныхъ уравненій заключаютъ разности $(x_i - x_j)$, $(y_i - y_j)$, $(z_i - z_j)$ и проч., которыя могутъ быть замѣнены разностями $(\xi_i - \xi_j)$, $(\eta_i - \eta_j)$, $(\zeta_i - \zeta_j)$ и проч.

При этомъ надо принять во вниманіе слѣдующія равенства:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i = 0, \ \sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i = 0, \ \sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i = 0, \ldots\ldots \quad \textbf{(647)}$$

имѣющія мѣсто потому, что начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы.

Напримѣръ, въ примѣрѣ 61 (стр. 326—327), гдѣ $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = 0$, и всѣ точки свободны, дифференціальныя уравненія (646) будутъ слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} m_i\xi_i'' &= -\mu m_i M\xi_i \\ m_i\eta_i'' &= -\mu m_i M\eta_i \\ m_i\zeta_i'' &= -\mu m_i M\zeta_i \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (648, \mathrm{I})$$

Эти дифференціальныя уравненія суть тѣ же самыя, съ которыми мы ознакомились на стр. 82; отсюда слѣдуетъ, что каждая изъ матерьяльныхъ точекъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ описываетъ эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ инерціи системы.

Предположимъ, что связи, которыми связаны точки системы, таковы, что главный моментъ реакцій вокругъ центра инерціи системы равенъ нулю при всякомъ положеніи системы.

Какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) составлены три дифференціальныя уравненія (628) параграфа 93-го, такимъ же образомъ изъ дифференціальныхъ уравненій (646) можно составить три слѣдующія дифференціальныя уравненія:

Первое:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i\zeta_i'' - \zeta_i\eta_i'') = \sum_{i=1}^{i=n}(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) -$$

$$- \frac{B_z}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i + \frac{B_y}{M}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i, \dots\dots\dots\dots (649, \mathrm{a})$$

въ силу же равенствъ (647) двѣ послѣднія суммы второй части этого уравненія равны нулю, поэтому получится:

$$\frac{d(л_c)_x}{dt} = (Л_c)_x, \dots\dots\dots\dots (649, \mathrm{a})$$

гдѣ $(л_c)_x$ и $(Л_c)_x$ суть проэкціи на ось $X^{овъ}$ главныхъ моментовъ во-

кругъ центра инерціи количествъ движенія системы и задаваемыхъ силъ (см. формулы (650) и (651)).

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d(л_c)_y}{dt} = (Л_c)_y \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(649, b)}$$

$$\frac{d(л_c)_z}{dt} = (Л_c)_z ; \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(649, c)}$$

гдѣ:

$$(л_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i\zeta_i' - \zeta_i\eta_i'), \ldots\ldots\ldots \textbf{(650, a)}$$

$$(Л_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n}(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i); \ldots\ldots\ldots \textbf{(651, a)}$$

(легко догадаться, какой видъ имѣютъ выраженія величинъ $(л_c)_y$, $(л_c)_z$, $(Л_c)_y$, $(Л_c)_z$).

Надо замѣтить, что величины $(л_c)_x$, $(л_c)_y$, $(л_c)_z$ могутъ быть выражены еще иначе; такъ такъ:

$$\xi_i' = x_i' - x_c', \ \eta_i' = y_i' - y_c', \ \zeta_i' = z_i' - z_c',$$

то $(л_c)_x$ можно представить такъ:

$$(л_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i z_i' - \zeta_i y_i') - z_c' \sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i + y_c' \sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i,$$

на основаніи же формулъ (647), двѣ послѣднія суммы равны нулю, а потому:

$$(л_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\eta_i \frac{dz_i}{dt} - \zeta_i \frac{dy_i}{dt}\right) \ldots \textbf{(650, a, bis)}$$

и проч.; т. е. по формуламъ (650), величины $(л_c)_x$, $(л_c)_y$, $(л_c)_z$ суть проэкціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ относительнаго движенія матерьяльныхъ точекъ по отношенію къ вообра-

жаемой неизмѣняемой средѣ, по формуламъ же (650, bis) онѣ же суть проэкціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ абсолютнаго движенія тѣхъ же точекъ.

Если задаваемыя силы при всякомъ положеніи системы удовлетворяютъ условіямъ:

$$(Л_c)_x = 0,\ (Л_c)_y = 0,\ (Л_c)_z = 0, \ldots\ldots \textbf{(652)}$$

то дифференціальныя уравненія движенія имѣютъ слѣдующіе интегралы:

$$(л_c)_x = C_1,\ (л_c)_y = C_2,\ (л_c)_z = C_3 \ldots\ldots\ldots \textbf{(653)}$$

Слѣдовательно, *если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю при всѣхъ положеніяхъ системы, то законъ площадей имѣетъ мѣсто въ плоскостяхъ* **YZ**, **ZΞ**, **ΞZ**, *движущихся вмѣстѣ съ центромъ инерціи, черезъ который онъ проходятъ.* Главный моментъ вокругъ центра инерціи количествъ движенія точекъ системы сохраняетъ тогда постоянную величину и неизмѣнное направленіе; перпендикулярная къ нему плоскость, заключающая въ себѣ центръ инерціи, остается, поэтому, параллельною самой себѣ, переносясь вмѣстѣ съ неизмѣняемою средою въ пространствѣ; эта плоскость есть *неизмѣняемая плоскость* относительнаго движенія системы точекъ по отношенію къ воображаемой средѣ, движущейся вмѣстѣ съ центромъ инерціи.

Называя эту плоскость неизмѣняемою, мы подъ этимъ подразумѣваемъ нижеслѣдующее.

Представимъ себѣ, что проведена какая либо плоскость черезъ центръ инерціи C системы и что эта плоскость неизмѣнно связана съ воображаемою неизмѣняемою средою; составимъ *секторьяльныя скорости вокругъ C относительнаго движенія* проэкцій точекъ системы на эту плоскость; секторьяльную скорость каждой точки помножимъ на массу ея и возьмемъ сумму всѣхъ такихъ произведеній; эта сумма сохраняетъ постоянную величину $л_c \cos(P, л_c)$ во все время движенія (гдѣ P — направленіе нормали къ плоскости). Неизмѣняемая плоскость, объ которой мы говоримъ, отличается отъ прочихъ

плоскостей, проведенныхъ черезъ C, тѣмъ, что для нея вышесказанная сумма имѣетъ бо́льшую величину (а именно — $л_c$), чѣмъ для всѣхъ прочихъ плоскостей.

§ 100. Примѣры случаевъ, въ которыхъ законы площадей имѣютъ мѣсто.

Если всѣ точки системы свободны, если нѣтъ другихъ силъ, кромѣ взаимнодѣйствій между точками системы, если притомъ силы взаимнодѣйствія между каждыми двумя точками системы, не только равны и прямопротивоположны, но и *направлены вдоль по линіи, соединяющей эти точки*, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости, про́ходящей черезъ какую угодно точку пространства и во всякой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи системы, движущейся вмѣстѣ съ нимъ и остающейся параллельною самой себѣ.

Примѣръ 61-й (стр. 326). Въ этомъ примѣрѣ система состоитъ только изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ. Центръ инерціи находится на линіи кратчайшаго разстоянія между точками и дѣлитъ это разстояніе въ постоянномъ отношеніи, равномъ обратному отношенію массъ точекъ; изъ этого слѣдуетъ, что траэкторіи относительнаго движенія точекъ суть кривыя подобныя между собою, подобно-расположенныя въ воображаемой неизмѣняемой средѣ и имѣющія центромъ подобія — центръ инерціи C этихъ точекъ.

Можно показать, что обѣ точки совершаютъ относительное движеніе въ одной плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи C. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ:

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}=\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=-\frac{m_1}{m_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots (654)$$

(гдѣ ρ_1 и ρ_2 суть длины радіусовъ векторовъ CM_1 и CM_2 движущихся точекъ) слѣдуютъ равенства:

$$\frac{\xi_2'}{\xi_1'}=\frac{\eta_2'}{\eta_1'}=\frac{\zeta_2'}{\zeta_1'}=-\frac{m_1}{m_2}; \ \ldots\ldots\ldots\ldots (655)$$

на основаніи этихъ равенствъ интегралы:

$$m_1(\eta_1\zeta_1'-\zeta_1\eta_1')+m_2(\eta_2\zeta_2'-\zeta_2\eta_2')=C_1,$$
$$m_1(\zeta_1\xi_1'-\xi_1\zeta_1')+m_2(\zeta_2\xi_2'-\xi_2\zeta_2')=C_2,$$
$$m_1(\xi_1\eta_1'-\eta_1\xi_1')+m_2(\xi_2\eta_2'-\eta_2\xi'_2)=C_3$$

могутъ быть преобразованы въ слѣдующія равенства:

$$m_1(\eta_1\zeta_1' - \zeta_1\eta_1') = C_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\zeta_1\xi_1' - \xi_1\zeta_1') = C_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\xi_1\eta_1' - \eta_1\xi_1') = C_3 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

изъ которыхъ видно, что точка m_1 совершаетъ свое относительное движеніе въ плоскости:

$$C_1\xi_1 + C_2\eta_1 + C_3\zeta_1 = 0 \; \dots\dots\dots \; \textbf{(656)}$$

Въ той же самой плоскости совершаетъ свое относительное движеніе и точка m_2; эта плоскость есть неизмѣняемая плоскость относительнаго движенія системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C.

Изъ того, что было упомянуто относительно настоящаго примѣра въ § 87 (стр. 429), и изъ только что приведенныхъ разсужденій можемъ составить себѣ нѣкоторое, хотя еще и неполное, представленіе о движеніи точекъ.

Центръ инерціи C обѣихъ точекъ движется равномѣрно и прямолинейно; представимъ себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; движеніе каждой изъ матерьяльныхъ точекъ можно разсматривать какъ составное изъ переноснаго движенія вмѣстѣ съ этою воображаемою средою и изъ относительнаго движенія по отношенію къ этой средѣ; относительныя движенія обѣихъ точекъ совершаются въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи, и притомъ траэкторіи обѣихъ точекъ подобны между собою и подобно расположены, имѣя центромъ подобія точку C; что же касается до вида траэкторій, то онъ зависитъ отъ вида функціи $F(r_{12})$.

Въ примѣрѣ 62-мъ центръ инерціи системы также движется прямолинейно и равномѣрно и притомъ, какъ замѣчено въ предыдущемъ параграфѣ, каждая изъ матерьяльныхъ точекъ описываетъ свой эллипсъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; центры всѣхъ эллипсовъ совпадаютъ съ центромъ инерціи системы. Въ этомъ случаѣ относительное движеніе каждой матерьяльной точки удовлетворяетъ закону площадей, а потому этотъ законъ имѣетъ мѣсто также и

для всей системы, во всякой плоскости, проведенной через центръ инерціи.

Положеніе неизмѣняемой плоскости зависитъ отъ положеній и размѣровъ всѣхъ эллипсовъ.

Если всѣ точки системы свободны и къ нимъ, кромѣ вышесказанныхъ силъ взаимнодѣйствія, приложены силы, направленныя къ началу координатъ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Примѣръ 85-й. Система состоитъ изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ, между которыми дѣйствуютъ тѣ же самыя силы взаимнодѣйствія, какъ и въ примѣрѣ 61-мъ; кромѣ того, точка m_1 притягивается къ началу координатъ силою $\mu_1 f(r_1)$, и точка m_2 — силою $\mu_2 f(r_2)$.

Въ этомъ случаѣ траэкторіи точекъ могутъ быть не плоскими кривыми линіями; но, каковы бы ни были эти кривыя, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проведенной черезъ начало координатъ; неизмѣняемая плоскость обладаетъ въ этомъ случаѣ тѣмъ свойствомъ, что въ ней заключается прямая линія, по которой пересѣкаются двѣ плоскости: одна — проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_1, другая — черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_2; эти плоскости, конечно, измѣняютъ свои положенія вмѣстѣ съ движеніемъ матерьяльныхъ точекъ, но линія пересѣченія ихъ остается въ неизмѣняемой плоскости, хотя и можетъ мѣнять въ ней положеніе. Доказать это свойство неизмѣняемой плоскости весьма нетрудно. Дѣйствительно, плоскость, проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость m_1, имѣетъ нормалью направленіе момента количества движенія этой точки; плоскость, проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_2, имѣетъ нормалью направленіе момента ея количества движенія; наконецъ, неизмѣняемая плоскость имѣетъ нормалью главный моментъ количествъ движенія; всѣ эти три момента заключаются въ одной плоскости, а потому перпендикулярныя къ нимъ плоскости пересѣкаются по одной линіи, что и требовалось доказать.

Если, кромѣ вышесказанныхъ взаимнодѣйствій и силъ, направленныхъ къ началу координатъ, къ точкамъ системы приложены силы, направленія которыхъ пересѣкаютъ нѣкоторую неподвижную ось, проходящую черезъ начало координатъ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто въ той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, которая перпендикулярна къ этой оси.

Если точки системы не свободны, но связи между ними принадлежатъ къ числу тѣхъ, которыя указаны въ примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ, 55-мъ, (стр. 305 — 306), 56-мъ, 60-мъ, (стр. 306 и 324) и притомъ, если ни одна изъ такихъ связей не связываетъ ни одной изъ матерьяльныхъ точекъ системы ни съ какою либо неподвижною точкою, ни съ какою либо точкою постороннею системѣ; если, кромѣ того, всѣ силы, приложенныя къ матерьяльнымъ точкамъ системы, суть силы взаимнодѣйствія между парами точекъ, попарно равныя, прямопротивоположныя и направленныя вдоль по линіямъ, соединяющимъ взаимнодѣйствующія матерьяльныя точки, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости, даже и не проходящей черезъ начало координатъ, а также и во всякой поступательно-движущейся плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи системы.

Такъ, напримѣръ, при движеніи неизмѣняемой системы точекъ (т. е., такой системы, точки которой связаны между собою неизмѣняемыми связями), если эта система свободна и не подвержена никакимъ силамъ, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости и во всякой поступательно-движущейся плоскости, проведенной черезъ центръ инерціи системы.

Если точки системы связаны между собою только вышеупомянутыми связями и къ нимъ, кромѣ вышеозначенныхъ взаимнодѣйствій, приложены силы, направленныя къ нѣкоторой неподвижной точкѣ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ эту точку.

Примѣръ 66-й, (стр. 371). Въ этомъ примѣрѣ четыре точки связаны четырьмя неизмѣняемыми связями и притягиваются къ началу координатъ; поэтому законъ площадей имѣетъ мѣсто для площадей, описываемыхъ радіусами векторами точекъ, проведенными изъ начала координатъ; кромѣ того, въ этомъ случаѣ законъ площадей имѣетъ мѣсто также и въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C, потому что здѣсь главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться; главный же моментъ количествъ движенія этой системы вокругъ центра инерціи, выражающійся такъ:

$$(m_1\xi^2 + m_2(l^2 - \xi^2))\vartheta',$$

долженъ, поэтому, сохранять постоянную величину, что и подтверждается однимъ изъ дифференціальныхъ уравненій системы, а именно тѣмъ, которое приведено въ послѣдней строкѣ страницы 371-й.

§ 101. Главный моментъ количествъ движенія сплошнаго тѣла.

Когда намъ придется разсматривать какой либо вопросъ о движеніи сплошнаго тѣла, то поступимъ такъ, какъ сказано въ § 89-мъ предыдущей главы, т. е. представимъ себѣ, что это тѣло раздѣлено на безконечно-малые элементы и что каждый элементъ замѣненъ матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ элемента и которая находится внутри или на поверхности элемента; поэтому проэкціи на оси координатъ главнаго момента вокругъ начала координатъ количествъ движенія сплошнаго тѣла выразятся слѣдующими интегралами, распространенными по объему тѣла:

$$л_x = \iiint \sigma(yz' - zy')dO, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(657, a)}$$

$$л_y = \iiint \sigma(zx' - xz')dO, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(657, b)}$$

$$л_z = \iiint \sigma(xy' - yx')dO \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(657, c)}$$

§ 102. Главный моментъ количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ или твердаго тѣла; проэкціи его на неподвижныя оси координатъ.

Въ вопросахъ о движеніи неизмѣняемыхъ системъ матерьяльныхъ точекъ или сплошныхъ твердыхъ тѣлъ придется нерѣдко имѣть дѣло съ выраженіями проэкцій главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ на неподвижныя оси координатъ и на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ системою. Въ этомъ и въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы составимъ эти выраженія и разсмотримъ свойства нѣкоторыхъ величинъ, входящихъ въ составъ этихъ выраженій.

Положимъ, что неизмѣняемая система состоитъ изъ n матерьяльныхъ точекъ. Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, съ которою точки системы неизмѣняемо связаны. Одну изъ точекъ этой среды обозначимъ буквою $Ю$.

Составимъ выраженіе проэкцій на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ главнаго момента вокругъ точки $Ю$ количествъ движенія неизмѣняемой системы матерьяльныхъ точекъ. Возьмемъ выраженіе:

$$(л_ю)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(y_i - y_ю) z_i' - (z_i - z_ю) y_i' \right] \,..\, \textbf{(639, a, bis)}$$

и подобныя же выраженія для $(л_ю)_y$ и $(л_ю)_z$, выразимъ заключающіяся въ нихъ скорости x_i', y_i', z_i' по формуламъ (142) страницы 125-й кинематической части, тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$(л_ю)_x = M((y_c - y_ю) z'_ю - (z_c - z_ю) y'_ю) +$$
$$+ (I_x)_ю P - S_{xy} Q - S_{zx} R \,..........\, \textbf{(658, a)}$$

$$(л_ю)_y = M((z_c - z_ю) x'_ю - (x_c - x_ю) z'_ю) +$$
$$+ (I_y)_ю Q - S_{yz} R - S_{xy} P \,........\, \textbf{(658, b)}$$

$$(л_ю)_z = M((x_c - x_ю) y'_ю - (y_c - y_ю) x'_ю) +$$
$$+ (I_z)_ю R - S_{zx} P - S_{yz} Q, \,..........\, \textbf{(658, c)}$$

гдѣ:

$$(I_x)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big((y_i - y_ю)^2 + (z_i - z_ю)^2 \Big),$$

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i - y_ю)(z_i - z_ю),$$

$$(I_y)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big((z_i - z_ю)^2 + (x_i - x_ю)^2 \Big),$$

$$S_{zx} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (z_i - z_ю)(x_i - x_ю),$$

$$(I_z)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((x_i - x_ю)^2 + (y_i - y_ю)^2\Big),$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i - x_ю)\,(y_i - y_ю).$$

§ 103. Проэкціи главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ на оси координатъ, неизмѣнно связянныя съ этою системою.

Проэкція этого главнаго момента на оси *ЮΞ*, *ЮΥ*, *ЮZ* мы будемъ обозначать слѣдующими знаками: $(л_ю)_\xi$, $(л_ю)_\eta$, $(л_ю)_\zeta$.

Очевидно, что эти проэкціи могутъ быть выражены слѣдующими трочленами:

$$(л_ю)_\xi = л_ю \cos(л_ю, \Xi) = (л_ю)_x\lambda_x + (л_ю)_y\lambda_y + (л_ю)_z\lambda_z \ldots \textbf{(659, a)}$$

$$(л_ю)_\eta = л_ю \cos(л_ю, \Upsilon) = (л_ю)_x\mu_x + (л_ю)_y\mu_y + (л_ю)_z\mu_z \ldots \textbf{(659, b)}$$

$$(л_ю)_\zeta = л_ю \cos(л_ю, Z) = (л_ю)_x\nu_x + (л_ю)_y\nu_y + (л_ю)_z\nu_z, \ldots \textbf{(659, c)}$$

гдѣ λ_x, μ_x, $\nu_x, \ldots \nu_z$ суть косинусы угловъ между координатными осями неподвижными и осями *ЮΞ*, *ЮΥ*, *ЮZ* (см. стр. 57 кинематической части).

Выразимъ въ трочленѣ (659, a) величины $(л_ю)_x$, $(л_ю)_y$, $(л_ю)_z$ по формуламъ (639, bis) предыдущаго параграфа, а величины λ_x, λ_y, λ_z по формуламъ (60 a, b, c) кинематической части (стр. 60), получимъ:

$$(л_ю)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big[\Big((y_i - y_ю)z_i' - (z_i - z_ю)y_i'\Big)(\mu_y\nu_z - \mu_z\nu_y) +$$

$$+ \Big((z_i - z_ю)x_i' - (x_i - x_ю)z_i'\Big)(\mu_z\nu_x - \mu_x\nu_z) +$$

$$+ \Big((x_i - x_ю)y_i' - (y_i - y_ю)x_i'\Big)(\mu_x\nu_y - \mu_y\nu_x)\Big];$$

выраженіе, заключающееся здѣсь въ прямыхъ скобкахъ, можетъ быть

преобразовано по формулѣ (154), приведенной на стр. 138-й кинематической части; оно окажется равнымъ:

$$\Big[\big((x_i-x_ю)\mu_x+(y_i-y_ю)\mu_y+(z_i-z_ю)\mu_z\big)(x_i'\nu_x+y_i'\nu_y+z_i'\nu_z)-$$

$$-\big((x_i-x_ю)\nu_x+(y_i-y_ю)\nu_y+(z_i-z_ю)\nu_z\big)(x_i'\mu_x+y_i'\mu_y+z_i'\mu_z)\Big],$$

то есть:

$$[\eta_i v_i \cos(v_i, \mathrm{Z}) - \zeta_i v_i \cos(v_i, \Upsilon)];$$

слѣдовательно, $(\lambda_ю)_\xi$, $(\lambda_ю)_\eta$, $(\lambda_ю)_\zeta$ могутъ быть выражены подъ видомъ слѣдующихъ суммъ:

$$(\lambda_ю)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\Big(\eta_i\cos(v_i, \mathrm{Z}) - \zeta_i\cos(v_i, \Upsilon)\Big)\ldots \textbf{(660, a)}$$

$$(\lambda_ю)_\eta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\Big(\zeta_i\cos(v_i, \Xi) - \xi_i\cos(v_i, \mathrm{Z})\Big)\ldots \textbf{(660, b)}$$

$$(\lambda_ю)_\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\Big(\xi_i\cos(v_i, \Upsilon) - \eta_i\cos(v_i, \Xi)\Big)\ldots \textbf{(660, c)}$$

Эти формулы аналогичны формуламъ (639 bis) предыдущаго параграфа.

Чтобы получить формулы, аналогичныя формуламъ (658) предыдущаго параграфа, выразимъ проэкціи скоростей точекъ неизмѣняемой системы на оси Ξ, Υ, Z по формуламъ (143) стр. 125 кинематической части, напримѣръ:

$$v_i\cos(v_i, \Xi) = w_ю\cos(w_ю, \Xi) + \zeta_i q - \eta_i r,$$

и проч.; получимъ:

$$(\lambda_ю)_\xi = Mw_ю\big(\eta_c\cos(w_ю, \mathrm{Z}) - \zeta_c\cos(w_ю, \Upsilon)\big) +$$

$$+ A_ю p - F_ю q - E_ю r\,;\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(661,a)}$$

$$(л_ю)_\eta = Mw_ю(\zeta_c \cos(w_ю, \Xi) - \xi_c \cos(w_ю, Z)) +$$

$$+ B_ю q - D_ю r - F_ю p, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (661, b)$$

$$(л_ю)_\zeta = Mw_ю(\xi_c \cos(w_ю, Y) - \eta_c \cos(w_ю, \Xi)) +$$

$$+ C_ю r - E_ю p - D_ю q, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (661, c)$$

гдѣ ξ_c, η_c, ζ_c суть относительныя координаты центра инерціи неизмѣняемой системы, а $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ — постоянныя величины, выражаемыя слѣдующими суммами:

$$A_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2), \ldots (662, a), \quad D_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i \zeta_i, \ldots (662, d)$$

$$B_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\zeta_i^2 + \xi_i^2), \ldots (662, b), \quad E_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i \xi_i, \ldots (662, e)$$

$$C_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), \ldots (662, c), \quad F_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i \eta_i \ldots (662, f)$$

§ 104. Моменты инерціи.

Величины $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$ (662, a, b, c) называются *моментами инерціи* неизмѣняемой системы точекъ вокругъ осей $Ю\Xi$, $ЮY$, $ЮZ$ *).

Моментомъ инерціи какой либо системы точекъ вокругъ какой либо оси KU (K есть одна изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ) *называется слѣдующая сумма*:

$$m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2 + \ldots + m_i\rho_i^2 + \ldots + m_n\rho_n^2,$$

гдѣ ρ_1, ρ_2, $\ldots \rho_n$ суть разстоянія точекъ системы отъ оси KU.

Такую сумму мы будемъ обозначать знакомъ $(I_U)_k$, гдѣ значокъ, поставленный внутри скобокъ, служитъ для обозначенія направленія

---

*) Величины $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ извѣстны у англійскихъ авторовъ подъ именемъ *произведеній инерціи* (product of inertia).

оси, а значокъ, поставленный внѣ скобокъ, — для обозначенія одной изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ; напримѣръ, моменты инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку *Ю* и параллельныхъ осямъ $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ мы обозначимъ символами $(I_x)_ю$, $(I_y)_ю$, $(I_z)_ю$, что уже и сдѣлано въ концѣ § 102.

Моментъ инерціи какого либо сплошнаго тѣла вокругъ оси *KU* выразится интеграломъ:

$$(I_U)_k = \iiint \sigma\rho^2 dO \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \textbf{(663)}$$

распространеннымъ по всему объему тѣла; здѣсь ρ означаетъ разстояніе элемента dO отъ оси *KU*.

Моментъ инерціи есть произведеніе изъ массы на квадратъ длины; единица моментовъ инерціи:

$$(\text{единица моментовъ инерціи}) = м \, . \, д^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \textbf{(664)}$$

можетъ быть разсматриваема, какъ моментъ инерціи матерьяльной точки, масса которой равна единицѣ и которая отстоитъ отъ оси (вокругъ которой составляютъ моментъ инерціи) на разстояніи, равномъ единицѣ длины.

При одномъ и томъ же относительномъ расположеніи точекъ системы между собою, моменты инерціи системы вокругъ различныхъ осей имѣютъ весьма различныя величины; однако, существуетъ нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, и нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ параллельныхъ между собою осей.

§ 105. Зависимость между моментами инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерціи. Главныя оси инерціи.

Для оріентированія данной системы точекъ или сплошнаго тѣла, представимъ себѣ неизмѣняемую среду, въ которой эта система или тѣло расположены и проведемъ черезъ точку *Ю*, черезъ которую про-

ходятъ разсматриваемыя оси, координатныя оси $Ю\Xi$, $ЮY$, $ЮZ$, неизмѣнно связанныя со средою.

Означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями координатъ какою либо осью $ЮU$ (черт. 58); пусть m_i есть одна изъ точекъ системы, r_i — радіусъ векторъ ея, проведенный изъ точки $Ю$; ξ_i, η_i, ζ_i — ея координаты относительно осей Ξ, Y, Z; ρ_i — разстояніе ея отъ оси $ЮU$.

Очевидно:

$$\rho_i^2 = r_i^2 \sin^2(r_i, U) = r_i^2 - r_i^2 \cos^2(r_i, U);$$

но:

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2; \quad r_i \cos(r_i, U) = \xi_i\lambda + \eta_i\mu + \zeta_i\nu,$$

поэтому:

$$\rho_i^2 = (1-\lambda^2)\xi_i^2 + (1-\mu^2)\eta_i^2 + (1-\nu^2)\zeta_i^2 -$$
$$- 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\zeta_i\eta_i;$$

далѣе:

$$1-\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad 1-\mu^2 = \nu^2 + \lambda^2, \quad 1-\nu^2 = \lambda^2 + \mu^2,$$

поэтому:

$$\rho_i^2 = \lambda^2(\eta_i^2 + \zeta_i^2) + \mu^2(\zeta_i^2 + \xi_i^2) + \nu^2(\xi_i^2 + \eta_i^2) -$$
$$- 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\xi_i\eta_i.$$

Отсюда получимъ слѣдующее выраженіе для момента инерціи системы вокругъ оси $ЮU$:

$$(I_U)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\rho_i^2 = A_ю\lambda^2 + B_ю\mu^2 + C_ю\nu^2 -$$
$$- 2D_ю\mu\nu - 2E_ю\nu\lambda - 2F_ю\lambda\mu, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(665)}$$

гдѣ $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ суть величины, выражаемыя суммами (662) § 103.

Эта формула выражаетъ зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ осей, проведенныхъ черезъ точку $Ю$; чтобы

представить эту зависимость въ болѣе наглядной формѣ, отложимъ отъ *Ю* по *ЮU* длину $\mathfrak{r}$, относящуюся къ единицѣ длины такъ, какъ корень изъ единицы моментовъ инерціи относится къ корню изъ $(I_U)_ю$, т. е.:

$$\mathfrak{r} = \frac{м^{\frac{1}{2}} \partial^2}{\sqrt{(I_U)_ю}};$$

координаты конца этой длины будутъ:

$$\xi = \mathfrak{r}\lambda, \quad \eta = \mathfrak{r}\mu, \quad \zeta = \mathfrak{r}\nu,$$

а потому равенство (665) можно преобразовать въ слѣдующій видъ:

$$1 = \frac{1}{м\partial^4}\Big[A_ю\xi^2 + B_ю\eta^2 + C_ю\zeta^2 - 2D_ю\eta\zeta - 2E_ю\zeta\xi - 2F_ю\xi\eta\Big] \,.\,. \mathbf{(666)}$$

Если представить себѣ, что то же самое сдѣлано для всевозможныхъ направленій, проведенныхъ изъ точки *Ю*, то концы длины $\mathfrak{r}$ образуютъ поверхность, выражаемую уравненіемъ (666).

Эта поверхность есть одна изъ поверхностей втораго порядка, имѣющая центръ въ точкѣ *Ю*; нетрудно убѣдиться, что это можетъ быть либо эллипсоидъ, либо круговой цилиндръ.

Въ самомъ дѣлѣ, если поверхность (666) имѣетъ безконечно-длинные радіусы векторы, то эти векторы должны быть направлены по тѣмъ осямъ, вокругъ которыхъ моменты инерціи системы точекъ равны нулю; но такихъ осей можетъ быть только одна, и то въ томъ только случаѣ, если вдоль по ней расположены всѣ точки системы; поэтому, либо всѣ радіусы векторы поверхности (666) имѣютъ конечныя длины (тогда это есть эллипсоидъ), либо только два радіуса вектора, прямопротивоположные другъ другу, безконечно велики (тогда это есть цилиндрическая поверхность съ круговымъ основаніемъ).

Въ частности, эллипсоидъ можетъ быть эллипсоидомъ вращенія планетарнымъ или удлиненнымъ, или сферою.

Круговой цилиндръ можно разсматривать тоже какъ эллипсоидъ, одна изъ главныхъ осей котораго удлинена до безконечности а двѣ прочія главныя оси равны между собою; такъ что можно сказать, что

поверхность (666) есть эллипсоидъ или которая либо изъ его разновидностей. Эту поверхность называютъ *эллипсоидомъ инерціи* (данной системы точекъ) *для точки Ю*.

Если оси координатъ $Ю\Xi$, $ЮY$, $ЮZ$ совмѣстимъ съ главными осями эллипсоида инерціи, то уравненіе его должно будетъ получить слѣдующій видъ:

$$1 = \frac{1}{мд^4}\left[\mathfrak{A}_ю\xi^2 + \mathfrak{B}_ю\eta^2 + \mathfrak{C}_ю\zeta^2\right]; \ldots\ldots\ldots (667)$$

слѣдовательно, величина момента инерціи данной системы матерьяльныхъ точекъ вокругъ оси $ЮU$, составляющей съ главными осями эллипсоида инерціи углы, косинусы которыхъ суть λ, μ, ν, можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$(I_U)_ю = \mathfrak{A}_ю\lambda^2 + \mathfrak{B}_ю\mu^2 + \mathfrak{C}_ю\nu^2 \ldots\ldots\ldots (668)$$

Главныя оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи* (данной системы точекъ или сплошнаго тѣла) *въ той точкѣ Ю, въ которой эллипсоидъ имѣетъ свой центръ*.

Величины $\mathfrak{A}_ю$, $\mathfrak{B}_ю$, $\mathfrak{C}_ю$ суть моменты инерціи системы вокругъ главныхъ осей инерціи въ точкѣ *Ю*; суммы же вида (662, d, e, f), такъ называемыя products of inertia, при этихъ осяхъ координатъ равны нулю, какъ видно изъ сравненія выраженія (668) съ выраженіемъ (665).

Такъ какъ за точку *Ю* можетъ быть взята какая угодно точка той неизмѣняемой среды, относительно которой мы оріентируемъ данную систему точекъ (или сплошное тѣло), то можемъ сказать слѣдующее:

Черезъ всякую точку можно провести три такія взаимно перпендикулярныя оси, что если возьмемъ эти оси за оси координатъ, то products of inertia данной системы (или сплошнаго тѣла) будутъ равны нулю; эти три оси суть главныя оси инерціи данной системы (или сплошнаго тѣла) въ разсматриваемой точкѣ.

Слово «инерція», входящее въ составъ вышеприведенныхъ терминовъ, должно указывать на то, что понятія, выражаемыя этими терминами,

играютъ существенную роль въ теоріи вращенія твердаго тѣла по инерціи; считаемъ нужнымъ теперь же дать нѣкоторыя указанія относительно этого предмета.

Представимъ себѣ, что данная система матерьяльныхъ точекъ есть система неизмѣняемая (или данное сплошное тѣло есть тѣло твердое) и что она можетъ свободно вращаться только вокругъ неподвижной оси *ЮU*; такъ какъ тогда угловая скорость Ω неизмѣняемой системы можетъ быть направлена только вдоль по оси *ЮU* или по противоположному ея продолженію, то величина главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы будетъ равна:

$$\Omega\sum_{i=1}^{i=n} m_i\rho_i^2 = (I_U)_ю\Omega,$$

а если угловая скорость будетъ равна единицѣ, то главный моментъ количествъ движенія неизмѣняемой системы будетъ равенъ:

$$\frac{1}{в}(I_U)_ю \dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(669)}$$

Извѣстно, что твердое тѣло, неподверженное никакимъ силамъ, но могущее свободно вращаться вокругъ неподвижной оси, будетъ вращаться вокругъ нея по инерціи съ постоянною угловою скоростью, съ тою, которая была сообщена ему ударомъ или какими либо силами, дѣйствовавшими на него, но прекратившими свое дѣйствіе.

Поэтому можно дать слѣдующее опредѣленіе величинѣ $(I_U)_ю$: *отношеніе* (669) *выражаетъ величину главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы, вращающейся по инерціи вокругъ оси ЮU съ угловою скоростью, равною единицѣ*; терминъ: «моментъ инерціи неизмѣняемой системы точекъ вокругъ оси *ЮU*» есть сокращенное выраженіе этого опредѣленія.

«Эллипсоидъ инерціи», который слѣдовало бы называть *эллипсоидомъ моментовъ инерціи*, имѣетъ существенное значеніе въ теоріи вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки по инерціи; въ главѣ о движеніи твердаго тѣла будетъ показано, что при этомъ вращеніи эллипсоидъ инерціи, имѣя неподвижный центръ, катится безъ скольженія по нѣкоторой неподвижной плоскости.

При такомъ движеніи угловая скорость твердаго тѣла, вообще говоря, не сохраняетъ неизмѣннаго положенія, ни въ самомъ тѣлѣ, ни въ пространствѣ, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ начальная

угловая скорость была направлена по одной изъ трехъ главныхъ осей эллипсоида инерціи; тогда вращеніе тѣла по инерціи будетъ продолжаться вокругъ этой оси съ постоянною угловою скоростью и эта ось будетъ сохранять неизмѣнное направленіе въ пространствѣ; вотъ почему главныя оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи.*

Вращеніе тѣла по инерціи будетъ разсмотрѣно въ главѣ о движеніи твердаго тѣла.

Эллипсоидъ инерціи для центра инерціи (данной системы точекъ) называется *центральнымъ эллипсоидомъ инерціи*, главныя оси его — *главными центральными осями инерціи* данной системы, а моменты инерціи $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$ вокругъ этихъ осей $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 — *главными центральными моментами инерціи* данной системы.

Величина момента инерціи данной системы точекъ вокругъ оси CU, проходящей черезъ центръ инерціи этой системы, выразится формулою:

$$(I_U)_c = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + \mathfrak{B}_c\mu^2 + \mathfrak{C}_c\nu^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(670)}$$

если за оси координатъ взяты главныя центральныя оси инерціи $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0.

§ 106. Зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей.

Пусть черезъ точку $Ю$ проведена какая либо ось, а черезъ центръ инерціи C — другая, ей параллельная; возьмемъ C за начало координатъ, послѣднюю ось — за координатную ось CZ, плоскость, проходящую черезъ обѣ оси, — за координатную плоскость $ZC\Xi$ (черт. 59); означимъ черезъ $(I_\zeta)_c$ моментъ инерціи данной системы вокругъ оси CZ, черезъ $(I_\zeta)_ю$ моментъ инерціи ея вокругъ оси $ЮZ_1$ и черезъ Δ — разстояніе CK между осями.

Моменты инерціи системы вокругъ осей CZ и $ЮZ_1$ выразятся слѣдующими суммами:

$$(I_\zeta)_c = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (I_\zeta)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((\xi_i - \Delta)^2 + \eta_i^2\Big),$$

послѣднюю же сумму можно представить такъ:

$$(I_\zeta)_ю = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2) - 2\Delta \sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i + M\Delta^2;$$

но такъ какъ точка C есть центръ инерціи, то сумма, заключающаяся во второмъ членѣ второй части, равна нулю, а потому:

$$(I_\zeta)_ю = (I_\zeta)_c + M\Delta^2, \ldots\ldots\ldots\ldots (671)$$

и вообще:

$$(I_v)_k = (I_v)_c + M\Delta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (672)$$

Если бы всѣ точки данной системы были сосредоточены въ ея центрѣ инерціи, то моментъ инерціи ея вокругъ оси KU былъ бы равенъ произведенію $M\Delta^2$. Выведенная здѣсь формула (672) выражаетъ, что *моментъ инерціи данной системы вокругъ какой либо оси, непроходящей черезъ центръ инерціи, равняется суммѣ, составленной изъ момента инерціи этой же системы вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ инерціи и изъ того момента инерціи, который система имѣла бы, если бы была вся сосредоточена въ своемъ центрѣ инерціи.*

Между величинами моментовъ инерціи данной системы вокругъ двухъ параллельныхъ осей KU и K_1U_1, отстоящихъ отъ центра инерціи C на разстояніяхъ Δ и Δ_1, существуетъ слѣдующая зависимость:

$$(\text{Мом. инерц. вокругъ оси } KU) - M\Delta^2 =$$

$$= (\text{Мом. инерц. вокругъ оси } K_1U_1) - M\Delta_1^2.$$

Между моментами инерціи вокругъ всевозможныхъ параллельныхъ осей, моментъ инерціи вокругъ той оси, которая проходитъ центръ инерціи, имѣетъ величину наименьшую.

§ 107. По центральнымъ главнымъ осямъ и моментамъ инерціи могутъ быть опредѣлены эллипсоиды инерціи во всѣхъ прочихъ точкахъ пространства.

Зная направленія главныхъ центральныхъ осей инерціи $C\Xi_0$,

$C\Upsilon_0$, CZ_0 данной системы и величины главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи, можемъ опредѣлить направленія главныхъ осей и величины главныхъ моментовъ въ какой угодно точкѣ K.

Означимъ черезъ ξ_k, η_k, ζ_k координаты этой точки K относительно осей $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 и черезъ λ, μ, ν — косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями направленіями параллельныхъ между собою осей KU и CU, проведенныхъ черезъ точки K и C; квадратъ разстоянія Δ точки K отъ оси CU можно выразить такъ:

$$\Delta^2 = r_k^2 - r_k^2 \cos^2(r_k, U) = \lambda^2(\eta_k^2 + \zeta_k^2) + \mu^2(\zeta_k^2 + \xi_k^2) +$$

$$+ \nu^2(\xi_k^2 + \eta_k^2) - 2\mu\nu\eta_k\zeta_k - 2\nu\lambda\zeta_k\xi_k - 2\lambda\mu\xi_k\eta_k,$$

поэтому изъ равенства (672) и выраженія (670) получимъ слѣдующее выраженіе величины момента инерціи данной системы вокругъ оси KU:

$$(I_U)_k = A_k\lambda^2 + B_k\mu^2 + C_k\nu^2 - 2D_k\mu\nu - 2E_k\nu\lambda - 2F_k\lambda\mu, \quad \textbf{(673)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \mathfrak{A}_c + M(\eta_k^2 + \zeta_k^2), \\ B_k &= \mathfrak{B}_c + M(\zeta_k^2 + \xi_k^2), \\ C_k &= \mathfrak{C}_c + M(\xi_k^2 + \eta_k^2), \end{aligned}\right\} \ldots \textbf{(674)} \qquad \left.\begin{aligned} D_k &= M\eta_k\zeta_k, \\ E_k &= M\zeta_k\xi_k, \\ F_k &= M\xi_k\eta_k. \end{aligned}\right\} \ldots \textbf{(675)}$$

Направленія главныхъ осей инерціи той же системы въ точкѣ K суть направленія главныхъ осей эллипсоида инерціи:

$$1 = \frac{1}{M \cdot \partial^4}(A_kx^2 + B_ky^2 + C_kz^2 - 2D_kyz - 2E_kzx - 2F_kxy), \textbf{(676)}$$

гдѣ x, y, z суть координаты относительно осей KX, KY, KZ, проведенныхъ черезъ точку K параллельно осямъ $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0.

Примѣнимъ къ эллипсоиду (676) извѣстный въ аналитической геометріи способъ опредѣленія направленій главныхъ осей поверхности второго порядка.

Пусть λ_x, λ_y, λ_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ одною изъ такихъ осей съ осями CX, CY, CZ; эти косинусы опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} A_k\lambda_x - F_k\lambda_y - E_k\lambda_z = I\lambda_x \\ B_k\lambda_y - D_k\lambda_z - F_k\lambda_x = I\lambda_y \\ C_k\lambda_z - E_k\lambda_x - D_k\lambda_y = I\lambda_z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (677)$$

гдѣ I есть одинъ изъ трехъ корней уравненія третьей степени:

$$\begin{vmatrix} (A_k - I), & -F_k, & -E_k \\ -F_k, & (B_k - I), & -D_k \\ -E_k, & -D_k, & (C_k - I) \end{vmatrix} = 0 \ldots (678)$$

Помноживъ равенства (677): первое на λ_x, второе — на λ_y, третье на λ_z, и затѣмъ сложивъ эти равенства, мы увидимъ, что I означаетъ величину момента инерціи системы вокругъ искомой главной оси инерціи, слѣдовательно, три корня уравненія (678) суть моменты инерціи $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_k$ вокругъ главныхъ осей разсматриваемаго эллипсоида.

Пусть $\mathfrak{A}_k$ есть моментъ инерціи вокругъ той главной оси $K\Xi$, косинусы угловъ которой съ осями KX, KY, KZ, суть λ_x, λ_y, λ_z; двѣ другія главныя оси означимъ черезъ $K\Upsilon$, $K\mathsf{Z}$, косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями съ осями KX, KY, KZ — черезъ μ_x, μ_y, μ_z, ν_x, ν_y, ν_z; пусть $\mathfrak{B}_k$ есть моментъ инерціи вокругъ оси $K\Upsilon$, $\mathfrak{C}_k$ — вокругъ оси $K\mathsf{Z}$.

Если въ уравненія (677) подставить $\mathfrak{A}_k$ вмѣсто I, то они послужатъ для опредѣленія величинъ λ_x, λ_y, λ_z; если же замѣнить I черезъ $\mathfrak{B}_k$, то тѣ же самыя уравненія дадутъ, не λ_x, λ_y, λ_z, а косинусы μ_x, μ_y, μ_z; точно также эти уравненія послужатъ для опредѣленія косинусовъ ν_x, ν_y, ν_z, если I будетъ замѣнено величиною $\mathfrak{C}_k$.

Если точка K лежитъ на которой либо изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, то главныя оси инерціи $K\Xi$, $K\Upsilon$, $K\mathsf{Z}$ параллельны главнымъ центральнымъ осямъ; напримѣръ, если K находится на оси $C\Xi_0$, то η_k и ζ_k равны нулю, а слѣдовательно и D_k, E_k, F_k; такъ что выраженіе (673) будетъ имѣть въ этомъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$(I_U)_k = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + (\mathfrak{B}_c + M\xi_k^2)\mu^2 + (\mathfrak{C}_c + M\xi_k^2)\nu^2 \ldots (679)$$

Можно составить себѣ общее представленіе о направленіяхъ главныхъ осей инерціи во всѣхъ точкахъ пространства; для этого надо подвергнуть уравненія (677) слѣдующему разсмотрѣнію.

Подставивъ въ нихъ $\mathfrak{A}_k$ вмѣсто I и выраженія (674), (675) вмѣсто A_k, B_k,....F_k, представимъ ихъ сначала подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\lambda_x = \frac{\xi_k}{(\alpha + q_1)} h; \quad \lambda_y = \frac{\eta_k}{(\beta + q_1)} h; \quad \lambda_z = \frac{\zeta_k}{(\gamma + q_1)} h, \ldots. \textbf{(680)}$$

гдѣ:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}_c}{M}, \ \beta = \frac{\mathfrak{B}_c}{M}, \ \gamma = \frac{\mathfrak{C}_c}{M},$$

$$h = \lambda_x \xi_k + \lambda_y \eta_k + \lambda_z \zeta_k, \ q_1 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{A}_k}{M} \ldots\ldots \textbf{(681)}$$

Если исключить λ_x, λ_y, λ_z изъ этихъ уравненій (680), то получимъ результатъ:

$$\frac{\xi_k^2}{\alpha + q_1} + \frac{\eta_k^2}{\beta + q_1} + \frac{\zeta_k^2}{\gamma + q_1} - 1 = 0,$$

выражающій, что точка K находится на поверхности втораго порядка:

$$\frac{\xi^2}{\alpha + q_1} + \frac{\eta^2}{\beta + q_1} + \frac{\zeta^2}{\gamma + q_1} = 1, \ldots\ldots\ldots \textbf{(682, 1)}$$

имѣющей центромъ точку C и главными осями — оси $C\Xi_0$, CY_0, CZ_0.

Изъ равенствъ (680) и равенства $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$ окажется, что

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_k^2}{(\alpha + q_1)^2} + \frac{\eta_k^2}{(\beta + q_1)^2} + \frac{\zeta_k^2}{(\gamma + q_1)^2}}};$$

а потому вторыя части равенствъ (680) суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями $C\Xi_0$, CY_0, CZ_0 нормалью къ поверхности (682, 1), возстановленною изъ точки K; слѣдовательно, главная ось $K\Xi$ совпадаетъ съ этою нормалью.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что черезъ точку K проходятъ еще двѣ поверхности:

$$\frac{\xi^2}{\alpha + q_2} + \frac{\eta^2}{\beta + q_2} + \frac{\zeta^2}{\gamma + q_2} = 1, \ldots\ldots\ldots \textbf{(682, 2)}$$

$$\frac{\xi^2}{\alpha + q_3} + \frac{\eta^2}{\beta + q_3} + \frac{\zeta^2}{\gamma + q_3} = 1, \ldots\ldots\ldots \textbf{(682, 3)}$$

гдѣ:

$$q_2 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{B}_k}{M}, \ldots. \textbf{(683)}, \qquad q_3 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{C}_k}{M}; \ldots. \textbf{(684)}$$

по нормали къ поверхности (682, 2) направлена главная ось KY, а по нормали къ поверхности (682, 3) — главная ось KZ.

Положимъ, что главные моменты инерціи $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_k$ въ точкѣ K не равны другъ другу и что $\mathfrak{A}_k < \mathfrak{B}_k < \mathfrak{C}_k$; въ такомъ случаѣ изъ выраженій (681) (683) (684) слѣдуетъ: $q_1 > q_2 > q_3$. Если принять во вниманіе, что $\mathfrak{A}_k$ есть наименьшій изъ моментовъ инерціи системы вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку K, то легко показать, что поверхность (682, 1) есть эллипсоидъ; въ самомъ дѣлѣ, суммы $(\alpha + q_1)$, $(\beta + q_1)$, $(\gamma + q_1)$ могутъ быть представлены (при помощи формулъ (674)) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \xi_k^2, \ \frac{B_k - \mathfrak{B}_k}{M} + \eta_k^2, \ \frac{C_k - \mathfrak{C}_k}{M} + \zeta_k^2,$$

а отсюда ясно, что всѣ онѣ положительныя.

Другія двѣ поверхности (682, 2) (682, 3) суть гиперболоиды, одинъ однополый, другой о двухъ полахъ. Чтобы показать это, замѣтимъ, что q_1, q_2, q_3 суть корни уравненія третьей степени:

$$(\alpha + q)(\beta + q)(\gamma + q) - \xi_k^2(\beta + q)(\gamma + q) - \eta_k^2(\gamma + q)(\alpha + q) -$$
$$- \zeta_k^2(\alpha + q)(\beta + q) = 0, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(685)}$$

первая часть котораго

при $q = +\infty$ обращается въ $+\infty$

„ $q = -\alpha$ „ „ $-\xi_k^2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)$,

„ $q = -\beta$ „ „ $+\eta_k^2(\gamma - \beta)(\beta - \alpha)$,

„ $q = -\gamma$ „ „ $-\zeta_k^2(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$;

отсюда видно, что если $\alpha < \beta < \gamma$, то одинъ изъ трехъ корней этого уравненія заключается между $+\infty$ и $-\alpha$, другой между $-\alpha$ и $-\beta$, третій между $-\beta$ и $-\gamma$; первый корень есть q_1, потому что, какъ мы уже доказали, $(\alpha + q_1)$ болѣе нуля, слѣдующій корень есть q_2, а меньшій есть q_3.

Такъ какъ:

$$+\infty > q_1 > -\alpha > q_2 > -\beta > q_3 > -\gamma,$$

то:

$$\gamma + q_3 > 0, \ \beta + q_3 < 0, \ \alpha + q_3 < 0,$$

$$\gamma + q_2 > 0, \ \beta + q_2 > 0, \ \alpha + q_2 < 0,$$

слѣдовательно, поверхность (682, 3) есть двухполый гиперболоидъ, дѣйствительная ось котораго совпадаетъ съ осью $C\mathsf{Z}_0$, а поверхность (682, 2) есть однополый гиперболоидъ, непересѣкающая ось котораго совпадаетъ съ осью $C\Xi_0$.

Изъ всего сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что черезъ каждую точку пространства можно провести три взаимно-ортогональныя поверхности втораго порядка: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ о двухъ полахъ; центры этихъ трехъ поверхностей находятся въ C и главныя оси ихъ совпадаютъ съ главными центральными осями инерціи; нормали, возстановленныя къ этимъ тремъ поверхностямъ изъ точки ихъ пересѣченія, суть направленія главныхъ осей инерціи въ этой точкѣ.

Всѣ эллипсоиды, всѣ гиперболоиды однополые и о двухъ полахъ суть три системы взаимно-ортогональныхъ поверхностей; совокупность всѣхъ этихъ поверхностей образуетъ такъ называемую *систему эллиптическихъ координатъ*.

§ 108. Эллиптическія координаты.

Координатныя поверхности этой системы координатъ суть:

1) Эллипсоиды, выражаемые уравненіями (682, 1), гдѣ q_1 можетъ имѣть всякія значенія отъ $+\infty$ до $(-\alpha)$; эллипсоидъ $q_1=\infty$ имѣетъ безконечно большія полуоси; эллипсоидъ $q_1=-\alpha$ вплотную облегаетъ эллиптическую пластинку, находящуюся внутри контура:

$$\xi=0,\ \frac{\eta^2}{\beta-\alpha}+\frac{\zeta^2}{\gamma-\alpha}=1, \ldots\ldots\ldots \quad (686)$$

такъ какъ полуось $\sqrt{\alpha+q_1}$ этого эллипсоида равна нулю.

2) Однополые гиперболоиды, выражаемые уравненіями (682, 2), гдѣ q_2 можетъ имѣть всякія значенія отъ $(-\alpha)$ до $(-\beta)$; непересѣкающія или мнимыя полуоси ихъ направлены по оси Ξ_0, дѣйствительныя полуоси, направленныя по оси Υ_0, не болѣе $\sqrt{\beta-\alpha}$, а дѣйствительныя полуоси, направленныя по оси Z_0, не болѣе $\sqrt{\gamma-\alpha}$ и не менѣе $\sqrt{\gamma-\beta}$; предѣльными поверхностями этой системы гиперболоидовъ служатъ тѣ поверхности, которыя имѣютъ параметры $q_2=-\alpha$, $q_2=-\beta$; поверхность $q_2=-\alpha$ должно разсматривать какъ гиперболоидъ, облегающій вплотную обѣ стороны той части плоскости $\Upsilon_0\mathsf{Z}_0$, которая остается за выдѣленіемъ эллиптической пластинки, упомянутой выше; другую предѣльную поверхность: $q_2=-\beta$ должно разсматривать какъ гипербо-

лоидъ, облегающій вплотную обѣ стороны той части плоскости $Z_0 \Xi_0$, которая ограничена гиперболою:

$$\eta = 0,\ \frac{\zeta^2}{\gamma - \beta} - \frac{\xi^2}{\beta - \alpha} = 1 \ldots\ldots\ldots\ (687)$$

и заключаетъ въ себѣ ось Ξ_0.

3) Гиперболоиды о двухъ полахъ, выражаемые уравненіями (682, 3), гдѣ q_3 можетъ имѣть всякія значенія отъ $q_3 = -\beta$ до $q_3 = -\gamma$; дѣйствительныя полуоси этихъ гиперболоидовъ направлены по оси Z_0 и имѣютъ величины не бо́льшія $\sqrt{\gamma - \beta}$; предѣльная поверхность $q_3 = -\beta$ есть гиперболоидъ, вплотную облегающій тѣ двѣ части плоскости $\Xi_0 Z_0$, которыя ограничены гиперболою (687) и простираются въ безконечность; другая предѣльная поверхность: $q_3 = -\gamma$ есть вся плоскость $\Xi_0 Y_0$.

Черезъ каждую точку пространства проходятъ три координатныя поверхности: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ двуполый, которые въ этой точкѣ взаимно-ортогональны; координатные параметры q_1, q_2, q_3 этихъ поверхностей суть корни уравненія (685) и они называются эллиптическими координатами этой точки.

Рѣшивъ уравненія (682, 1), (682, 2), (682, 3) относительно ξ, η, ζ, получимъ слѣдующія выраженія прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ въ эллиптическихъ координатахъ:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{(\alpha + q_1)(\alpha + q_2)(\alpha + q_3)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}}\ ^{*)} \ldots\ (688, a)$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{(\beta + q_1)(\beta + q_2)(\beta + q_3)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}} \ldots\ldots\ (688, b)$$

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{(\gamma + q_1)(\gamma + q_2)(\gamma + q_3)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}} \ldots\ldots\ (688, c)$$

Эллиптическія координатныя поверхности называются софокусными, потому что кривыя втораго порядка, по которымъ эти поверхности пе-

---

*) Выводъ этихъ формулъ значительно облегчается помощію преобразованій, подобныхъ слѣдующему:

ресѣкаются плоскостями $\Xi_0 \Upsilon_0$, $\Upsilon_0 Z_0$, $Z_0 \Xi_0$, имѣютъ общіе фокусы *).

§ 109. Квадратичные моменты: полярные и относительно плоскостей. Эллипсоиды: основной и гираціонный. Плечи инерціи.

Квадратичнымъ полярнымъ моментомъ системы точекъ вокругъ полюса K называется сумма:

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (689)$$

гдѣ r_i есть разстояніе матерьяльной точки m_i отъ точки K.

Сумма произведеній, составленныхъ изъ массъ точекъ на квадраты ихъ разстояній отъ какой либо плоскости, называется *квадратичнымъ моментомъ относительно этой плоскости;* такъ, квадратичный мо-

---

Означимъ: $\alpha + q_1$, $\alpha + q_2$, $\alpha + q_3$, $\beta + q_1$, $\beta + q_2, \ldots \gamma + q_3$, черезъ α_1 α_2, α_3, β_1, $\beta_2, \ldots \gamma_3$.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\beta_1}, & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\beta_2}, & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3}, & \frac{1}{\beta_3}, & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_3}, & \frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{\alpha_3}, & \frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\alpha_3} \end{vmatrix} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} D_1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{\beta_1}, & \frac{1}{\gamma_1} \\ 1, & \frac{1}{\beta_2}, & \frac{1}{\gamma_2} \\ 1, & \frac{1}{\beta_3}, & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix}.$$

*) Дальнѣйшія подробности относительно эллиптическихъ координатъ и софокусныхъ поверхностей можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

G. Salmon. A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions. 1874.

Hesse. Analytische Geometrie des Raumes.

Сомовъ. Раціональная механика.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik.

Будаевъ. Теоретическая механика 1871.

ментъ относительно плоскости, проходящей черезъ точку K и перпендикулярной къ оси KU, выразится такъ:

$$(I_U')_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(r_i^2 - \rho_i^2) = H_k - (I_U)_k \dots\dots\dots (690)$$

Квадратичные моменты относительно плоскостей координатъ YKZ, ZKX, XKY суть слѣдующія суммы:

$$A'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2,\ B'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2,\ C'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i^2 \dots\dots (691)$$

Легко видѣть, что

$$A_k + B_k + C_k = 2(A'_k + B'_k + C'_k) = 2H_k \dots\dots (692)$$

$$2A'_k = B_k + C_k - A_k;\ 2B'_k = C_k + A_k - B_k; \dots\dots (693)$$

$$2C' = A_k + B_k - C_k \dots\dots\dots\dots (693)$$

Изъ выраженій (690) и (665) слѣдуетъ:

$$(I'_U)_k = A'_k\lambda^2 + B'_k\mu^2 + C'_k\nu^2 + 2D_k\mu\nu + 2E_k\nu\lambda + 2F_k\lambda\mu \dots (694)$$

Если по направленію нормали къ каждой плоскости, проведенной черезъ точку K, отложить отъ этой точки длину, обратно-пропорціональную корню квадратному изъ квадратичнаго момента относительно этой плоскости, то концы этихъ длинъ образуютъ поверхность эллипсоида, называемаго *основнымъ эллипсоидомъ* *); уравненіе этого эллипсоида:

$$1 = A'_k x^2 + B'_k y^2 + C'_k z^2 + 2D_k yz + 2E_k zx + 2F_k xy \dots (695)$$

Главныя оси этого эллипсоида, конечно, совпадаютъ съ главными осями инерціи.

Квадратичный моментъ относительно всякой плоскости, непроходящей черезъ центръ инерціи, равенъ квадратичному моменту относительно

---

*) W. Thomson называетъ этотъ эллипсоидъ такъ: ellipsoid of construction, см. его статью: On the principal axes of a solid body; Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol. I. 1846.

параллельной плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи, сложенному съ произведеніемъ изъ массы системы на квадратъ разстоянія между плоскостями; напримѣръ:

$$A'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i + x_c)^2 = A'_c + 2x_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i + M x_c^2,$$

$$A'_k = A'_c + M x_c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (696)$$

Отсюда слѣдуетъ, что квадратичный полярный моментъ вокругъ полюса K равенъ квадратичному полярному моменту вокругъ центра инерціи, сложенному съ произведеніемъ изъ массы системы на квадратъ разстоянія между полюсами; такъ что, если r_k есть разстояніе точки K отъ полюса, то:

$$H_k = H_c + M r_k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (697)$$

Квадратичный моментъ относительно главной плоскости YKZ точки K (эта плоскость есть касательная плоскость къ эллипсоиду (682, 1) въ точкѣ K) равенъ:

$$\mathfrak{A}'_k = H_k - \mathfrak{A}_k = H_c + M\left(r_k^2 - \frac{\mathfrak{A}_k}{M}\right) = H_c + M q_1;$$

такъ что:

$$q_1 = \frac{\mathfrak{A}'_k - H_c}{M}, \quad q_2 = \frac{\mathfrak{B}'_k - H_c}{M}, \quad q_3 = \frac{\mathfrak{C}'_k - H_c}{M},$$

слѣдовательно, квадратичные моменты относительно всѣхъ касательныхъ плоскостей одной и той же координатной поверхности эллиптическихъ координатъ имѣютъ одну и ту же величину, равную:

$$\frac{\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c + \mathfrak{C}_c}{2} + M q, \ldots\ldots\ldots\ldots (698)$$

гдѣ $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$ суть главные центральные моменты инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, а q — координатный эллиптическій параметръ координатной поверхности.

Кромѣ вышеупомянутаго эллипсоида, мы дадимъ здѣсь понятіе еще объ одномъ эллипсоидѣ, выражаемомъ слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\xi^2}{\mathfrak{A}_k} + \frac{\eta^2}{\mathfrak{B}_k} + \frac{\zeta^2}{\mathfrak{C}_k} = \frac{1}{M}; \ldots\ldots\ldots\ldots (699)$$

этотъ эллипсоидъ, называемый *гирацiоннымъ эллипсоидомъ* *) для точки K, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что если мы проведемъ какую либо касательную къ нему плоскость, то квадратъ разстоянiя этой плоскости отъ точки K, будучи помноженъ на массу системы, дастъ произведенiе, равное моменту инерцiи системы вокругъ оси, проходящей черезъ точку K и перпендикулярной къ этой касательной плоскости; предоставляемъ читателю убѣдиться въ этомъ.

Если раздѣлить моментъ инерцiи данной системы матерьяльныхъ точекъ вокругъ какой либо оси на массу системы, и затѣмъ изъ частнаго извлечь квадратный корень, то получится нѣкоторая длина, называемая *плечомъ инерцiи данной* системы вокругъ этой оси.

§ 110. Примѣры вычисленiя моментовъ инерцiи нѣкоторыхъ тѣлъ.

При опредѣленiи направленiй главныхъ осей инерцiи весьма полезно имѣть въ виду слѣдующiя замѣчанiя.

1) Если система точекъ или сплошное тѣло имѣетъ полную симметрiю относительно нѣкоторой плоскости, такъ что кратчайшiя разстоянiя между взаимно-симметричными элементами перпендикулярны къ этой плоскости и дѣлятся ею пополамъ, то для каждой изъ точекъ этой плоскости двѣ главныя оси инерцiи заключаются въ самой плоскости, а третья перпендикулярна къ ней. Въ самомъ дѣлѣ, если принять эту плоскость за плоскость XY, то D_k и E_k будутъ равны нулю, потому что каждому элементу dm, имѣющему какiя либо координаты x, y, z, соотвѣтствуетъ симметрично-расположенный элементъ, имѣющiй ту же самую массу dm и координаты x, y, $(-z)$; поэтому всѣ элементы суммъ:

$$D_k = \sum myz,\ E_k = \sum mzx$$

или интеграловъ:

$$D_k = \iiint yzdm,\ E_k = \iiint zxdm$$

попарно сокращаются, а слѣдовательно, уравненiе эллипсоида инерцiи будетъ:

$$\partial^4 . м = A_k x^2 - 2F_k xy + B_k y^2 + \mathfrak{C}_k z^2 .$$

*) Ellipsoid of gyration.

2) Если однородное сплошное тѣло имѣетъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи (которыя проходятъ черезъ центръ инерціи), то пересѣченія этихъ осей суть главныя центральныя оси инерціи тѣла.

3) Если всѣ точки системы находятся въ одной плоскости или сплошное тѣло имѣетъ видъ безконечно-тонкой плоской пластинки, то для всякой точки этой плоскости или пластинки одна изъ главныхъ осей инерціи перпендикулярна къ плоскости. Если эту плоскость принять за плоскость XY, то для всѣхъ точекъ системы или элементовъ пластинки координата $z = 0$, а потому:

$$A_k = B'_k = \sum my^2, \quad B_k = A'_k = \sum mx^2, \ldots\ldots (700)$$

$$\mathfrak{C}_k {}^{*)} = \sum m(x^2 + y^2) = A'_k + B'_k, \ldots\ldots\ldots (701)$$

$$D_k = 0, \quad E_k = 0, \quad F_k = \sum mxy.$$

4) Если система матерьяльныхъ точекъ имѣетъ ось симметріи или сплошное однородное тѣло есть тѣло вращенія, то во всякой точкѣ оси симметріи эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія.

Обращаемся къ примѣрамъ. Прежде всего приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, имѣющихъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи. Въ этихъ случаяхъ удобнѣе всего вычислять слѣдующія величины по слѣдующимъ формуламъ:

$$\mathfrak{A}'_c = \sigma \iiint \xi^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\xi_1} \xi^2 Q_\xi d\xi, \ldots\ldots (702,1)$$

$$\mathfrak{B}'_c = \sigma \iiint \eta^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\eta_1} \eta^2 Q_\eta d\eta, \ldots\ldots (702,2)$$

---

*) $H_k = \mathfrak{C}_k$.

$$\mathfrak{C}'_c = \sigma \iiint \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\zeta_1} \zeta^2 Q_\zeta d\zeta, \ldots\ldots \quad \textbf{(702, 3)}$$

гдѣ Q_ξ есть величина площади сѣченія тѣла координатною плоскостью ξ, а ξ_1 предѣльная координата тѣла по оси Ξ_0; Q_η, Q_ζ, η_1, ζ_1 имѣютъ соотвѣтственныя значенія по отношенію къ координатамъ η и ζ.

Примѣръ 86-й. Вычислить главные центральные моменты инерціи однороднаго эллипсоида:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Въ этомъ случаѣ: $\xi_1 = a$, $\eta_1 = b$, $\zeta_1 = c$,

$$Q_\xi = \pi bc\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right), \ Q_\eta = \pi ca\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right), \ Q_\zeta = \pi ab\left(1 - \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

$$\mathfrak{A}'_c = M\frac{a^2}{5}, \quad \mathfrak{B}'_c = M\frac{b^2}{5}, \quad \mathfrak{C}'_c = M\frac{c^2}{5} \ldots\ldots \quad \textbf{(703)}$$

Поэтому:

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \ \mathfrak{B}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \ \mathfrak{C}_c = \frac{M}{5}(a^2 + b^2) \ldots\ldots \quad \textbf{(704)}$$

Если $a > b > c$, то $\mathfrak{A}_c < \mathfrak{B}_c < \mathfrak{C}_c$, т. е., вокругъ наибольшей полуоси моментъ инерціи наименьшій и вокругъ наименьшей полуоси — наибольшій; поэтому наибольшая главная полуось центральнаго эллипсоида инерціи направлена по оси Ξ_0, средняя — по оси Y_0, меньшая — по оси Z_0.

Если данный эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія, то таковъ же и центральный эллипсоидъ инерціи; притомъ *удлиненный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *удлиненный* центральный эллипсоидъ инерціи и, обратно, *планетарный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *планетарный* же эллипсоидъ инерціи. Если $a = b$, то:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \ \mathfrak{C}_c = \frac{2}{5}Ma^2; \ldots\ldots \quad \textbf{(705)}$$

моменты инерціи вокругъ всѣхъ экваторіальныхъ центральныхъ осей равны между собою и равны $\mathfrak{A}_c$.

Центральный моментъ инерціи сплошнаго однороднаго шара вокругъ какой либо центральной оси равенъ $\frac{2}{5}MR^2$, гдѣ R есть радіусъ шара.

Примѣръ 87-й. Главные центральные моменты инерціи однороднаго прямоугольнаго параллелопипеда, длины сторонъ котораго: $2a$, $2b$, $2c$.

Здѣсь:

$$\xi_1 = a,\ \eta_1 = b,\ \zeta_1 = c,\ Q_\xi = 4bc,\ Q_\eta = 4ca,\ Q_\zeta = 4ab,$$

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{3}(b^2 + c^2),\ \mathfrak{B}_c = \frac{M}{3}(c^2 + a^2),\ \mathfrak{C}_c = \frac{M}{3}(a^2 + b^2); \ldots \textbf{(706)}$$

(главныя центральныя оси инерціи перпендикулярны къ гранямъ параллелопипеда).

Кубъ имѣетъ центральнымъ эллипсоидомъ шаръ; моментъ инерціи вокругъ всякой центральной оси равенъ $\frac{2}{3}Ma^2$, гдѣ $2a$ — сторона куба.

Примѣръ 88-й. Главные центральные моменты инерціи прямаго однороднаго эллиптическаго цилиндра (высота $2h$, полуоси основанія b и c).

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{4}(b^2 + c^2),\ \mathfrak{B}_c = M\left(\frac{h^2}{3} + \frac{c^2}{4}\right),\ \mathfrak{C}_c = M\left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right) \ldots \textbf{(707)}$$

Далѣе, приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ однородныхъ тѣлъ вращенія.

Для вычисленія момента инерціи такого тѣла вокругъ оси вращенія $C\mathbf{Z}_0$, выразимъ элементы объема въ круговыхъ цилиндрическихъ координатахъ и произведемъ интегрированіе по θ въ предѣлахъ отъ нуля до 2π; получимъ:

$$\mathfrak{C}_c = 2\pi\sigma\iint \rho^3 d\rho d\zeta \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(708)}$$

Вслѣдствіе симметріи тѣла вокругъ оси вращенія, нижеслѣдующія величины равны между собою и потому равны половинѣ $\mathfrak{C}_c$.

$$\mathfrak{A}'_c = \mathfrak{B}'_c = \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (709)$$

наконецъ моментъ инерціи тѣла вокругъ всякой центральной экваторьяльной оси равенъ:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \sigma\int \zeta^2 Q_\zeta d\zeta + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \ldots\ldots\ldots (710)$$

Примѣръ 89-й. Главные центральные моменты инерціи цилиндрической круговой трубки; длина трубки $2h$, радіусъ внутренней поверхности R, толщина стѣнки k.

Въ выраженіи (708) надо интегрировать по ρ въ предѣлахъ отъ R до $(R+k)$ и по ζ въ предѣлахъ отъ $(-h)$ до $(+h)$.

$$\mathfrak{C}_c = \frac{M}{2}(2R^2 + 2Rk + k^2);\quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = M\frac{h^2}{3} + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \ldots (711)$$

Примѣръ 90. Главные центральные моменты инерціи кольца съ круговымъ меридіональнымъ сѣченіемъ; радіусъ сѣченія кольца $= r$, разстояніе центра сѣченія до оси вращенія $= R$.

$$\mathfrak{C}_c = M\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right);\quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{4}r^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \ldots (712)$$

Главные центральные моменты инерціи однородныхъ площадей (поверхностная плотность $\varkappa$).

Примѣръ 91-й. Площадь эллипса:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

$$\mathfrak{A}_c = 4\varkappa\int_0^b a\eta^2\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}\,d\eta = \pi ab\varkappa\frac{b^2}{4} = M\frac{b^2}{4}$$

$$\mathfrak{B}_c = M\frac{a^2}{4};\quad \mathfrak{C}_c = M\frac{a^2+b^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (713)$$

Примѣръ 92-й. Площадь прямоугольника; длины сторонъ: $2a$ и $2b$.

$$\mathfrak{A}_c = M\frac{b^2}{3},\quad \mathfrak{B}_c = M\frac{a^2}{3},\quad \mathfrak{C}_c = M\frac{a^2+b^2}{3} \ldots\ldots (714)$$

Примѣръ 93-й. Моментъ инерціи площади треугольника $A_1A_2A_3$ вокругъ одной изъ его сторонъ: A_1A_2.

Сначала возьмемъ треугольникъ прямоугольный и опредѣлимъ его моментъ инерціи вокругъ одного изъ катетовъ. Примемъ A_1A_2 (чертежъ 60) за ось $X^{овъ}$, а ось $Y^{овъ}$ проведемъ черезъ точку A_1; означимъ координаты вершины A_3 черезъ x_3 и y_3 $(A_1A_2 = x_3,\ \ A_2A_3 = y_3)$; кромѣ того, означимъ черезъ (y) ординаты точекъ гипотенузы A_1A_3; очевидно:

$$\frac{(y)}{x} = \frac{y_3}{x_3}.$$

Искомый моментъ инерціи выразится такъ:

$$\varkappa\int_0^{x_3}\int_0^{(y)} y^2 dxdy = \frac{\varkappa}{3}\int_0^{x_3}(y)^3 dx = \frac{\varkappa}{3}\,\frac{y_3^3}{x_3^3}\,\frac{x_3^4}{4} = M\frac{y_3^2}{6},$$

гдѣ $M = \varkappa\frac{x_3y_3}{2}$ есть масса треугольника.

Теперь возьмемъ треугольникъ косоугольный (черт. 61 и 62); его площадь и моментъ инерціи равняется суммѣ (черт. 61) или разности (черт. 62) площадей и моментовъ инерціи прямоугольныхъ треугольниковъ A_1DA_3 и A_2DA_3, такъ что искомый моментъ инерціи равенъ:

$$M'\frac{y^2}{6} \pm M''\frac{y^2}{6} = M\frac{y^2}{6}, \ldots\ldots\ldots\ldots (715)$$

гдѣ:

$$M' = \varkappa\frac{x_3y_3}{2},\ \ M'' = \varkappa\frac{(a_3 - x_3)y_3}{2} \text{ или } \varkappa\frac{(x_3 - a_3)y_3}{2},$$

$$a_3 = A_1A_2,\ \ M = \varkappa\frac{a_3y_3}{2} = M' \pm M''.$$

Примѣръ 94-й. Моментъ инерціи площади однороднаго треугольника вокругъ какой либо оси, проведенной черезъ вершину треугольника и лежащей въ его плоскости.

Примемъ вершину A_1 за начало координатъ и данную ось за ось $X^{овъ}$; продолжимъ сторону A_3A_2 (черт. 63) до пересѣченія ея K съ осью $X^{овъ}$.

Очевидно, что моментъ инерціи треугольника $A_1A_3A_2$ вокругъ оси A_1X равенъ разности моментовъ инерціи треугольниковъ A_1A_3K и

A_1A_2K, а выраженія этихъ моментовъ инерціи извѣстны изъ предыдущаго примѣра; такъ что:

$$I_x = \frac{\varkappa}{12} l y_3^3 - \frac{\varkappa}{12} l y_2^3 = \frac{\varkappa}{12} l(y_3 - y_2)(y_3^2 + y_3 y_2 + y_2^2),$$

гдѣ l есть длина A_1K; но такъ какъ площадь даннаго треугольника выражается половиною произведенія $l(y_3 - y_2)$, то искомый моментъ инерціи выразится такъ:

$$I_x = \frac{M}{6}(y_3^2 + y_3 y_2 + y_2^2) \ldots\ldots\ldots (716)$$

Это выраженіе можетъ быть представлено еще подъ слѣдующимъ видомъ:

$$I_x = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{2}\right)^2\right],$$

а это выражаетъ, что моментъ инерціи даннаго треугольника равняется моменту инерціи системы, состоящей изъ трехъ матерьяльныхъ точекъ, массы которыхъ равны $\frac{M}{3}$ и которыя помѣщены въ серединахъ сторонъ треугольника.

Центръ инерціи этихъ трехъ точекъ тоже совпадаетъ съ центромъ инерціи площади однороднаго треугольника *), поэтому моментъ инерціи даннаго треугольника вокругъ какой бы то ни было оси, имѣющей какое бы то ни было направленіе и проходящей черезъ какую бы то ни было точку, равняется моменту инерціи трехъ вышеупомянутыхъ матерьяльныхъ точекъ.

Примѣръ 95-й. Квадратичный полярный моментъ площади треугольника вокругъ вершины.

Изъ формулъ (692) слѣдуетъ, что искомый квадратичный моментъ равенъ суммѣ моментовъ инерціи I_x и I_y площади треугольника вокругъ взаимно-перпендикулярныхъ осей A_1X и A_1Y (черт. 63); вмѣстѣ

---

*) Если x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 суть координаты вершинъ треугольника, то координаты центра инерціи его площади выражаются такъ:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}\frac{2}{3} + x_3\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \quad y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

такъ же выражаются и координаты центра инерціи трехъ вышесказанныхъ точекъ.

съ тѣмъ онъ равенъ моменту инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ точку A_1 и перпендикулярной къ площади треугольника; такъ что:

$$\mathfrak{C} = H = \frac{M}{6}(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 + y_2y_3 + y_3^2) =$$

$$= \frac{M}{6}(a_3^2 + a_2a_3\cos\alpha_1 + a_2^2), \dots\dots\dots\dots (717)$$

гдѣ a_2 и a_3 суть длины сторонъ A_1A_2 и A_1A_3, а α_1 величина угла при вершинѣ A_1.

Примѣръ 96-й. Центральные моменты инерціи площадей однородныхъ правильныхъ многоугольниковъ (число сторонъ n, длина каждой стороны равна b).

Очевидно, что моменты инерціи такого многоугольника вокругъ центральныхъ осей, перпендикулярныхъ къ различнымъ сторонамъ многоугольника, равны между собою; слѣдовательно, эллипсъ, образуемый пересѣченіемъ центральнаго эллипсоида съ плоскостью многоугольника, долженъ имѣть столько равныхъ между собою и равноотстоящихъ другъ отъ друга радіусовъ векторовъ, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ, а для этого необходимо, чтобы эллипсъ былъ кругомъ. Изъ этого слѣдуетъ, что моменты инерціи правильнаго многоугольника вокругъ центральныхъ осей, лежащихъ въ плоскости многоугольника, равны между собою и равны половинѣ квадратичнаго полярнаго момента вокругъ центра, или, что то же самое, половинѣ момента инерціи вокругъ центральной оси, перпендикулярной къ площади многоугольника.

Данный правильный многоугольникъ разобьемъ на треугольники, имѣющіе вершинами центръ многоугольника, а основаніями — стороны его; очевидно, что моментъ инерціи $\mathfrak{C}_c$ всего многоугольника равняется n разъ взятому моменту инерціи одного изъ этихъ треугольниковъ вокругъ оси $C\mathbf{Z}_0$, возстановленной изъ центра C перпендикулярно къ плоскости многоугольника; основываясь на формулѣ (717), найдемъ:

$$\mathfrak{C}_c = H_c = \frac{Mb^2}{12}\,\frac{\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)}{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}, \dots\dots\dots\dots (718)$$

или, означая радіусъ круга, описаннаго черезъ вершины многоугольника, буквою a:

$$\mathfrak{C}_c = H_c = \frac{Ma^2}{6}\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right) \dots\dots\dots\dots (718)$$

Наконецъ, вычислимъ центральные моменты однородныхъ правильныхъ многогранниковъ.

Центральный эллипсоидъ такого многогранника есть шаръ, а потому моментъ инерціи такого тѣла вокругъ всякой центральной оси равенъ двумъ третямъ квадратичнаго полярнаго момента вокругъ центра инерціи, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (692) при $A_c = B_c = C_c$.

Квадратичный полярный моментъ правильнаго многогранника, имѣющаго μ граней, въ μ разъ болѣе квадратичнаго полярнаго момента одной изъ тѣхъ правильныхъ пирамидъ, на которыя можетъ быть раздѣленъ объемъ многогранника; поэтому рѣшимъ сначала слѣдующую задачу:

Примѣръ 97-й. Вычислить квадратичный полярный моментъ данной правильной пирамиды вокругъ ея вершины; высота пирамиды $= h$, число сторонъ основанія $= n$ и радіусъ описаннаго круга $= a$.

Примемъ вершину пирамиды за начало координатъ, направленіе перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на основаніе, за ось $X^{овъ}$; разобьемъ пирамиду на безконечно-тонкія пластинки плоскостями, перпендикулярными къ оси $X^{овъ}$; каждая такая пластинка имѣетъ толщину dx.

По формулѣ (718) мы вычислимъ квадратичный полярный моментъ каждой такой пластинки вокругъ ея центра, а по формулѣ (697) — квадратичный полярный моментъ ея вокругъ вершины; для пластинки, отстоящей на разстояніи x отъ вершины, этотъ моментъ будетъ равенъ:

$$\sigma dx \frac{na^2}{2h^2} x^2 \sin\frac{2\pi}{n}\left[x^2 + \frac{a^2}{6h^2} x^2 \left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

интегрируя по x въ предѣлахъ отъ нуля до h, получимъ слѣдующее выраженіе квадратичнаго полярнаго момента правильной пирамиды вокругъ ея вершины:

$$\frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{a^2}{6}\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(719)}$$

Примѣръ 98-й. Центральные моменты инерціи правильныхъ многогранниковъ.

Центральный моментъ инерціи правильнаго многогранника съ μ гранями, каждая изъ которыхъ есть правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, равенъ:

$$\frac{2}{3} H_c = \frac{2M}{5}\left(R^2 + \frac{a^2}{6}\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)\right), \ldots\ldots \quad \mathbf{(720)}$$

гдѣ R есть радіусъ сферы, вписанной въ многогранникъ, а длина a выражается слѣдующимъ образомъ въ R, n и μ:

$$a = R \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos\varphi = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\operatorname{cotg}\left(\frac{2\pi}{n\mu} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right). {}^{*}{}_{*})$$

По этой формулѣ получимъ слѣдующія величины центральныхъ моментовъ инерціи правильныхъ многогранниковъ:

Правильнаго тетраэдра: $\frac{6}{5} MR^2$, $(n = 3,\ \mu = 4)$.

Куба: $\frac{2}{3} MR^2$, $(n = 4,\ \mu = 6)$.

Октаэдра: $\frac{3}{5} MR^2$, $(n = 3,\ \mu = 8)$.

Двѣнадцатигранника: $\frac{37\sqrt{5}-59}{30} MR^2$, $(n = 5,\ \mu = 12)$.

Двадцатигранника: $\frac{3}{10}(5\sqrt{5} - 9) MR^2$, $(n = 3,\ \mu = 20)$.

§ 111. Законъ площадей для системы точекъ былъ открытъ почти одновременно Эйлеромъ *), Даніиломъ Бернулли **) и д'Арси ***).

---

*) Euler. Opuscula varii argumenti. Томъ I-й, 1746 года, статья: Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum.

**) Daniel Bernoulli. Nouveau problème de mécanique. Mémoires de l'Académie de Berlin, 1745.

***) d'Arcy. Problème de dynamique 1747. Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris. 1752.

$^{*}{}_{*}$) a есть радіусъ круга, описаннаго черезъ всѣ вершины многоугольника, образующаго грань многогранника; φ — уголъ, подъ которымъ этотъ радіусъ виденъ изъ центра многогранника. Предоставляемъ читателю убѣдиться въ вѣрности приведеннаго выраженія для $\cos\varphi$.

ГЛАВА IX.

Законъ живой силы.

§ 112. Составленіе дифференціальнаго уравненія.

Съ тремя дифференціальными уравненіями движенія (517) § 70 каждой изъ точекъ системы поступимъ такъ, какъ показано въ концѣ параграфа 21-го (стр. 86) относительно составленія дифференціальнаго уравненія (111); затѣмъ, всѣ полученныя такимъ образомъ равенства сложимъ, тогда будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i x_i'+Y_i y_i'+Z_i z_i'\right)+\lambda(\theta_1)\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)+$$

$$+\lambda(\theta_2)\left(\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)+\ldots\ldots+\lambda(\theta_p)\left(\frac{d\theta_p}{dt}-\frac{\partial\theta_p}{\partial t}\right),\ldots(721)$$

гдѣ

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[(x_i')^2+(y_i')^2+(z_i')^2\right]\ldots(535)$$

есть сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы и называется *живою силою системы* (какъ уже сказано на стр. 365-й) или *кинетическою энергіею ея*.

§ 113. Силы, имѣющія потенціалъ.

Обратимъ особенное вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ проэкціи на оси координатъ всѣхъ задаваемыхъ силъ суть функціи только координатъ точекъ и притомъ такія, что сумма:

$$X_1dx_1+Y_1dy_1+Z_1dz_1+X_2dx_2+Y_2dy_2+Z_2dz_2+\ldots\ldots+Z_ndz_n$$

или, что то же самое:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_idx_i+Y_idy_i+Z_idz_i)$$

есть полный дифференціалъ отъ какой либо функціи:

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots . x_n, y_n, z_n),$$

заключающей только координаты точекъ.

Для того, чтобы равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU \ldots\ldots \quad (722)$$

имѣло мѣсто при всякихъ значеніяхъ координатъ и дифференціаловъ координатъ, необходимо, чтобы задаваемыя силы выражались слѣдующими частными производными:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots . X_n = \frac{\partial U}{\partial x_n}, \\ Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1},\ Y_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \ldots . Y_n = \frac{\partial U}{\partial y_n}, \\ Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1},\ Z_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2}, \ldots . Z_n = \frac{\partial U}{\partial z_n}. \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (723)$$

Примѣчаніе. Если задаваемыя силы выражаются частными производными (723) отъ функціи W, заключающей не только координаты точекъ системы, но еще и время, то вышесказанная сумма не будетъ равна полному дифференціалу отъ W и вмѣсто равенства (722) будемъ имѣть слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dW - \frac{\partial W}{\partial t} dt \ldots \quad (724)$$

Функція U или W называется *потенціаломъ* или *силовою функціею* силъ F_1, $F_2, \ldots . F_n$, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ точекъ $m_1, m_2, \ldots . m_n$, а такая совокупность силъ называется *совокупностью силъ, имѣющихъ потенціалъ*.

Простѣйшимъ примѣромъ такой совокупности силъ могутъ служить силы взаимнодѣйствія между двумя матерьяльными точками,

указанныя въ примѣрѣ 61-мъ (стр. 326); въ заданіи этого примѣра предполагается, что силы взаимнодѣйствія между точками m_1 и m_2 равны, прямопротивоположны и направлены по продолженіямъ кратчайшаго разстоянія между точками, такъ что сила, приложенная къ точкѣ m_1, направлена по продолженію прямой, проведенной изъ m_2 черезъ m_1; величины силъ предполагаются равными $F(r_{12})$, гдѣ r_{12} есть разстояніе между точками, а F — какая нибудь функція этого разстоянія:

$$r_{12} = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ r_{21}, проведеннымъ изъ точки m_2 черезъ точку m_1, выражаются такъ:

$$\cos(r_{21}, X) = \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}, \quad \cos(r_{21}, Y) = \frac{y_1 - y_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial y_1},$$

$$\cos(r_{21}, Z) = \frac{z_1 - z_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial z_1},$$

а косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ r_{12}, проведеннымъ изъ точки m_1 черезъ точку m_2, выражаются такъ:

$$\cos(r_{12}, X) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial x_2}, \quad \cos(r_{12}, Y) = \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial y_2},$$

$$\cos(r_{12}, Z) = \frac{z_2 - z_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial z_2}.$$

Такъ какъ по направленію r_{21} дѣйствуетъ сила, приложенная къ точкѣ m_1, а по направленію r_{12} — сила, приложенная къ точкѣ m_2, то сумма, находящаяся въ первой части равенства (722), приметъ въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$F(r_{12})\left[\frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial r_{12}}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial r_{12}}{\partial z_2}dz_2\right] =$$

$$= F(r_{12})dr_{12};$$

слѣдовательно, эти силы имѣютъ потенціалъ:

$$U = \int F(r_{12}) dr_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots (725)$$

Слѣдуетъ обратить вниманіе на знакъ силы $F(r_{12})$: если точки m_1 и m_2 взаимно отталкиваются, то подъ $F(r_{12})$ подразумѣвается положительно взятая величина силы, приложенной къ каждой точкѣ, если же точки взаимно-притягиваются, такъ что сила, приложенная къ точкѣ m_1, направлена къ точкѣ m_2, то предыдущія выраженія примѣнятся и къ этимъ случаямъ при условіи, чтобы подъ $F(r_{12})$ подразумѣвалась отрицательно-взятая величина силы. Напримѣръ, если точки взаимно притягиваются силами равными $(\varepsilon m_1 m_2 : r^2_{12})$, то потенціалъ равенъ:

$$U = -\varepsilon m_1 m_2 \int \frac{dr_{12}}{r^2_{12}} = \varepsilon \frac{m_1 m_2}{r_{12}};$$

если точки взаимно-отталкиваются силами равными (εr^n_{12}), то потенціалъ будетъ:

$$U = \varepsilon \int r_{12}{}^n dr_{12} = \varepsilon \frac{r_{12}{}^{n+1}}{n+1}.$$

Положимъ, что имѣемъ систему матерьяльныхъ точекъ $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots m_n$, къ которымъ приложены слѣдующія силы:

a) Силы взаимнодѣйствія между точками системы, подобныя вышеупомянутымъ; то есть, на каждую точку m_i со стороны всякой другой точки m_j системы дѣйствуетъ сила $F_{ij}(r_{ij})$, направленная по продолженію линіи, проведенной изъ точки m_j черезъ m_i, а вмѣстѣ съ тѣмъ равная и прямопротивоположная сила приложена къ точкѣ m_j.

b) Силы притяженія или отталкиванія, дѣйствующія на точки системы со стороны какихъ либо *неподвижныхъ* центровъ $O_1, O_2, \ldots$ $\ldots O_n$; пусть x_k, y_k, z_k суть координаты одного изъ этихъ центровъ, r_{ik} — разстояніе точки m_i отъ этого центра O_k; величина силы, дѣйствующей изъ каждаго центра на каждую изъ матерьяльныхъ точекъ, предполагается функціею разстоянія между ними; пусть $\varphi_{ik}(r_{ik})$ есть

функція, выражающая положительно взятую величину отталкивающей силы, дѣйствующей изъ центра O_k на точку m_i.

И такъ, къ каждой точкѣ системы приложены: силы, дѣйствующія со стороны прочихъ точекъ и силы, дѣйствующія со стороны неподвижныхъ точекъ; зная всѣ функціи F_{12}, F_{13}, ... F_{23}, ... φ_{11}, φ_{12}, ... можемъ составить выраженія для X_1, Y_1, Z_1, X_2, ...; напримѣръ, X_i выразится слѣдующею суммою:

$$X_i = F_{1i}\frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + F_{2i}\frac{\partial r_{2i}}{\partial x_i} + \dots + F_{ni}\frac{\partial r_{ni}}{\partial x_i} +$$

$$+ \varphi_{1i}\frac{\partial \mathrm{r}_{1i}}{\partial x_i} + \dots + \varphi_{pi}\frac{\partial \mathrm{r}_{pi}}{\partial x_i};$$

поэтому сумма, заключающаяся въ первой части равенства (722), выразится такъ:

$$\sum_{i,j} F_{ij}(r_{ij})dr_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{i=1}^{i=n}\varphi_{ik}(\mathrm{r}_{ik})d\mathrm{r}_{ik};$$

первая изъ этихъ суммъ заключаетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$ членовъ, соотвѣтственно числу сочетаній, которыя можно сдѣлать изъ n точекъ по двѣ; i есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, ... n; j — тоже одно изъ этихъ чиселъ, но не равное i.

Потенціалъ всей совокупности силъ выразится слѣдующею суммою интеграловъ:

$$U = \sum_{i,j}\int F_{ij}(r_{ij})dr_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{i=1}^{i=n}\int \varphi_{ik}(\mathrm{r}_{ik})d\mathrm{r}_{ik} \dots\dots (726)$$

Если центры O_1, O_2, ... O_p суть движущіяся точки, совершающія данныя движенія, то координаты ихъ x_1, y_1, z_1, x_2, ... z_p будутъ данными функціями времени; въ этомъ случаѣ потенціалъ силъ также выразится формулою (726), но это уже будетъ функція не только отъ координатъ матерьяльныхъ точекъ, но и еще отъ времени, которое заключается въ выраженіяхъ координатъ x_1, y_1, z_1, x_2, ... z_p;

сумма, заключающаяся въ первой части равенства (722), выразится, не полнымъ дифференціаломъ потенціала, но разностью того же самаго вида, какой имѣетъ вторая часть равенства (724).

Силы взаимнодѣйствія между двумя матерьяльными точками m_1 и m_2, указанныя въ заданіи примѣра 63-го (стр. 327), имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = \pm \mu m_1 m_2 \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Вообще, если силы взаимнодѣйствія между двумя матерьяльными точками имѣютъ потенціаломъ какую либо функцію отъ разностей координатъ этихъ точекъ (т. е., отъ $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$, $(z_1 - z_2)$), то эти взаимнодѣйствія равны и противоположны.

Если силы взаимнодѣйствія между каждыми двумя точками m_i и m_j системы $m_1, m_2, \dots m_n$ имѣютъ потенціалъ U_{ij} и если сила, дѣйствующая изъ каждаго неподвижнаго центра O_k на каждую точку m_i системы тоже имѣетъ потенціалъ V_{ik}, то потенціалъ всей совокупности силъ выразится суммою всѣхъ частныхъ потенціаловъ, т. е.:

$$U = \sum_{i,j} U_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=n} V_{ik} \dots \dots \dots (727)$$

§ 114. Законъ живой силы.

Заключающіеся въ дифференціальномъ уравненіи (721) члены:

$$\lambda(\mathfrak{s}_1)\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \lambda(\mathfrak{s}_2)\frac{d\mathfrak{s}_2}{dt} + \dots + \lambda(\mathfrak{s}_p)\frac{d\mathfrak{s}_p}{dt}$$

равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, если связь $\mathfrak{s}_k$ — удерживающая, то при всякихъ положеніяхъ системы точекъ скорости точекъ должны обращать полную производную $\frac{d\mathfrak{s}_k}{dt}$ въ нуль; если же эта связь неудерживающая, то при тѣхъ скоростяхъ, которыя дѣлаютъ полную производную $\frac{d\mathfrak{s}_k}{dt}$ большею нуля, множитель $\lambda(\mathfrak{s}_k)$ долженъ быть равенъ нулю, потому что при этихъ условіяхъ связь не оказываетъ реакціи (см. стр. 341); слѣдовательно, либо тотъ, либо другой изъ множителей произведенія $\lambda(\mathfrak{s}_k)\frac{d\mathfrak{s}_k}{dt}$ равенъ нулю; то же самое слѣдуетъ ска-

зать относительно подобныхъ произведенiй, соотвѣтствующихъ всѣмъ прочимъ связямъ.

Поэтому дифференцiальное уравненiе (721) имѣетъ слѣдующiй видъ:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}(X_i x_i'+Y_i y_i'+Z_i z_i')-\lambda(\text{в}_1)\frac{\partial \text{в}_1}{\partial t}-\ldots-\lambda(\text{в}_p)\frac{\partial \text{в}_p}{\partial t}.\quad\textbf{(721,A)}$$

Если задаваемыя силы имѣютъ потенцiалъ, а выраженiя связей незаключаютъ явнымъ образомъ времени, то это дифференцiальное уравненiе будетъ имѣть слѣдующiй видъ:

$$\frac{d(T-U)}{dt}=0,$$

а потому дифференцiальныя уравненiя движенiя будутъ имѣть слѣдующiй интегралъ:

$$T-U=h,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad\textbf{(728)}$$

гдѣ h есть постоянная произвольная.

И такъ, *если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ системы, имѣютъ потенцiалъ, а связи независятъ отъ времени, то движенiе системы подчиняется слѣдующему закону: разность между живою силою и потенцiаломъ сохраняетъ постоянную величину.*

Этотъ законъ движенiя извѣстенъ подъ именемъ *закона живой силы* для движенiя системы точекъ.

§ 115. Работа задаваемыхъ силъ. Потенцiальная энергiя.

Дифференцiальное уравненiе (721) можетъ быть представлено еще подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}F_i v_i\cos(F_i,v_i)+\sum_{i=1}^{i=n}R_i v_i\cos(R_i,v_i),\ldots\ldots\quad\textbf{(721,B)}$$

гдѣ R_i означаетъ величину и направленіе равнодѣйствующей всѣхъ реакцій, приложенныхъ къ точкѣ m_i.

Помноживъ это уравненіе на dt и принявъ во вниманіе, что $v_1 dt = ds_1$, $v_2 dt = ds_2, \ldots v_n dt = ds_n$, гдѣ ds_1, $ds_2, \ldots ds_n$ суть безконечно-малые элементы путей, пробѣгаемые матерьяльными точками m_1, $m_2, \ldots m_n$ въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt, получимъ:

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} \Big(F_i \cos(F_i, v_i) + R_i \cos(R_i, v_i)\Big) ds_i\,, \quad \textbf{(721, C)}$$

т. е.: *безконечно-малое приращеніе живой силы, получаемое системою въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени* dt, *равняется суммѣ элементарныхъ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями связей въ теченіи этого промежутка времени.*

Обратимъ вниманіе на какія либо два положенія, занимаемыя системою во время движенія; вычислимъ работу всѣхъ силъ и реакцій на протяженіи путей, проходимыхъ точками системы при переходѣ ея изъ перваго положенія во второе и означимъ черезъ T_1 живую силу системы въ первомъ, а черезъ T_2 — во второмъ положеніи; изъ равенства (721, C) получимъ:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \int_1^2 (F_i \cos(F_i, v_i) + R_i \cos(R_i, v_i)) ds_i\,, \quad \textbf{(729)}$$

т. е., *приращеніе, получаемое живою силою при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, равняется суммѣ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями связей на протяженіи путей, пробѣгаемыхъ точками системы при этомъ переходѣ*; такое равенство имѣетъ мѣсто при всякихъ силахъ и связяхъ.

Если связи независятъ отъ времени, то сумма работъ реакцій свя-

зей будетъ нуль; дѣйствительно, сумма элементарныхъ работъ реакцій какой либо связи $\mathfrak{s}_k$ выразится такъ:

$$\lambda(\mathfrak{s}_k)\sum_{i=1}^{i=n}(P_i\mathfrak{s}_k)\cos(P_i\mathfrak{s}_k, ds_i)ds_i;$$

но намъ извѣстно, что если связь есть удерживающая и независитъ отъ времени, то сумма, помноженная на $\lambda(\mathfrak{s}_k)$, равна нулю (стр. 402, формула (588, k)), если же связь неудерживающая, то либо эта сумма равна нулю, либо $\lambda(\mathfrak{s}_k)$ равно нулю.

Если задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то сумма элементарныхъ работъ всѣхъ этихъ силъ равна дифференціалу потенціала, слѣдовательно, тогда:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\int_1^2 F_i\cos(F_i, v_i)\,ds_i = U_2 - U_1, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(730)}$$

гдѣ U_1 и U_2 суть значенія потенціала въ первомъ и во второмъ положеніяхъ системы.

Отсюда слѣдуетъ, что если U есть однократная функція отъ координатъ точекъ системы (т. е. такая, которая имѣетъ по одному, а не по нѣскольку значеній для каждаго положенія системы), то, при переходѣ системы изъ одного опредѣленнаго положенія въ другое, величина работы, совершаемой задаваемыми силами, независитъ отъ того, по какимъ путямъ движутся точки при этомъ переходѣ.

Если система, выйдя изъ какого либо положенія и совершивъ какое либо движеніе, возвратится въ это же самое положеніе, то работа задаваемыхъ силъ на всемъ протяженіи этого перехода будетъ равна нулю, если эти силы имѣютъ потенціаломъ однократную функцію координатъ точекъ системы.

Если же U есть многократная функція, такъ что для каждаго положенія системы U имѣетъ нѣсколько значеній, то, при переходѣ системы изъ перваго положенія во второе по различнымъ путямъ, функція U, исходя изъ одного и того же значенія U_1, можетъ достигнуть до раз-

личныхъ значеній, свойственныхъ ей во второмъ положеніи системы, смотря по тому, по какому пути совершается переходъ системы.

Напримѣръ, потенціальная функція задаваемыхъ силъ въ примѣрѣ 63 есть функція многократная; во всякомъ положеніи системы она имѣетъ безчисленное множество значеній, разнящихся на $\mu m_1 m_2 \pi$, взятое цѣлое число разъ, т. е.:

$$U = \mu m_1 m_2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \pm n\pi\right).$$

Положимъ, что координаты перваго положенія системы суть $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ и координаты втораго положенія: $x_1 = 0$, $y_1 = a$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$; пусть $U_1 = 0$.

Если система переходитъ изъ перваго во второе положеніе такимъ движеніемъ, при которомъ уголъ, составляемый линіею M_2M_1 (черт. 40), возрастетъ непрерывно отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то U достигнетъ величины $\mu m_1 m_2 \frac{\pi}{2}$; если же переходъ совершается такимъ движеніемъ, при которомъ линія M_2M_1 повернется на уголъ $\frac{5\pi}{2}$, то U достигнетъ величины $5\mu m_1 m_2 \frac{\pi}{2}$. При второмъ переходѣ задаваемыя силы совершатъ работу въ пять разъ большую, чѣмъ въ первомъ.

Къ неопредѣленному интегралу, выражающему потенціалъ задаваемымъ силъ, можно присоединить произвольную постоянную и положить, что:

$$U = C + \int dU.$$

Постоянною C мы распорядимся такъ, чтобы U обращалось въ нуль при нѣкоторомъ произвольно избранномъ положеніи системы; это положеніе будемъ называть нулевымъ.

Положимъ, что U есть функція однократная.

Въ большей части случаевъ нулевое положеніе избираютъ такимъ образомъ, чтобы въ немъ $(-U)$ имѣла наименьшее значеніе, а такъ какъ это значеніе полагается равнымъ нулю, то тогда во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ системы величина $(-U)$ будетъ имѣть знакъ положительный; означимъ $(-U)$ черезъ $Э$.

Каждому положенію системы свойственно нѣкоторое положительное значеніе $Э$, выражающее величину работы, которую совершатъ

задаваемыя силы при всякомъ переходѣ системы изъ разсматриваемаго положенія въ нулевое; эта величина $Э$ называется *потенціальною энергіею системы въ разсматриваемомъ положеніи;* въ нулевомъ положеніи потенціальная энергія системы равна нулю.

Сумма $(T + Э)$ кинетической энергіи и потенціальной энергіи системы называется полною энергіею системы.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ точекъ, имѣютъ потенціаломъ функцію однократную, независящую отъ времени и если связи между точками системы тоже независятъ явно отъ времени, то система точекъ называется *консервативною системою.*

Полная энергія движущейся консервативной системы сохраняетъ постоянную величину:

$$T + Э = h \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(728, bis)}$$

Пусть T_1, T_2, $Э_1$, $Э_2$ суть величины кинетической и потенціальной энергіи въ двухъ положеніяхъ системы; изъ предыдущаго равенства слѣдуетъ:

$$T_2 - T_1 = Э_1 - Э_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(731)}$$

т. е., при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, она пріобрѣтаетъ столько же кинетической энергіи, сколько теряетъ потенціальной энергіи и обратно.

§ 116. Живая сила системы равна живой силѣ движенія центра инерціи, сложенной съ суммою живыхъ силъ относительныхъ движеній точекъ системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи.

Пользуясь обозначеніями, принятыми въ § 99-мъ предыдущей главы, можемъ преобразовать выраженіе T слѣдующимъ образомъ:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[(x_i')^2 + (y_i')^2 + (z_i')^2\right] = \frac{1}{2}M\left((x_c')^2 + (y_c')^2 + (z_c')^2\right) +$$

$$+ x_c'\sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i' + y_c'\sum_{i=1}^{i=n} m_i\eta_i' + z_c'\sum_{i=1}^{i=n} m_i\zeta_i' +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[(\xi_i')^2 + (\eta_i')^2 + (\zeta_i')^2\right];$$

такъ какъ начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы, то суммы, помноженныя на x_c', y_c', z_c', равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, взявъ производныя по времени отъ равенствъ (647) стр. 462, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i' = 0,\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i' = 0,\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i' = 0;$$

поэтому:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2, \ldots \ldots \ldots \ldots (732)$$

здѣсь u_i означаетъ скорость относительнаго движенія точки m_i по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

§ 117. Живая сила движенія твердаго тѣла.

Если система точекъ неизмѣняемая и мы выразимъ скорости точекъ ея по формуламъ (143) кинематической части (стр. 125), то получимъ слѣдующее выраженіе живой силы движенія ея:

$$T = \frac{1}{2} M w_ю^2 + w_ю \Big(r \cos(w_ю, \Upsilon) - q \cos(w_ю, \mathrm{Z}) \Big) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i +$$

$$+ w_ю \Big(p \cos(w_ю, \mathrm{Z}) - r \cos(w_ю, \Xi) \Big) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i +$$

$$+ w_ю \Big(q \cos(w_ю, \Xi) - p \cos(w_ю, \Upsilon) \Big) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i +$$

$$+ \frac{1}{2} (A_ю p^2 + B_ю q^2 + C_ю r^2 - 2D_ю qr - 2E_ю rp - 2F_ю pq) \ldots (733)$$

Здѣсь ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты точки m_i относительно осей $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathrm{Z}$, неизмѣнно связанныхъ съ системою; величины $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ выражаются формулами (662) § 103 стр. 474.

Сумма членовъ, заключающихъ вторыя степени проэкцій угловой скорости, есть ни что иное, какъ:

$$\frac{1}{2}\Omega^2(I_\Omega)_ю, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(734)}$$

т. е., половина квадрата угловой скорости, помноженнаго на моментъ инерціи неизмѣняемой системы вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ точку *Ю*.

Если точка *Ю* неподвижна, то живая сила (вращательнаго движенія твердаго тѣла вокругъ этой неподвижной точки) выразится произведеніемъ (734).

Если за точку *Ю* взятъ центръ инерціи твердаго тѣла, то живая сила выразится такъ:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\Omega^2(I_\Omega)_c \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(735)}$$

Слѣдовательно, *если твердое тѣло движется поступательно, то живая сила его движенія измѣряется половиною произведенія массы тѣла на квадратъ скорости которой либо точки его. Если тѣло вращается вокругъ неподвижной точки, то живая сила измѣряется половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси на квадратъ угловой скорости. Если твердое тѣло совершаетъ какое бы то ни было сложное движеніе, то живую силу можно разсматривать какъ сумму живой силы поступательнаго движенія, общаго съ движеніемъ центра инерціи, съ живою силою вращательнаго движенія вокругъ этого центра; послѣдняя выражается половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ центръ инерціи, на квадратъ угловой скорости.*

§ 118. Поводомъ къ открытію закона живой силы послужилъ вопросъ о качаніи физическаго маятника и объ опредѣленіи такъ называемаго центра качанія. Занимаясь изслѣдованіемъ этого вопроса, Гюйгенсъ (1629 — 1695)*) нашелъ его рѣшеніе, основываясь на особомъ

*) Въ сочиненіи: Horologium oscillatorium 1673.

принципѣ, который есть ни что иное, какъ законъ живой силы въ примѣненіи къ неизмѣняемой системѣ точекъ, имѣющей неподвижную ось и подверженной силѣ тяжести. Доказательство этого принципа и его обобщеніе принадлежатъ Ивану Бернулли (1667 — 1748) *) и Даніилу Бернулли (1700 — 1782), которые примѣнили законъ живой силы къ рѣшенію многихъ вопросовъ механики твердаго тѣла и гидромеханики.

Терминъ «живая сила» былъ введенъ Лейбницемъ (1646 — 1716), который называлъ этимъ именемъ *произведеніе изъ массы на квадратъ скорости;* онъ доказывалъ, что существующее со временъ Галилея и принятое Декартомъ (1596 — 1650) измѣреніе величины силы произведеніемъ изъ массы на ускореніе неправильно, когда оно примѣняется къ силамъ, приложеннымъ къ движущимся тѣламъ, и что истинною мѣрою такихъ силъ должно служить вышесказанное произведеніе **). Мнѣніе Лейбница пріобрѣло многихъ сторонниковъ; между ними и приверженцами прежняго воззрѣнія завязался споръ замѣчательный согласіемъ результатовъ, получаемыхъ геометрами противоположныхъ воззрѣній при рѣшеніи одинаковыхъ вопросовъ. Этотъ споръ былъ покончевъ д'Аламберомъ, который доказалъ спорящимъ, что они спорятъ только изъ за терминовъ, а что существеннаго различія между ихъ воззрѣніями нѣтъ.

Въ сочиненіяхъ Лагранжа, Пуассона, Якоби и у многихъ современныхъ авторовъ живою силою называется произведеніе изъ массы на квадратъ скорости, между тѣмъ какъ Коріолисъ, Гельмгольцъ ***), Кирхгофъ и большая часть физико-математиковъ называютъ живою силою *половину* произведенія изъ массы на квадратъ скорости; въ этой книгѣ мы поступили по примѣру послѣднихъ.

---

*) Mém. de l'Académie de Paris 1703 et 1704. Démonstration de principe de M. Hugens, touchant le centre de balancement et de l'indentité de ce centre avec celui de percussion.

**) Demonstratio erroris memorabilis cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum. Acta erudit. 1686. Mathematische Werke v. Leibniz, Ausgabe von Pertz und Gerhardt, Bd. VI, Halle, 1860.

***) Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. Abhandlungen. Bd. I, s. 18.

ГЛАВА X.

Примѣры и задачи.

При помощи указанныхъ пріемовъ можно рѣшить многія задачи и вопросы о движеніи системъ матерьяльныхъ точекъ и тѣлъ. Прежде всего обратимся къ тѣмъ примѣрамъ, которые были приведены въ главѣ V-й и для которыхъ тамъ были составлены дифференціальныя уравненія движенія; нѣкоторые изъ этихъ примѣровъ могутъ быть рѣшены вполнѣ, въ другихъ же могутъ быть найдены только нѣкоторые интегралы, выражающіе законы сохраненія движенія центра инерціи, площадей и живой силы.

Примѣръ 61-й (страница 326), въ которомъ положимъ:

$$F(r_{12}) = -\varepsilon \frac{m_1 m_2}{r^2_{12}}.$$

Эта задача можетъ быть рѣшена вполнѣ. Обѣ точки свободны, а потому полное рѣшеніе ея требуетъ опредѣленія двѣнадцати интеграловъ, съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ.

Десять интеграловъ суть:

Шесть интеграловъ, выражающихъ, что центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномѣрно (см. стр. 429):

$$\left.\begin{aligned} &x_c' = C_1,\ y_c' = C_2,\ z_c' = C_3, \\ &x_c = C_1 t + \Gamma_1,\ y_c = C_2 t + \Gamma_2,\ z_c = C_3 t + \Gamma_3, \end{aligned}\right\} \ldots (736)$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},\ y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},\ z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Три интеграла, выражающіе законъ площадей въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; на стр. 467 въ § 100 было уже показано, что этимъ интеграламъ можно дать слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} &m_1(m_1 + m_2)(\eta_1 \zeta'_1 - \zeta_1 \eta'_1) = m_2 C_4 \\ &m_1(m_1 + m_2)(\zeta_1 \xi'_1 - \xi_1 \zeta'_1) = m_2 C_5 \\ &m_1(m_1 + m_2)(\xi_1 \eta'_1 - \eta_1 \xi'_1) = m_2 C_6 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (737)$$

Интегралъ, выражающій законъ живой силы

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \varepsilon \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = h.$$

На основаніи формулы (732) параграфа 116-го, равенствъ (654) и (655) параграфа 100-го и равенствъ:

$$\frac{r_{12}}{(m_1 + m_2)} = \frac{\rho_1}{m_2} = \frac{\rho_2}{m_1}, \dots\dots\dots\dots \textbf{(654 bis)}$$

получаемыхъ изъ равенствъ (654), можно послѣдній интегралъ представить такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{\varepsilon m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{h}{m_1 + m_2} - \frac{v_c^2}{2}\right) \frac{m_2}{m_1} \dots\dots\dots \textbf{(738)}$$

Изъ интеграловъ (737) слѣдуетъ, что относительное движеніе точки m_1 совершается въ плоскости:

$$C_4 \xi_1 + C_5 \eta_1 + C_6 \zeta_1 = 0 \dots\dots\dots\dots \textbf{(656)}$$

и что секторьяльная скорость радіуса вектора ρ_1 равна:

$$\sigma = \frac{m_2}{2m_1(m_1 + m_2)} \sqrt{C_4^2 + C_5^2 + C_6^2}.$$

Послѣднія два интегрированія должно произвести надъ дифференціальными уравненіями (738) и

$$\rho_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} = 2\sigma, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(739)}$$

гдѣ θ_1 есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_1 съ нѣкоторымъ постояннымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости относительной траэкторіи; интегрированія должно произвести такъ, какъ указано въ § 27-мъ стр. 119 — 125.

Если относительное движеніе точки m_1 будетъ найдено, то относительное движеніе другой точки (m_2) опредѣлится при помощи равенствъ (654) стр. 466. Обѣ точки будутъ описывать въ движущейся неизмѣняемой плоскости коническія сѣченія, подобныя и подобно расположенныя относительно центра инерціи, который будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и общимъ фокусомъ обѣихъ кривыхъ; радіусы векторы обѣихъ точекъ будутъ всегда противоположны (черт. 64) и отношеніе между величинами радіусовъ векторовъ будетъ постоянное (654 bis).

Примѣръ 62-й (стр. 326 — 327). Полное рѣшеніе требуетъ опредѣленія $6n$ интеграловъ съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ. Такъ какъ центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномѣрно и дифференціальныя уравненія относительнаго движенія каждой точки имѣютъ видъ (648) стр. 463, то всѣ $6n$ интеграловъ могутъ быть найдены, и слѣдовательно, рѣшеніе задачи можетъ быть доведено до конца. Составивъ 6 интеграловъ движенія центра инерціи, надо будетъ получить еще $(6n - 6)$ интеграловъ, интегрируя дифференціальныя уравненія относительнаго движенія $(n - 1)$ точекъ. Объ томъ, что каждая точка въ относительномъ движеніи описываетъ эллипсъ, было уже упомянуто на стр. 463 и 467.

Въ этомъ примѣрѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = C - \frac{\mu}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r^2_{ij},$$

а потому законъ живой силы выразится здѣсь такъ:

$$\frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2 + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2 = h.$$

Примѣръ 63-й, стр. 327. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ, движущихся въ плоскости XY, поэтому число независимыхъ координатъ равно четыремъ, а число искомыхъ интеграловъ — восьми. Четыре интеграла выражаютъ прямолинейное и равномѣрное движеніе центра инерціи; пятый интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_c^2 + \frac{m_1}{2}u_1^2 + \frac{m_2}{2}u_2^2 - \mu m_1 m_2 \operatorname{arctg}\frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = h.$$

(Предполагается, что силы направлены такъ, какъ изображено на чертежѣ 40-мъ).

Этотъ интегралъ можно представить еще такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \mu\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}\operatorname{arctg}\frac{\eta_1}{\xi_1} = \left(\frac{h}{m_1 + m_2} - \frac{v_c^2}{2}\right)\frac{m_2}{m_1}.$$

Вмѣсто интеграла, выражающаго законъ площадей въ относительномъ движеніи точки m_1, получимъ слѣдующій интегралъ:

$$\xi_1\eta_1' - \eta_1\xi_1' = \mu\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}t + C_3.$$

Примѣръ 64-й (стр. 369 — 370). Здѣсь $n=2$, а, слѣдовательно, для полученія полнаго рѣшенія надо найти четыре интеграла; одинъ изъ интеграловъ, выражающій законъ площадей для точки m_1, будетъ: $\rho_1{}^2\theta'_1=C_1$; другой интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\rho_1')^2+\frac{1}{2}m_1\rho_1^2(\theta_1')^2-m_2g(l-\rho_1)=h.$$

Можно произвести и слѣдующія два интегрированія.

Примѣръ 66-й (стр. 371). Здѣсь $n=4$, слѣдовательно, для полнаго рѣшенія задачи надо произвести восемь интегрированій.

Первыя два изъ четырехъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы, который движется какъ свободная матерьяльная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію; четыре интеграла этихъ уравненій суть:

$$\rho_c^2\theta_c'=C_1,\;\; \frac{1}{2}\Big[(\rho_c')^2+\rho_c^2(\theta_c')^2\Big]+\frac{\mu}{2}\rho_c^2=h_1\,.\,.\,\textbf{(740)}$$

$$\frac{1}{\rho_c^2}=\frac{\cos^2(\theta_c+\Gamma_1)}{b^2}+\frac{\sin^2(\theta_c+\Gamma_1)}{a^2};\;\; \mathrm{tg}(\theta_c+\Gamma_1)=\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}(t\sqrt{\mu}+\Gamma_2)$$

$$a^2=\frac{C_1^2}{h_1-\sqrt{h_1^2-\mu C_1^2}},\quad b^2=\frac{C_1^2}{h_1+\sqrt{h_1^2-\mu C_1^2}}.$$

Изъ остальныхъ интеграловъ, одинъ есть:

$$(m_2l^2+(m_1-m_2)\xi^2)\vartheta'=C_2,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\textbf{(741)}$$

другой выражаетъ законъ живой силы въ движеніи всей системы; вычтя изъ него равенство (740), помноженное на $2(m_1+m_2)$, получимъ:

$$(m_2l^2+(m_1-m_2)\xi^2)(\vartheta')^2+\frac{m_1l^2-(m_1-m_2)\xi^2}{l^2-\xi^2}(\xi')^2=$$

$$=h_2-2h_1(m_1+m_2)-\mu(m_2l^2+(m_1-m_2)\xi^2)\,.\,.\,.\,\textbf{(742)}$$

Если $m_2=m_1$, то четыре интеграла относительнаго движенія будутъ:

$$m_1l^2\vartheta'=C_2;\;\; \vartheta=\frac{C_2}{m_1l^2}t+\Gamma_2$$

$$m_1l^2(\vartheta')^2+m_1l^2\frac{(\xi')^2}{l^2-\xi^2}=Bm_1l^2;$$

$$\xi=l\sin(pt+\Gamma_3);\;\; p^2=B-\frac{C_2^2}{m_1^2l^4};\;\; B=\frac{h_2-4h_1m_1}{m_1l^2}-\mu.$$

Слѣдовательно, если массы всѣхъ четырехъ точекъ равны между собою, то движеніе будетъ совершаться слѣдующимъ образомъ: центръ инерціи системы (центръ ромба) будетъ описывать эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ, вмѣстѣ съ тѣмъ взаимно-перпендикулярныя діагонали ромба будутъ равномѣрно вращаться вокругъ центра инерціи и въ то же время длины діагоналей будутъ измѣняться періодически, такъ какъ каждая точка будетъ совершать гармоническое колебаніе вдоль по своей діагонали, отклоняясь на длину l по обѣ стороны центра инерціи.

Кромѣ этихъ примѣровъ, приводимъ рядъ задачъ; въ числѣ ихъ нѣкоторыя хотя и относятся къ движенію твердаго тѣла, но могутъ быть рѣшены съ помощію средствъ, данныхъ въ предыдущихъ главахъ.

19. По наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J катится тяжелый однородный полый шаръ радіуса R; сферическая полость его (радіуса R_1) заполнена тяжелою жидкостью той же самой плотности, какъ и вещество шара; эта жидкость не участвуетъ во вращеніи шара, но движется поступательно; предполагается, что шаръ катится не скользя по плоскости и что въ начальный моментъ онъ былъ въ покоѣ.

Опредѣлить движеніе шара и сравнить съ этимъ движеніе сплошнаго шара того же радіуса R и той же плотности.

Этотъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ.

Составимъ интегралъ, выражающій законъ живой силы. Означимъ черезъ x длину пути, пройденнаго центромъ шара въ теченіи времени t отъ начала движенія и черезъ θ уголъ, на который повернулся шаръ (вокругъ горизонтальной, перпендикулярной къ плоскости паденія, оси) въ теченіи того же времени; такъ какъ шаръ катится по плоскости не скользя, то $\theta R = x$. Потенціалъ силы тяжести, приложенной къ шару и къ жидкости, есть $Mgx \sin J$; моментъ инерціи шара вокругъ оси вращенія равенъ:

$$I = \frac{2}{5}\,\frac{4}{3}\,\pi\sigma(R^5 - R_1{}^5).$$

Уравненіе живой силы будетъ:

$$\frac{1}{2}\,M(x')^2 + \frac{1}{2}\,I(\theta')^2 - Mgx \sin J = 0; \quad M = \frac{4}{3}\,\pi\sigma R^3.$$

Замѣнивъ $\theta' R$ черезъ x', отдѣливъ перемѣнныя, проинтегрировавъ и возвысивъ обѣ части полученнаго равенства въ квадратъ, получимъ:

$$x = \frac{5}{2} \frac{g \sin J}{7 - 2n^5} t^2; \quad n = \frac{R_1}{R}.$$

Точно также найдемъ, что длина пути, проходимаго въ теченіи времени t сплошнымъ шаромъ выразится такъ:

$$x_1 = \frac{5}{2} \frac{g \sin J}{7} t^2,$$

слѣдовательно:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{7}{7 - 2n^5}.$$

20. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки m_1 и m_2 прикрѣплены къ концамъ гибкой нерастяжимой нити, перекинутой черезъ блокъ A (чертежъ 65), вращающійся безъ тренія вокругъ горизонтальной оси; среда, въ которой точки находятся, оказываетъ движенію ихъ сопротивленіе, пропорціональное квадрату скорости. Предполагается, что нить не скользитъ по блоку и что свободныя части ея висятъ вертикально и остаются вертикальными во время движенія.

Опредѣлить движеніе системы, предполагая, что блокъ есть однородный цилиндръ радіуса R и массы M; пусть $m_1 > m_2$.

Такъ какъ нить не скользитъ по блоку, то уголъ θ, на который повернется цилиндръ въ теченіи времени t отъ начала движенія, опредѣлится изъ равенства: $\theta R = x_1 - a_1$, гдѣ x_1 и a_1 суть координаты точки m_1 въ моментъ t и въ начальный моментъ (ось $X^{овъ}$ направлена вертикально внизъ).

Эту задачу можно рѣшить, выходя изъ уравненія (721, C) стр. 508; надо прежде всего составить это уравненіе для настоящаго случая.

Моментъ инерціи блока вокругъ оси вращенія равенъ половинѣ MR^2, живая сила вращенія его равна четверти $MR^2(\theta')^2$ или $M(x_1')^2$; работа вѣса точки m_1 на протяженіи безконечно-малаго перемѣщенія dx_1 равна $m_1 G dx_1$, а работа вѣса точки m_2 равна $(-m_2 G dx_1)$, гдѣ G означаетъ величину ускоренія силы тяжести; элементарная работа сопротивленій среды должна быть величиною отрицательною, она выражается такъ: $\mp (\mu_1 + \mu_2) (x'_1)^2 dx_1$, гдѣ верхній знакъ должно взять при положительномъ dx_1, то есть при движеніи точки m_1 сверху внизъ, а нижній знакъ — при отрицательномъ dx_1, т. е., при движеніи этой точки снизу вверхъ; μ_1 и μ_2 суть коэфиціенты сопротивленія среды движенію точекъ m_1 и m_2.

Уравненіе (721, C) въ настоящемъ случаѣ будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) x_1' dx'_1 = \left[(m_1 - m_2)\, G \mp (\mu_1 + \mu_2)\, (x_1')^2\right] dx.$$

Представимъ это уравненіе такъ:

$$\frac{x'_1 dx'_1}{g_1 \mp k_1^2 (x'_1)^2} = dx, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(K)}$$

гдѣ:

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = k_1^2, \qquad \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} G = g_1.$$

Сравнивъ дифференціальное уравненіе (K) съ подобными же дифференціальными уравненіями, встрѣчающимися въ примѣрѣ 11-мъ (стр. 71 — 73), мы можемъ заключить, что при движеніи всей системы точка m_1 движется такимъ образомъ, какъ будто бы она была свободна и двигалась прямолинейно при дѣйствіи силы $m_1 g_1$ и сопротивленія среды, равнаго $k_1^2 m_1 (x'_1)^2$.

21. Представимъ себѣ неподвижное твердое тѣло, имѣющее сферическую полость радіуса R_0 (черт. 66). Внутри этой полости, по ея поверхности катается безъ скольженія такой же шаръ радіуса R, какъ въ задачѣ 19-й; шаръ этотъ имѣетъ сферическую полость радіуса R_1, заполненную жидкостью той же плотности, какъ и вещество шара; центръ его остается въ одной и той же вертикальной плоскости.

Опредѣлить движеніе шара при дѣйствіи силы тяжести, предполагая, что въ начальный моментъ линія OC, соединяющая центръ O сферы радіуса R_0 съ центромъ C подвижнаго шара, составляетъ уголъ β съ вертикальною линіею OD и что въ этотъ моментъ шаръ находится въ покоѣ.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый линою OC съ вертикальною линіею OD въ какой либо моментъ t; пусть D_1 (черт. 66) есть та точка движущагося шара, которая совпадаетъ съ точкою D тогда, когда уголъ φ равенъ нулю; означимъ черезъ θ уголъ, составляемый линою CD_1 съ вертикальною линіею. Такъ какъ шаръ катается безъ скольженія, то дуга AD равна дугѣ AD_1, т. е.: $R_0\varphi = R(\theta + \varphi)$.

Законъ живой силы выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{1}{2} M (R_0 - R)^2 (\varphi')^2 + \frac{1}{2} \frac{8}{15} \pi\sigma (R^5 - R_1^5) \left(\frac{R_0 - R}{R}\right)^2 (\varphi')^2 =$$
$$= Mg (R_0 - R) (\cos\varphi - \cos\beta),$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10g}{(7 - 2n^5)(R_0 - R)} (\cos\varphi - \cos\beta);$$

сравнивъ это уравненіе съ уравненіемъ живой силы движенія простаго маятника (стр. 236), мы заключимъ, что длина OC качается по тому же закону, какъ простой маятникъ длины:

$$\frac{7-2n^5}{5}(R_0 - R).$$

22. На гладкой горизонтальной плоскости лежитъ тяжелая призма, имѣющая основаніемъ прямоугольный треугольникъ $BЮK$ (черт. 67); эта призма можетъ скользить безъ тренія вдоль по плоскости, по направленію оси $X^{овъ}$; въ начальный моментъ призма была въ покоѣ, причемъ центръ инерціи ея находился на оси $Y^{овъ}$. Въ этотъ же моментъ на наклонную плоскость $ЮK$ былъ положенъ тяжелый однородный шаръ, радіуса R и массы m. Вслѣдствіе дѣйствія силы тяжести, шаръ начнетъ катиться по наклонной плоскости и если треніе между нимъ и этою плоскостью достаточно велико, то катаніе шара не будетъ сопровождаться скольженіемъ по плоскости.

Требуется опредѣлить, на какую длину ξ скатится шаръ вдоль по плоскости $ЮK$ въ теченіи времени t.

Всѣ задаваемыя силы, приложенныя къ этой системѣ, суть силы тяжести, направленныя по отрицательной оси $Y^{овъ}$, поэтому центръ инерціи всей системы не долженъ сходить съ той вертикальной линіи, на которой онъ находился въ начальный моментъ.

Отсюда слѣдуетъ, что вмѣстѣ съ паденіемъ шара по наклонной плоскости, сама призма должна скользить по направленію положительной оси $X^{овъ}$; въ то время, въ которое центръ шара пройдетъ вдоль по наклонной плоскости разстояніе ξ, центръ инерціи призмы долженъ пройти разстояніе x, удовлетворяющее равенству:

$$Mx = m(\xi \cos J - x),$$

гдѣ J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью $ЮK$ съ горизонтомъ, M — масса призмы, m — масса шара.

Живая сила призмы равна половинѣ $M(x')^2$; живая сила шара состоитъ: изъ живой силы его центра инерціи и изъ живой силы вращательнаго движенія вокругъ центра инерціи:

$$\frac{1}{2}\left[m(\xi' \cos J - x')^2 + m(\xi')^2 \sin^2 J + \frac{2}{5} m R^2 (\theta')^2\right];$$

такъ какъ шаръ катится по наклонной плоскости безъ скольженія, то $R\theta' = \xi'$.

Составимъ уравненіе, выражающее законъ живой силы:

$$\frac{m}{2(M+m)}\left(\frac{7}{5}M+\frac{2}{5}m+m\sin^2 J\right)(\xi')^2=mg\xi\sin J;$$

изъ него получимъ:

$$\xi=\frac{(M+m)g\sin J}{\frac{7}{5}M+\left(\frac{2}{5}+\sin^2 J\right)m}\frac{t^2}{2}.$$

23. На поверхность круговаго горизонтальнаго цилиндра, радіусъ котораго равенъ R, положено сочлененіе, состоящее изъ двухъ тяжелыхъ однородныхъ стержней, связанныхъ шарниромъ. Въ начальный моментъ оба стержня DB и DB_1 приподняты за концы B и B_1 до горизонтальнаго положенія (см. черт. 68), причемъ шарниръ D прикасается къ высшей точкѣ окружности одного изъ сѣченій цилиндра, а стержни находятся въ плоскости этого сѣченія. Изъ этого положенія концы стержней пущены свободно; подъ вліяніемъ силы тяжести свободные концы стержней начинаютъ опускаться внизъ, а шарниръ D — подыматься вверхъ. Требуется опредѣлить, какъ великъ наибольшій уголъ съ горизонтомъ, до котораго наклонятся стержни при этомъ движеніи.

Стержни предполагаются безконечно-тонкими; каждый изъ нихъ имѣетъ длину $3\sqrt{2}R$ и массу M.

Примемъ центръ круга за начало координатъ и направимъ ось Y вертикально внизъ; означимъ черезъ θ уголъ наклоненія стержней къ горизонту, а координаты центра инерціи C стержня $D'B'$ черезъ x_c и y_c.

Легко видѣть, что:

$$OD'=\frac{R}{\cos\theta},\ \ x_c=\frac{3}{\sqrt{2}}R\cos\theta,\ \ y_c=\frac{3}{\sqrt{2}}R\sin\theta-\frac{R}{\cos\theta}.$$

Потенціалъ вѣса обоихъ стержней равенъ $2Mgy_c$; въ начальномъ положеніи стержней $y_c=-R$ и потенціалъ имѣетъ тогда значеніе: $-2MgR$; живая сила стержней равна нулю и въ начальномъ положеніи и въ тотъ моментъ, когда стержни достигнутъ наибольшаго наклона θ_1. Изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы, слѣдуетъ:

$$2MgR\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta_1-\frac{1}{\cos\theta_1}+1\right)=0;$$

отсюда найдемъ: $\cos\theta_1=\frac{1}{3}$.

24. Къ точкамъ A и B (черт. 69) прикрѣплены концы гибкой нерастяжимой нити длины $2an$, гдѣ $2a$ есть разстояніе между точками A и B, а n — нѣкоторое отвлеченное число или дробь; къ серединѣ нити прикрѣплена тяжелая масса M. Однородный тяжелый стержень, имѣющій длину $2a$ и массу M снабженъ на концахъ ушками, черезъ которыя нить продѣта. Въ начальный моментъ концы D и E стержня совпадаютъ съ точками A и B и грузъ находится въ покоѣ на вытянутыхъ половинахъ нити MB и MA.

Затѣмъ стержень пущенъ свободно. Опредѣлить, какова должна быть наименьшая длина нити, при которой, въ концѣ паденія стержня, грузъ M прикоснется къ его серединѣ.

Въ начальный моментъ координаты (по оси $Y^{\text{овъ}}$) груза M и центра инерціи стержня суть $a\sqrt{n^2-1}$ и нуль; въ тотъ моментъ, въ который требуемое прикосновеніе дѣйствительно произойдетъ, обѣ эти точки будутъ имѣть координату: $a(n-1)$. Для того, чтобы прикосновеніе произошло, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:

$$Mg(2a(n-1)-a\sqrt{n^2-1})\geqslant 0,$$

получаемое изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы; изъ этого условія находимъ: $n\geqslant\frac{5}{3}$.

25. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости можетъ скользить свободно, безъ всякаго тренія, круговой плоскій дискъ радіуса R и массы M. На той же плоскости прикрѣпленъ неподвижно другой дискъ, радіусъ котораго равенъ Rn; (на черт. 70-мъ изображены оба диска; неподвижный, имѣющій центромъ точку O и подвижный, имѣющій центромъ точку B). На диски надѣтъ накрестъ (см. черт. 70-й) упругій, связанный концами шнуръ, модуль упругости котораго равенъ E; этотъ шнуръ въ натуральномъ состояніи имѣетъ длину, равную суммѣ окружностей обоихъ дисковъ. Въ начальный моментъ подвижный дискъ оттянутъ отъ неподвижнаго на столько, что шнуръ имѣетъ натяженіе T; затѣмъ дискъ B пущенъ свободно. Опредѣлить скорость, съ которою дискъ B ударится о дискъ неподвижный.

Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый свободными частями шнура съ линіею OB; по извѣстной формулѣ, выражающей зависимость между натяженіемъ и относительнымъ удлинненіемъ шнура: $Tl_0=\lambda E$, гдѣ λ есть удлинненіе шнура, т. е., разность между длиною растянутаго шнура и длиною его l_0 въ натуральномъ состояніи.

Легко разсчитать, что

$$\lambda = 2R(1+n)\left(\theta + \operatorname{cotg}\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ x = \frac{R(1+n)}{\sin\theta},$$

гдѣ x означаетъ разстояніе OB. Затѣмъ окажется, что элементарная работа силъ, приложенныхъ къ диску, выражается такъ:

$$-2T\cos\theta dx = \frac{2E}{\pi}R(1+n)\left(\theta + \operatorname{cotg}\theta - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cotg}^2\theta d\theta$$

и что это есть полный дифференціалъ слѣдующей функціи:

$$\frac{2E}{\pi}R(1+n)\left[\frac{\pi}{2}\theta + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\theta - \theta\operatorname{cotg}\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\theta\right].$$

Изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы, найдемъ, что искомая скорость равна:

$$V = \frac{T}{E}\sqrt{\frac{2(n+1)R\pi E}{M}}.$$

26. Въ вертикальную гладкую стѣну вбиты два круглыхъ гвоздя A и B на одномъ уровнѣ и въ разстояніи $2b$ одинъ отъ другаго; на эти гвозди наложена крестовина, состоящая изъ двухъ стержней KL и K_1L_1 (черт. 71) равной длины и вѣса, сочлененныхъ шарниромъ C, проходящимъ черезъ середины стержней. Въ начальный моментъ стержни взаимно-перпендикулярны и шарниръ C приходится надъ серединою O разстоянія AB, а стержни находятся въ покоѣ.

Подъ вліяніемъ силы тяжести точка C станетъ опускаться, а уголъ L_1CL — увеличиваться. Требуется опредѣлить, какую скорость будетъ имѣть точка C тогда, когда она совпадетъ съ точкою O; предполагается, что центры инерціи стержней находятся въ C и что плечо инерціи каждаго стержня вокругъ C равно k.

Означимъ уголъ CBO черезъ θ и координату (по оси $Y^{овъ}$) точки C черезъ y_c. Легко видѣть, что

$$y_c = -b\operatorname{tg}\theta,\ \theta' = -\frac{y'_c}{b}\cos^2\theta$$

и что интегралъ, выражающій законъ живой силы, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$M(y'_c)^2 + Mk^2(\theta')^2 = 2Mg(b+y_c);$$

отсюда найдемъ, что искомая скорость равна:

$$\sqrt{\frac{2gb^3}{b^2+k^2}}.$$

27. Весьма тонкая твердая трубка, имѣющая видъ винтовой линіи, навернутой на цилиндрѣ радіуса R, можетъ свободно вращаться вокругъ оси этого цилиндра. Ось цилиндра вертикальна, уголъ подъема винтовой линіи $=\alpha$, масса трубки равна M. Въ начальный моментъ трубка въ покоѣ, а въ верхній конецъ ея свободно пущена тяжелая матерьяльная точка, масса которой равна m. Опредѣлить величину угловой скорости, пріобрѣтенную трубкою при паденіи точки m на глубину h.

Точка m скользитъ вдоль по трубкѣ и въ то же время трубка должна вращаться вокругъ вертикальной оси; зависимость между относительною скоростью точки m по отношенію къ трубкѣ и угловою скоростью послѣдней опредѣлится изъ интеграла, выражающаго, что законъ площадей имѣетъ мѣсто вокругъ оси вращенія. Если s' есть относительная скорость точки m, а θ' — угловая скорость трубки, то моментъ абсолютнаго количества движенія точки m вокругъ оси $Z^{\text{овъ}}$ (черт. 72) будетъ: $mR(s'\cos\alpha - R\theta')$, а моментъ количествъ движенія трубки: $-MR^2\theta'$; такъ какъ въ начальный моментъ вся система была въ покоѣ, то:

$$mR(s'\cos\alpha - R\theta') - MR^2\theta' = 0;$$

отсюда получимъ величину отношенія между s' и θ'.

Затѣмъ изъ интеграла, выражающаго законъ живой силы, найдемъ:

$$\theta' = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}}.$$

28. Твердая тонкая однородная трубка можетъ свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси къ ней перпендикулярной и проходящей черезъ ея середину. Трубка имѣетъ длину $2a$ и массу M. Кромѣ трубки имѣется еще тонкій однородный и тяжелый стержень длины $2a_1$ и массы m; этотъ стержень свободно входитъ въ трубку.

Въ начальный моментъ трубка AB находится въ покоѣ въ горизонтальномъ положеніи, а стержень DE приставленъ концемъ D къ концу B трубки (черт. 73), причемъ ось его составляетъ продолженіе оси трубки. Въ этомъ положеніи стержню сообщена скорость V въ направленіи DC. Какъ только стержень пачнетъ входить въ трубку, то своимъ

вѣсомъ начнетъ клонить конецъ B къ низу, такъ что, вмѣстѣ съ скольженіемъ стержня вдоль по трубкѣ, будетъ происходить вращеніе системы вокругъ оси C. Предполагая, что начальная скорость V на столько велика, что середина C_1 стержня дойдетъ только до середины C трубки, опредѣлить величину угловой скорости системы въ моментъ совпаденія серединъ.

Чтобы опредѣлить эту угловую скорость, надо составить интегралъ, выражающій законъ живой силы, и примѣнить его къ моменту совпаденія серединъ стержня и трубки; изъ него найдемъ, что искомая угловая скорость равна:

$$\frac{3mV^2}{Ma^2 + ma_1^2}.$$

29. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости находится твердый параллелопипедъ $ABDE$ (черт. 74), заключающій въ себѣ сферическую пустоту (радіуса R); въ этой полости находится тяжелая матерьяльная точка (масса m). Въ начальный моментъ точка m находится въ нижней точкѣ сферической полости и абсолютная скорость ея равна нулю, а параллелопипедъ (масса M) имѣетъ скорость V вдоль по горизонтальной оси $X^{овъ}$; опредѣлить, какъ должна быть велика скорость V для того, чтобы точка m двигалась по окружности большаго вертикальнаго круга сферы въ одномъ направленіи.

Черезъ центръ $Ю$ сферы проведемъ: ось $Ю\Xi$ параллельно оси $X^{овъ}$ и ось $ЮY$ вертикально внизъ.

По закону движенія центра инерціи:

$$Mx'_ю + m(x'_ю + \xi') = MV,$$

по закону живой силы:

$$\frac{1}{2}\left[M(x'_ю)^2 + m(x'_ю + \xi')^2 + m(\eta')^2\right] - \frac{1}{2}MV^2 = mg(\eta - R).$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ $x'_ю$, получимъ:

$$\frac{Mm}{M+m}(\xi'^2 - V^2) + m(\eta')^2 = 2mg(\eta - R).$$

Когда точка m будетъ въ самой верхней точкѣ сферы, тогда $\eta = -R$, $\eta' = 0$; притомъ тогда давленіе точки на сферу должно быть направлено снизу вверхъ, слѣдовательно, центробѣжная сила должна быть болѣе

вѣса точки, т. е.: $(\xi')^2 > gR$, а потому изъ послѣдняго равенства заключимъ, что скорость V должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$V^2 > 5gR + 4gR\frac{m}{M}.$$

30. Такой же параллелопипедъ, какъ и въ предыдущей задачѣ, но въ немъ, вмѣсто сферической пустоты, просверленъ тонкій каналъ, имѣющій видъ циклоиды, обращенной выпуклостью книзу; уравненіе ея:

$$\xi = R(\omega + \sin\omega),\ \ \eta = R(1 + \cos\omega);$$

тяжелая матерьяльная точка m скользитъ безъ тренія по этому каналу.

Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы, предполагая, что въ начальный моментъ параллелопипедъ (масса M) и точка m были въ покоѣ и что тогда эта точка не находилась въ самой нижней точкѣ циклоиды.

Изъ уравненій, выражающихъ законы движенія центра инерціи и живой силы:

$$Mx_{ю} + m(x_{ю} + \xi) = 0$$

$$M(x'_{ю})^2 + m((x'_{ю} + \xi')^2 + (\eta')^2) = 2mg(\eta - \eta_0)$$

и изъ уравненій кривой получимъ:

$$R^2\left(\frac{1}{1+\mu}(1 + \cos\omega)^2 + \sin^2\omega\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 2gR(\cos\omega - \cos\omega_0),$$

гдѣ μ означаетъ величину отношенія m къ M. Сдѣлавъ подстановку:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sin\frac{\omega_0}{2}\cos\varphi,$$

отдѣливъ перемѣнныя и произведя интегрированіе, получимъ:

$$\frac{T}{\pi}\int d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = t + \Gamma,$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{4R\left(1 + \mu\sin^2\frac{\omega_0}{2}\right)}{g(1+\mu)}},\qquad k^2 = \frac{\mu\sin^2\frac{\omega_0}{2}}{1 + \mu\sin^2\frac{\omega_0}{2}}.$$

31. Двѣ матерьяльныя точки, массы которыхъ (m) равны между собою, находятся внутри кольцеобразной тонкой однородной трубки (радіусъ кольца R); онѣ связаны упругою нитью, тоже помѣщающеюся въ трубкѣ; длина этой нити, въ натуральномъ состояніи, равна двумъ третямъ длины трубки. Трубка (масса M) лежитъ на гладкой горизонтальной плоскости, по которой можетъ скользить безъ всякаго тренія. Въ начальный моментъ нить растянута на столько, что обѣ точки прикасаются одна къ другой въ точкѣ A трубки; какъ онѣ, такъ и трубка, находятся въ этотъ моментъ въ покоѣ, а затѣмъ система предоставлена самой себѣ. Найти, чему равняется отношеніе кинетической энергіи обѣихъ точекъ къ кинетической энергіи всей системы въ тотъ моментъ, когда нить приметъ натуральную длину.

Примемъ начальное положеніе центра кольца за начало неподвижныхъ координатъ, линію OA — за ось X; начало подвижныхъ осей возьмемъ въ центрѣ $Ю$ кольца, который будетъ оставаться на оси $X^{овъ}$; самое кольцо будетъ двигаться поступательно, а хорда, соединяющая обѣ точки, будетъ всегда перпендикулярна къ оси X. Оси Ξ и Υ расположимъ такъ, какъ изображено на чертежѣ 75-мъ.

Такъ какъ центръ инерціи всей системы неподвиженъ и матерьяльныя точки остаются на окружности: $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, то:

$$(M + 2m)x'_{ю} + 2m\xi' = 0, \quad \eta' = -\frac{\xi}{\eta}\xi'.$$

Въ разсматриваемый моментъ ξ относится къ η какъ 1 къ $\sqrt{3}$; кинетическая энергія обѣихъ точекъ окажется равною:

$$m\Big((x'_{ю} + \xi')^2 + (\eta')^2\Big) = \frac{4m}{3(M+2m)^2}(M^2 + mM + m^2)(\xi')^2,$$

а кинетическая энергія всей системы — равною:

$$\frac{2m}{3(M+2m)^2}(2M + m)(M + 2m)(\xi')^2.$$

32. Двѣ матерьяльныя точки m_1 и m_2 связаны нерастяжимою нитью, имѣющею длину l и проходящею черезъ точку 0; точка m_1 притягивается къ O силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія. Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы.

Эту задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Къ точкѣ m_1 приложена сила, направленная къ точкѣ O, и реакція связи: $l - \rho_1 - \rho_2 \geqslant 0$, направленная туда же; поэтому точка m_1 должна

постоянно оставаться въ плоскости, проведенной черезъ начальный радіусъ векторъ и черезъ направленіе начальной скорости ея; точно также и точка m_2 во все время движенія остается въ одной плоскости; слѣдовательно, траекторіи обѣихъ точекъ суть плоскія кривыя, заключающіяся въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ точку O.

Движеніе каждой точки въ отдѣльности удовлетворяетъ закону площадей, а движеніе обѣихъ точекъ — закону живой силы; т. е., мы имѣемъ слѣдующіе интегралы:

$$\rho_1^2\theta_1' = C_1, \quad \rho_2^2\theta'_2 = C_2,$$

$$(m_1 + m_2)(\rho'_1)^2 + m_1\rho_1^2(\theta_1')^2 + m_2\rho_2^2(\theta_2')^2 = 2h + \frac{2m_1\mu}{\rho_1};$$

гдѣ ρ_1 и ρ_2 суть радіусы векторы точекъ; θ_1 — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_1 съ нѣкоторымъ неподвижнымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости орбиты точки m_1; θ_2 есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_2 съ неподвижнымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости орбиты точки m_2.

Величина реакціи, оказываемой связью на каждую изъ точекъ, выразится по формулѣ, составленной на страницѣ 338; въ примѣненіи къ настоящему вопросу эта формула дастъ:

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\rho_1(\theta_1')^2 + \rho_2(\theta'_2)^2 - \frac{\mu}{\rho_1^2}\right).$$

Связь находится въ состояніи напряженія до тѣхъ поръ, пока выраженіе:

$$\frac{C_1^2}{\rho_1^3} + \frac{C_2^2}{\rho_2^3} - \frac{\mu}{\rho_1^2} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (743)$$

больше нуля.

Пока связь находится въ состояніи напряженія, радіусъ векторъ ρ_2 равняется $(l - \rho_1)$; исключивъ изъ предыдущихъ интеграловъ θ_1' и θ_2', замѣнивъ ρ_2 черезъ $(l - \rho_1)$, отдѣливъ перемѣнныя ρ_1 и t, и интегрируя, получимъ:

$$\int \rho_1(l - \rho_1)\frac{d\rho_1}{R} = \frac{(t + \Gamma_1)}{\sqrt{m_1 + m_2}},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{(2h\rho_1^2 + 2m_1\mu\rho_1 - m_1C_1^2)(l - \rho_1)^2 - m_2C_2^2\rho_1^2}.$$

Произведя интегрированіе и рѣшивъ полученный интегралъ относи-

тельно ρ_1, будемъ имѣть выраженіе этого радіуса вектора въ функціи отъ времени. Затѣмъ придется произвести еще два интегрированія для того, чтобы найти выраженія угловъ θ_1 и θ_2 въ функціяхъ отъ времени.

Слѣдуетъ замѣтить, что если C_1 и C_2 не равны нулю и если начальная величина a радіуса вектора ρ_1 заключается между нулемъ и l, то и во все время движенія ρ_1 не можетъ, ни обратиться въ нуль, ни возрости до l. Въ самомъ дѣлѣ, изъ третьяго интеграла слѣдуетъ, что при $\rho_1 = a$, подкоренной многочленъ R^2 имѣетъ положительную величину:

$$(m_1 + m_2)\,(\rho_1')^2 a^2 (l - a)^2,$$

далѣе, при $\rho_1 = 0$, и при $\rho_1 = l$ многочленъ R^2 имѣетъ отрицательныя величины:

$$-m_1 C_1^2 l^2, \quad -m_2 C_2^2 l^2,$$

слѣдовательно, должны существовать два значенія ρ_1, обращающія многочленъ R^2 въ нуль, притомъ одно изъ нихъ (b_1) должно заключаться между нулемъ и a, другое: (b_2) — между a и l; такъ какъ R не можетъ, при движеніи, получать мнимыхъ значеній, то ρ_1 должно колебаться между предѣлами b_1 и b_2.

33. Система состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ матерьяльныхъ точекъ m_1 и m_2, между которыми существуетъ взаимное притяженіе, пропорціональное произведенію массъ и разстоянію между точками; точка m_1 должна оставаться на нѣкоторой наклонной плоскости: $z_1 - y_1 \operatorname{cotg} J = 0$, а точка m_2 — на вертикальной линіи: $z_2 = 0$, $x_2 = 0$ (ось Y направлена внизъ). Опредѣлить движеніе точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія:

$$m_1 x_1'' = -\mu m_1 m_2 x_1,$$

$$m_1 y_1'' = -\mu m_1 m_2 (y_1 - y_2) - \lambda \operatorname{cotg} J + m_1 g,$$

$$m_1 z_1'' = -\mu m_1 m_2 z_1 + \lambda,$$

$$m_2 y_2'' = -\mu m_1 m_2 (y_2 - y_1) + m_2 g.$$

Изъ двухъ среднихъ уравненій исключимъ λ, замѣнимъ y_1 черезъ $z_1 \operatorname{tg} J$, а затѣмъ положимъ:

$$y_2 = \mathfrak{y} + \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(744)}$$

$$\frac{z_1}{\cos J} = y_2 \sin J + \mathfrak{x} + \frac{g \sin J}{\mu m_2} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \sin J + \frac{g(m_1 + m_2) \sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \ldots \textbf{(745)}$$

тогда получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія, подлежащія интегрированію:

$$x_1'' = -\mu m_2 x, \quad \mathfrak{x}'' + \mathfrak{y}'' \sin J = -\mu m_2 \mathfrak{x},$$

$$\mathfrak{y}'' = -\mu m_1 (\mathfrak{y} \cos^2 J - \mathfrak{x} \sin J);$$

первое изъ нихъ интегрируется отдѣльно, второе же и третье суть совокупныя линейныя дифференціальныя уравненія втораго порядка, имѣющія слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\mathfrak{x} = e^{kt}, \quad \mathfrak{y} = \varkappa e^{kt},$$

гдѣ k и $\varkappa$ суть постоянныя, опредѣляемыя изъ уравненій:

$$k^2 + \varkappa k^2 \sin J + \mu m_2 = 0, \quad \varkappa k^2 + \mu m_1 (\varkappa \cos^2 J - \sin J) = 0.$$

Этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ четыре совокупности значеній k и $\varkappa$:

$$1 \begin{cases} k_1 = + i\omega_1 \sqrt{\mu}, \\ \varkappa_1, \end{cases} \qquad 2 \begin{cases} k_2 = + i\omega_2 \sqrt{\mu}, \\ \varkappa_2, \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} k_3 = - i\omega_1 \sqrt{\mu}, \\ \varkappa_1, \end{cases} \qquad 4 \begin{cases} k_4 = - i\omega_2 \sqrt{\mu}, \\ \varkappa_2. \end{cases}$$

$$\omega_1 \sqrt{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2J}},$$

$$\omega_2 \sqrt{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2J}},$$

$$\varkappa_1 = \frac{m_1 \sin J}{m_1 \cos^2 J - \omega_1}, \qquad \varkappa_2 = \frac{m_1 \sin J}{m_1 \cos^2 J - \omega_2}.$$

Въ результатѣ получимъ слѣдующее полное рѣшеніе этой задачи:

$$x_1 = A_1 \cos (t\sqrt{\mu m_2} + A_2), \dots\dots\dots \textbf{(746, 1)}$$

$$\frac{z_1}{\cos J} = \frac{g(m_1 + m_2) \sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J} + B_1 (1 + \varkappa_1 \sin J) \cos (t\omega_1 \sqrt{\mu} + C_1) +$$

$$+ B_2 (1 + \varkappa_2 \sin J) \cos (t\omega_2 \sqrt{\mu} + C_2), \textbf{(746, 2)}$$

$$y_2 = \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J} + B_1 \varkappa_1 \cos(t\omega_1 \sqrt{\mu} + C_1) +$$

$$+ B_2 \varkappa_2 \cos(t\omega_2 \sqrt{\mu} + C_2) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(746, 3)}$$

Отношеніе $(z_1 : \cos J)$ выражаетъ разстояніе точки m_1 отъ оси $X^{овъ}$.

Формула (746, 3) выражаетъ, что матерьяльная точка m_2 совершаетъ сложныя гармоническія колебанія по обѣ стороны точки:

$$x = 0,\ \ y = \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J},\ \ z = 0;$$

эти сложныя колебанія можно разсматривать какъ результатъ интерференціи простыхъ колебаній, имѣющихъ періоды:

$$\frac{2\pi}{\omega_1 \sqrt{\mu}} \ \text{ и } \ \frac{2\pi}{\omega_2 \sqrt{\mu}}.$$

Движеніе точки m_1 по наклонной плоскости совершается около точки:

$$x = 0,\ \ \frac{z}{\cos J} = \frac{g(m_1 + m_2)\sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J},\ \ y = z \operatorname{tg} J$$

и есть результатъ простыхъ гармоническихъ колебаній по оси $X^{овъ}$, имѣющихъ періодъ $(2\pi : \sqrt{\mu m_2})$ и сложныхъ гармоническихъ колебаній, перпендикулярныхъ къ этой оси.

34. Вокругъ горизонтальной оси вращается равномѣрно (съ угловою скоростью ω) плоскость, параллельная этой оси и отстоящая отъ нея въ разстояніи l. (На чертежѣ 76-мъ плоскость чертежа изображаетъ нѣкоторую вертикальную плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія; точка O — слѣдъ этой оси, а линія QBP — слѣдъ вращающейся плоскости въ моментъ t). Въ начальный моментъ $(t = 0)$ вращающаяся плоскость горизонтальна и на нее, въ точку B (черт. 76), былъ положенъ тяжелый однородный шаръ радіуса R и массы M; предполагается, что шаръ этотъ не можетъ скользить по плоскости. Требуется опредѣлить движеніе шара, пока онъ остается на вращающейся плоскости.

Очевидно, что центръ шара C останется въ плоскости XY и что положеніе шара на плоскости и въ пространствѣ вполнѣ опредѣлится разстояніемъ ξ_c его центра отъ линіи OB (по которой мы направимъ ось OY), такъ какъ уголъ θ, на который повернется шаръ, будетъ равенъ:

$$\theta = \omega t + \frac{\xi_c}{R}.$$

Абсолютныя координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = \xi_c \cos\omega t - (l - R)\sin\omega t,\ \ y_c = \xi_c \sin\omega t + (l - R)\cos\omega t.$$

Для рѣшенія этого вопроса, составимъ сначала Лагранжево дифференціальное уравненіе, которому долженъ удовлетворять координатный параметръ ξ_c; составляя это уравненіе:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_c}\right) = \frac{\partial T}{\partial \xi_c} + Q,$$

придется составить слѣдующія выраженія:

$$v_c^2 = (\xi'_c)^2 + \xi_c^2\omega^2 + \omega^2(l - R)^2 - 2\xi'_c\omega(l - R),$$

$$R^2(\theta')^2 = R^2\omega^2 + 2\omega R\xi'_c + (\xi'_c)^2$$

$$T = \frac{M}{2}\left(v_c^2 + \frac{2}{5}R^2(\theta')^2\right);\ \ Q = Mg\frac{\partial y_c}{\partial \xi_c} = Mg\sin\omega t.$$

Окажется, что Лагранжево уравненіе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{7}{5}\xi_c'' = \omega^2\xi_c + g\sin\omega t.$$

Полный интегралъ этого уравненія:

$$\xi_c = A_1 e^{kt} + A_2 e^{-kt} - \frac{5}{12}\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t,\quad k = \omega\sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Въ моментъ $t = 0$, центръ шара находится на оси Y, т. е., въ этотъ моментъ $\xi_c = 0$, а потому $A_2 = -A_1$; кромѣ того, въ этотъ моментъ абсолютная скорость центра инерціи равна нулю, а, слѣдовательно:

$$(\xi'_c)_0 = (l - R)\omega;\ \ A_1 = \frac{\sqrt{35}}{24}\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\frac{7}{5}}\,\frac{(l - R)}{2}.$$

35. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки (массы m_1 и m_2) связаны нерастяжимою гибкою нитью длины l и движутся въ средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости и массѣ точки; движеніе совершается въ одной вертикальной плоскости.

Въ этомъ случаѣ:

$$X_1 = -\varkappa m_1 x_1';\quad Y_1 = -\varkappa m_1 y_1' + m_1 g$$

$$X_2 = -\varkappa m_2 x_2'; \quad Y_2 = -\varkappa m_2 y_2' + m_2 g$$

$$x_1 = x_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos\theta, \quad y_1 = y_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin\theta$$

$$x_2 = x_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos\theta, \quad y_2 = y_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin\theta.$$

Составивъ уравненія Лагранжа, получимъ:

$$x_c'' = -\varkappa x_c', \ y_c'' = -\varkappa y_c' + g, \ \theta'' = -\varkappa\theta';$$

первыя два дифференціальныя уравненія выражаютъ, что центръ инерціи движется какъ свободная тяжелая точка, имѣющая массу, равную единицѣ (см. примѣръ 18-й, стр. 83 — 85); послѣднее дифференціальное уравненіе, по интегрированіи, даетъ слѣдующій результатъ:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta_0'}{\varkappa}(1 - e^{-\varkappa t}).$$

По формуламъ страницы 345-й составимъ выраженія для реакцій λ; найдемъ:

$$Q = -\varkappa u \cos(u, r_{12}), \ K = -\frac{u^2}{r_{12}} + \frac{u^2 \cos^2(u, r_{12})}{r_{12}};$$

пока скорости точекъ удовлетворяютъ условію:

$$u \cos(u, r_{12}) = v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) = 0,$$

до тѣхъ поръ:

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ \frac{u^2}{l} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l(\theta')^2,$$

т. е., λ имѣетъ величину положительную; значитъ, если въ начальный моментъ нить была натянута, то она останется натянутою и во все время движенія.

ГЛАВА XI.

О движеніи твердаго тѣла.

§ 119. Дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла.

Свободная неизмѣняемая система точекъ или свободное твердое тѣло имѣетъ шесть *степеней свободы* *), потому что число координатныхъ параметровъ, вполнѣ опредѣляющихъ положеніе такой системы въ пространствѣ, равно шести.

Этими координатными параметрами могутъ служить координаты твердаго тѣла: $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, *ф*, *ж*, *э* или другія шесть независимыхъ перемѣнныхъ, могущія замѣнить эти координаты.

Въ томъ, что число степеней свободы свободной неизмѣняемой системы точекъ равно шести, можно убѣдиться при помощи слѣдующаго соображенія.

Неизмѣняемость системы, состоящей изъ n точекъ, можетъ быть достигнута нѣкоторымъ числомъ неизмѣняемыхъ стержней, соединяющихъ точки попарно; наименьшее число стержней, потребное для этого, легко можетъ быть разсчитано. Три точки будутъ неизмѣняемо связаны тремя стержнями, а всякая новая точка будетъ прикрѣплена къ предыдущимъ тремъ не менѣе, какъ тремя новыми стержнями, такъ что, для неизмѣннаго соединенія между собою

3-хъ точекъ — требуется 3 стержня,

4-хъ „ „ $3+3=6$ стержней,

5-и „ „ $3+2.3=9$ стержней,

. . . .

n „ „ $3+(n-3)3=3n-6$ стержн.

---

*) Значеніе этого термина указано на стран. 372-й, въ примѣчаніи 1-мъ.

И такъ для того, чтобы связать между собою неизмѣняемо n точекъ, требуется $(3n - 6)$ связей, выражающихся равенствами слѣдующаго вида:

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} - l_{ij} = 0,$$

а потому число степеней свободы такой системы равно

$$\varkappa = 3n - (3n - 6) = 6.$$

Такъ какъ $\varkappa = 6$, то таково же число дифференціальныхъ уравненій движенія такой системы, незаключающихъ реакцій тѣхъ воображаемыхъ стержней, которые дѣлаютъ систему неизмѣняемою.

Эти шесть уравненій легко могутъ быть написаны прямо, если примемъ во вниманіе, что реакціи воображаемыхъ стержней попарно равны, прямопротивоположны и направлены вдоль по стержнямъ; такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто спеціальная форма закона движенія центра инерціи, упомянутая на страницѣ 428-й, и такъ какъ главный моментъ реакцій связей равенъ нулю (стр. 457), то имѣемъ слѣдующія уравненія:

$$Mx_c'' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i,\ My_c'' = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i,\ Mz_c'' = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \ldots \textbf{(616, A)}$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = Л_x,\ \frac{d\lambda_y}{dt} = Л_y,\ \frac{d\lambda_z}{dt} = Л_z \ldots\ldots\ldots \textbf{(641)}$$

Эти же самыя уравненія могутъ быть получены еще другимъ путемъ, а именно изъ равенства (567) стр. 383, выражающаго начало д'Аламбера; для этого надо выразить возможныя варьяціи координатъ точекъ неизмѣняемой системы помощію нѣкоторыхъ шести независимыхъ варьяцій, а затѣмъ приравнять нулю коэфиціенты этихъ варьяцій въ равенствѣ (567).

За эти независимыя варьяціи мы примемъ: варьяціи координатъ какой либо точки $Ю$, неизмѣнно связанной съ неизмѣняемою систе-

мою, и три другія безконечно-малыя величины, выражающіяся слѣдующими линейными функціями варьяцій угловъ $ф$, $ж$, $э$:

$$\left.\begin{aligned} \theta_x &= \delta э \cos ж \sin ф - \delta ф \sin ж \\ \theta_y &= \delta э \sin ж \sin ф + \delta ф \cos ж \\ \theta_z &= \delta э \cos ф + \delta ж \end{aligned}\right\}; \qquad (747)$$

сравнивъ эти выраженія съ выраженіями (107), (108), (109) для P, Q и R на страницахъ 94—95 кинематической части, легко видѣть, что, при одновременномъ увеличеніи угловъ $ф$, $ж$ и $э$ на $\delta ф$, $\delta ж$, $\delta э$, вся система поворачивается на безконечно-малый уголъ:

$$\theta = \sqrt{(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 + (\theta_z)^2} =$$

$$= \sqrt{(\delta ф)^2 + (\delta ж)^2 + (\delta э)^2 + 2\delta э \delta ж \cos ф} \qquad (748)$$

вокругъ оси, составляющей съ осями $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, $Z^{овъ}$, углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{\theta_x}{\theta}, \quad \frac{\theta_y}{\theta}, \quad \frac{\theta_z}{\theta}.$$

Безконечно-малый уголъ θ можетъ быть названъ *угловою варьяціею* положенія тѣла, а вышесказанная ось — мгновенною осью этой варьяціи; величины θ_x, θ_y, θ_z можно условиться называть проэкціями угловой варьяціи на оси координатъ $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, $Z^{овъ}$. Если направленіе мгновенной оси угловой варьяціи означить черезъ θ, то можно написать слѣдующія равенства:

$$\theta_x = \theta \cos(\theta, X), \quad \theta_y = \theta \cos(\theta, У), \quad \theta_z = \theta \cos(\theta, Z) \qquad (749)$$

По аналогіи, существующей между выраженіями (747), (748), (749) и соотвѣтственными выраженіями (107), (108), (109), (110), (101) кинематической части, мы вправѣ заключить, что возможныя варьяціи координатъ точекъ неизмѣняемой системы выразятся слѣдующими линейными функціями шести независимыхъ варьяцій $\delta x_ю$, $\delta y_ю$, $\delta z_ю$, θ_x, θ_y, θ_z:

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i &= \delta x_{ю} + (z_i - z_{ю})\,\theta_y - (y_i - y_{ю})\,\theta_z,\\ \delta y_i &= \delta y_{ю} + (x_i - x_{ю})\,\theta_z - (z_i - z_{ю})\,\theta_x,\\ \delta z_i &= \delta z_{ю} + (y_i - y_{ю})\,\theta_x - (x_i - x_{ю})\,\theta_y.\end{aligned}\right\}\ldots \quad (750)$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство (567) и приравнявъ нулю коэфиціенты независимыхъ варьяцій, получимъ уравненія (616, A) и три слѣдующія уравненія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((y_i - y_{ю})\,z_i'' - (z_i - z_{ю})\,y_i''\Big) = (Л_{ю})_x, \ldots \quad (751, a)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big(z_i - z_{ю})\,x_i'' - (x_i - x_{ю})\,z_i''\Big) = (Л_{ю})_y, \ldots \quad (751, b)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\Big((x_i - x_{ю})\,y_i'' - (y_i - y_{ю})\,x_i''\Big) = (Л_{ю})_z, \ldots \quad (751, c)$$

которыя, на основаніи уравненій (616, A), могутъ быть приведены къ виду (641).

Во многихъ вопросахъ уравненіямъ (641) должно предпочесть другія три уравненія, заключающія проэкціи главнаго момента задаваемыхъ силъ на оси **Ξ**, **Υ**, **Z**, неизмѣнно связанныя съ системою; эти уравненія мы теперь выведемъ.

Равенство (567), по подстановленіи въ него, вмѣсто δx_i, δy_i, δz_i,— выраженій (750), можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[(X_i - m_i x_i'')\,\delta x_{ю} + (Y_i - m_i y_i'')\,\delta y_{ю} + (Z_i - m_i z_i'')\,\delta z_{ю}\Big] +$$

$$+\,\theta\sum_{i=1}^{i=n}\begin{vmatrix}\cos(\theta, X), & \cos(\theta, Y), & \cos(\theta, Z)\\ x_i - x_{ю}, & y_i - y_{ю}, & z_i - z_{ю}\\ X_i - m_i x_i'', & Y_i - m_i y_i'', & Z_i - m_i z_i''\end{vmatrix} = 0 \ldots (752$$

Опредѣлитель, заключающійся подъ знакомъ второй суммы, выражаетъ величину объема параллелопипеда, имѣющаго ребрами: 1) дли-

ны, равныя единицѣ и параллельныя мгновенной оси угловой варьяціи, 2) длины, равныя и параллельныя радіусу вектору, проведенному изъ точки *Ю* въ точку m_i и 3) длины, изображающія величину и направленіе *потерянной силы* точки m_i.

Величина этого объема можетъ быть выражена другимъ опредѣлителемъ, составленнымъ изъ проэкцій реберъ на взаимно перпендикулярныя оси *Ю*Ξ, *Ю*Υ, *Ю*$\mathbf{Z}$, неизмѣнно связанныя съ системою; этотъ опредѣлитель можетъ быть представленъ такъ:

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta,\Xi), & \cos(\theta,\Upsilon), & \cos(\theta,\mathbf{Z}) \\ \xi_i, & \eta_i, & \zeta_i \\ \varPi_i\cos(\varPi_i\Xi), & \varPi_i\cos(\varPi_i\Upsilon), & \varPi_i\cos(\varPi_i\mathbf{Z}) \end{vmatrix},$$

$$\varPi_i\cos(\varPi_i\Xi)=\Xi_i-m_i\dot{w}_i\cos(\dot{w}_i,\Xi),$$
$$\varPi_i\cos(\varPi_i\Upsilon)=\Upsilon_i-m_i\dot{w}_i\cos(\dot{w}_i,\Upsilon),$$
$$\varPi_i\cos(\varPi_i\mathbf{Z})=\mathbf{Z}_i-m_i\dot{w}_i\cos(\dot{w}_i,\mathbf{Z}),$$

гдѣ Ξ_i, Υ_i, $\mathbf{Z}_i$ означаютъ величины проэкцій задаваемой силы F_i, приложенной къ точкѣ m_i, на оси $\Xi^{\text{овъ}}$, $\Upsilon^{\text{овъ}}$, $\mathbf{Z}^{\text{овъ}}$.

Вслѣдствіе такой замѣны одного опредѣлителя другимъ, вторая сумма равенства (752) обратится въ линейную функцію величинъ:

$$\theta_\xi=\theta\cos(\theta,\Xi),\ \ \theta_\eta=\theta\cos(\theta,\Upsilon),\ \ \theta_\zeta=\theta\cos(\theta,\mathbf{Z})\ldots\ \textbf{(753)}$$

которыя, подобно величинамъ (749), суть независимыя варьяціи, если только система свободна, а потому преобразованное равенство (752) распадается на шесть дифференціальныхъ уравненій: три уравненія (616, A) и три слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} m_i\dot{w}_i\Big(\eta_i\cos(\dot{w}_i\mathbf{Z})-\zeta_i\cos(\dot{w}_i\Upsilon)\Big)=(\varLambda_{ю})_\xi \\ &\sum_{i=1}^{i=n} m_i\dot{w}_i\Big(\zeta_i\cos(\dot{w}_i\Xi)-\xi_i\cos(\dot{w}_i\mathbf{Z})\Big)=(\varLambda_{ю})_\eta \\ &\sum_{i=1}^{i=n} m_i\dot{w}_i\Big(\xi_i\cos(\dot{w}_i\Upsilon)-\eta_i\cos(\dot{w}_i\Xi)\Big)=(\varLambda_{ю})_\zeta \end{aligned}\right\}\ldots\ \textbf{(754)}$$

гдѣ во вторыхъ частяхъ находятся выраженія проэкцій на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ главнаго момента задаваемыхъ силъ вокругъ точки *Ю*:

$$(Л_ю)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i \mathbf{Z}_i - \zeta_i \Upsilon_i) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(755, a)}$$

$$(Л_ю)_\eta = \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i \Xi_i - \xi_i \mathbf{Z}_i) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(755, b)}$$

$$(Л_ю)_\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i \Upsilon_i - \eta_i \Xi_i) \ldots\ldots\ldots \mathbf{(755, c)}$$

Первыя части уравненій (754) могутъ быть представлены въ другомъ видѣ; произведемъ преобразованіе надъ первою частью перваго изъ этихъ уравненій.

Выразимъ проэкціи ускоренія $\dot{w}_i$ на подвижныя оси $\mathbf{Z}$ и Υ по формулѣ (293) кинематической части (стр. 251); составляя эти выраженія, намъ придется представить себѣ, что черезъ неподвижную точку (напримѣръ, черезъ начало координатъ) проведены направленія, параллельныя осямъ $\mathbf{Z}$ и Υ, и по нимъ, отъ *O* отложены длины, равныя единицѣ; скорости точекъ, находящихся на концѣ этихъ длинъ, войдутъ въ составляемыя нами выраженія. Проэкціи на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ скорости той точки, которая находится на концѣ длины, параллельной оси $\mathbf{Z}$, будутъ: q, $-p$, 0; а проэкціи на тѣ же оси скорости той точки, которая находится на концѣ длины, параллельной оси Υ, будутъ: $-r$, 0, p.

Мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \mathbf{Z}) = \frac{d(w_i \cos(w_i, \mathbf{Z}))}{dt} - q w_i \cos(w_i \Xi) + p w_i \cos(w_i \Upsilon)$$

$$\dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \Upsilon) = \frac{d(w_i \cos(w_i, \Upsilon))}{dt} + r w_i \cos(w_i \Xi) - p w_i \cos(w_i \mathbf{Z});$$

эти выраженія подставимъ въ первую часть перваго изъ уравненій **(754)**.

Такъ какъ система — неизмѣняемая, то ξ_i, η_i, ζ_i постоянны и могутъ быть введены подъ знаки производныхъ по времени; кромѣ того, припомнимъ составленныя на страницѣ 473-й выраженія (660) величинъ $(\textit{л}_ю)_\xi$, $(\textit{л}_ю)_\eta$, $(\textit{л}_ю)_\zeta$; тогда окажется, что первая часть сказаннаго уравненія можетъ быть выражена такъ:

$$\frac{d(\textit{л}_ю)_\xi}{dt} + q(\textit{л}_ю)_\zeta - r(\textit{л}_ю)_\eta +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \Big[(p\eta_i - q\xi_i) w_i \cos(w_i \mathrm{Y}) - (r\xi_i - p\zeta_i) w_i \cos(w_i \mathbf{Z}) \Big];$$

послѣдняя же сумма, если проэкціи w_i на оси Y и **Z** будутъ замѣнены выраженіями (143) стр. 125 кинематической части, получитъ такой видъ:

$$M[(p\eta_c - q\xi_c) w_ю \cos(w_ю \mathrm{Y}) - (r\xi_c - p\zeta_c) w_ю \cos(w_ю \mathbf{Z})] \,. \quad \mathbf{(756)}$$

Чтобы придать полученному выраженію болѣе сжатый видъ, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$w_ю \cos(w_ю \Xi) = \alpha, \;\; w_ю \cos(w_ю \mathrm{Y}) = \beta, \;\; w_ю \cos(w_ю \mathbf{Z}) = \gamma, \,. \quad \mathbf{(757)}$$

тогда выраженіе (733) живой силы неизмѣняемой системы, приведенное на страницѣ (512), представится въ такомъ видѣ:

$$T = M \Big[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} + \alpha(q\zeta_c - r\eta_c) + \beta(r\xi_c - p\zeta_c) + \gamma(p\eta_c - q\xi_c \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_ю p^2 + B_ю q^2 + C_ю r^2 - 2D_ю qr - 2E_ю rp - 2F_ю pq), \,. \quad \mathbf{(733\ bis)}$$

выраженіе же (756) можетъ быть представлено подъ видомъ слѣдующей разности:

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma}\beta - \frac{\partial T}{\partial \beta}\gamma;$$

кромѣ того, если припомнить выраженія (661), приведенныя на страницахъ 473 — 474, и сравнить ихъ съ выраженіемъ (733, bis) живой силы, то будетъ видно, что:

$$(\textit{л}_ю)_\xi = \frac{\partial T}{\partial p}, \;\; (\textit{л}_ю)_\eta = \frac{\partial T}{\partial q}, \;\; (\textit{л}_ю)_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r} \; \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(757)}$$

По этимъ причинамъ, дифференціальныя уравненія (754) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)}{dt} = r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \gamma\frac{\partial T}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial T}{\partial \gamma} + (Л_ю)_\xi \ldots (758, a)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)}{dt} = p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha\frac{\partial T}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial T}{\partial \alpha} + (Л_ю)_\eta \ldots (758, b)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{dt} = q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + \beta\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial T}{\partial \beta} + (Л_ю)_\zeta \ldots (758, c)$$

Величины (753) могутъ быть названы проэкціями угловой варьяціи на оси Ξ, Υ, Z; онѣ могутъ быть выражены слѣдующими линейными функціями отъ $\delta ф$, $\delta ж$ и $\delta э$:

$$\left.\begin{aligned} \theta_\xi &= -\delta ж \sin ф \cos э + \delta ф \sin э, \\ \theta_\eta &= \quad \delta ж \sin ф \sin э + \delta ф \cos э, \\ \theta_\zeta &= \quad \delta ж \cos ф + \delta э. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (759)$$

Если за точку $Ю$ взять центръ инерціи неизмѣняемой системы, то ξ_c, η_c, ζ_c будутъ равны нулю; тогда въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (758) сократятся члены, заключающіе частныя производныя отъ T по α, β и γ.

Если твердое тѣло (или неизмѣняемая система) не свободно, но имѣетъ одну неподвижную точку, которую примемъ за точку $Ю$, то α, β и γ будутъ равны нулю, а потому тогда во вторыхъ частяхъ уравненій (758) тоже не будетъ членовъ, заключающихъ производныя отъ T по α, β и γ.

Если твердое тѣло свободно и за точку $Ю$ взять центръ инерціи C, а за оси Ξ, Υ, Z — главныя центральныя оси инерціи тѣла, то

живая сила тѣла и проэкціи на оси Ξ, Υ, Z главнаго момента количествъ движенія вокругъ центра инерціи выразятся такъ:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2) \ldots\ldots \quad (760)$$

$$(л_c)_\xi = \frac{\partial T}{\partial p} = \mathfrak{A}_c p, \quad (л_c)_\eta = \frac{\partial T}{\partial q} = \mathfrak{B}_c q, \quad (л_c)_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r} = \mathfrak{C}_c r \ldots (761)$$

Тогда дифференціальныя уравненія (758) получатъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A}_c \frac{dp}{dt} = qr(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c) + (Л_ю)_\xi \ldots\ldots\ldots (762, a)$$

$$\mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} = rp(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c) + (Л_ю)_\eta \ldots\ldots\ldots (762, b)$$

$$\mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} = pq(\mathfrak{A}_c - \mathfrak{C}_c) + (Л_ю)_\zeta \ldots\ldots\ldots (762, c)$$

Эти дифференціальныя уравненія называются Эйлеровыми дифференціальными уравненіями вращательнаго движенія свободнаго тѣла вокругъ центра инерціи.

Дифференціальныя уравненія (616, A) и (758) могутъ быть выведены еще слѣдующимъ образомъ.

Примѣнивъ къ свободному твердому тѣлу равенство (567, A), приведенное въ § 78-мъ на стр. 396, замѣнимъ варьяціи δx_i, δy_i, δz_i выраженіями (750), тогда R и первая сумма этого равенства выразятся такъ:

$$R = M(x_c' \delta x_ю + y_c' \delta y_ю + z_c' \delta z_ю) +$$

$$+ (л_ю)_x \theta_x + (л_ю)_y \theta_y + (л_ю)_z \theta_z = M w_c \varepsilon_ю \cos(w_c, \varepsilon_ю) + л_ю \theta \cos(л_ю, \theta)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = B \varepsilon_ю \cos(B, \varepsilon_ю) + Л_ю \theta \cos(Л_ю, \theta); \ldots\ldots (763)$$

поэтому сумму R можно представить еще такъ:

$$R = M(\alpha_c \varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю \Xi) + \beta_c \varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю \Upsilon) + \gamma_c \varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю Z)) +$$

$$+ (л_ю)_\xi \theta_\xi + (л_ю)_\eta \theta_\eta + (л_ю)_\zeta \theta_\zeta,$$

гдѣ α_c, β_c, γ_c суть проэкціи скорости центра инерціи системы на оси Ξ, Υ, Z; эти величины могутъ быть выражены такъ:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_c = \alpha + q\zeta_c - r\eta_c = \frac{\partial T}{\partial\alpha}\frac{1}{M}\\ \beta_c = \beta + r\xi_c - p\zeta_c = \frac{\partial T}{\partial\beta}\frac{1}{M}\\ \gamma_c = \gamma + p\eta_c - q\xi_c = \frac{\partial T}{\partial\gamma}\frac{1}{M}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots \mathbf{(764)}$$

Въ равенствѣ (567, A) заключается варьяція: δT. Такъ какъ T есть функція (733, bis) отъ α, β, γ, p, q, r и притомъ только отъ этихъ величинъ, то поэтому:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial T}{\partial\beta}\delta\beta + \frac{\partial T}{\partial\gamma}\delta\gamma + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r,$$

или, на основаніи равенствъ (757) и (764):

$$\delta T = M(\alpha_c\delta\alpha + \beta_c\delta\beta + \gamma_c\delta\gamma) + (л_ю)_\xi\delta p + (л_ю)_\eta\delta q + (л_ю)_\zeta\delta r.$$

Поэтому разность между варьяціею δT и полною производною отъ R по T выразится такъ:

$$\delta T - \frac{dR}{dt} = M\left[\alpha_c\left(\delta\alpha - \frac{d\varkappa_1}{dt}\right) + \beta_c\left(\delta\beta - \frac{d\varkappa_2}{dt}\right) + \gamma_c\left(\delta\gamma - \frac{d\varkappa_3}{dt}\right)\right] +$$
$$+ (л_ю)_\xi\left(\delta p - \frac{d\theta_\xi}{dt}\right) + (л_ю)_\eta\left(\delta q - \frac{d\theta_\eta}{dt}\right) + (л_ю)_\zeta\left(\delta r - \frac{d\theta_\zeta}{dt}\right) +$$
$$- M\frac{d\alpha_c}{dt}\varkappa_1 - M\frac{d\beta_c}{dt}\varkappa_2 - M\frac{d\gamma_c}{dt}\varkappa_3 -$$
$$- \frac{d(л_ю)_\xi}{dt}\theta_\xi - \frac{d(л_ю)_\eta}{dt}\theta_\eta - \frac{d(л_ю)_\zeta}{dt}\theta_\zeta,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(765)}$$

здѣсь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ означаютъ проэкціи $\varepsilon_ю$ на оси Ξ, Υ, Z.

Заключающіяся здѣсь разности между варьяціями $\delta\alpha, \ldots \delta p, \ldots$ и производными по времени отъ $\varkappa_1, \ldots \theta_\xi, \ldots$ могутъ быть выражены по формулѣ (582) стр. 395-й § 77-го; составимъ выраженія этихъ разностей.

Предварительно представимъ себѣ три взаимно-перпендикулярныя

направленія, выходящія изъ начала координатъ и параллельныя осямъ Ξ, Υ, **Z**, неизмѣнно связаннымъ съ движущимся твердымъ тѣломъ; на этихъ подвижныхъ направленіяхъ представимъ себѣ три точки $M(\Xi)$, $M(\Upsilon)$, $M(\mathbf{Z})$, по одной на каждомъ, отстоящія отъ O на постоянномъ разстояніи, равномъ единицѣ. Одновременно съ дѣйствительнымъ движеніемъ тѣла и эти точки совершаютъ движеніе и проэкціи скоростей ихъ на оси Ξ, Υ, **Z** выражаются слѣдующими величинами:

Проэкціи скоростей точекъ

	$M(\Xi)$	$M(\Upsilon)$	$M(\mathbf{Z})$
на ось Ξ	0	$-r$	q
на ось Υ	r	0	$-p$
на ось **Z**	$-q$	p	0.

Кромѣ того, одновременно съ варьяціею движенія тѣла, положенія этихъ точекъ получаютъ варьяціи, проэкціи которыхъ на тѣ же оси выражаются слѣдующими величинами:

Проэкціи варьяцій положеній точекъ

	$M(\Xi)$	$M(\Upsilon)$	$M(\mathbf{Z})$
на ось Ξ	0	$-\theta_\zeta$	θ_η
на ось Υ	θ_ζ	0	$-\theta_\xi$
на ось **Z**	$-\theta_\eta$	θ_ξ	0.

Примѣнимъ теперь формулу (582) къ точкѣ $Ю$ и къ направленію оси Ξ, то есть въ формулу эту подставимъ: $w_ю$, $\varepsilon_ю$ и Ξ вмѣсто v, ε и U; тогда точкою $M(U)$ (стр. 394) должна будетъ служить точка $M(\Xi)$ и формула (582) приметъ слѣдующій видъ:

$$\delta\Big(w_ю \cos(w_ю\Xi)\Big) = \frac{d(\varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю\Xi))}{dt} - r\varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю\Upsilon) + q\varepsilon_ю \cos(\varepsilon_ю\mathbf{Z}) +$$

$$+ \theta_\zeta w_ю \cos(w_ю\Upsilon) - \theta_\eta w_ю \cos(w_ю\mathbf{Z}),$$

или, при сокращенномъ обозначеніи:

$$\delta\alpha - \frac{d\varkappa_1}{dt} = q\varkappa_3 - r\varkappa_2 - \theta_\eta\gamma + \theta_\zeta\beta; \quad \ldots . \quad \mathbf{(766, a)}$$

подобнымъ же образомъ составимъ еще двѣ слѣдующія формулы:

$$\delta\beta - \frac{d\varkappa_2}{dt} = r\varkappa_1 - p\varkappa_3 - \theta_\zeta\alpha + \theta_\xi\gamma, \ldots\ldots \quad \mathbf{(766, b)}$$

$$\delta\gamma - \frac{d\varkappa_3}{dt} = p\varkappa_2 - q\varkappa_1 - \theta_\xi\beta + \theta_\eta\alpha \ldots\ldots \quad \mathbf{(766, c)}$$

Примѣнимъ формулу (582) къ точкѣ $M(\Upsilon)$ и къ направленію Z, то есть, въ формулу эту подставимъ: p, θ_ξ и Z вмѣсто $v\cos(vU)$, $\varepsilon\cos(\varepsilon U)$ и U; въ этомъ случаѣ точку $M(\mathsf{Z})$ должно взять въ качествѣ точки $M(U)$; получимъ:

$$\delta p = \frac{d\theta_\xi}{dt} + q\theta_\zeta - r\theta_\eta; \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(767, a)}$$

подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\delta q = \frac{d\theta_\eta}{dt} + r\theta_\xi - p\theta_\zeta, \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(767, b)}$$

$$\delta r = \frac{d\theta_\zeta}{dt} + p\theta_\eta - q\theta_\xi \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(767, c)}$$

Подставивъ найденныя теперь выраженія разностей въ выраженіе (765) и отобравъ въ немъ члены, заключающіе $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, найдемъ, что эти члены суть:

$$-M\Big[\Big(\frac{d\alpha_c}{dt} - r\beta_c + q\gamma_c\Big)\varkappa_1 + \Big(\frac{d\beta_c}{dt} - p\gamma_c + r\alpha_c\Big)\varkappa_2 + $$
$$+ \Big(\frac{d\gamma_c}{dt} - q\alpha_c + p\beta_c\Big)\varkappa_3\Big],$$

но если примѣнить формулу (293) кинематической части (стр. 251) къ центру инерціи C и къ направленіямъ осей Ξ, Υ, Z, то окажется, что тричлены, помноженные въ послѣднемъ выраженіи на $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, равняются проэкціямъ ускоренія центра инерціи C на оси Ξ, Υ, Z, слѣдовательно, послѣднее выраженіе равняется:

$$-M\dot{w}_c\varepsilon_{ю}\cos(\dot{w}_c, \varepsilon_{ю}).$$

Присоединивъ къ преобразованному такимъ образомъ выраженію

(765) сумму (763), найдемъ, что равенство (567, A) получитъ слѣдующій видъ:

$$(B_x - Mx_c'')\delta x_ю + (B_y - My_c'')\delta y_ю + (B_c - Mz_c'')\delta z_ю +$$

$$((Л_ю)_\xi + r(л_ю)_\eta - q(л_ю)_\zeta + M\gamma\beta_c - M\beta\gamma_c)\theta_\xi +$$

$$((Л_ю)_\eta + p(л_ю)_\zeta - r(л_ю)_\xi + M\alpha\gamma_c - M\gamma\alpha_c)\theta_\eta +$$

$$((Л_ю)_\zeta + q(л_ю)_\xi - p(л_ю)_\eta + M\beta\alpha_c - M\alpha\beta_c)\theta_\zeta = 0, \ldots \textbf{(567, E)}$$

а отсюда, на основаніи леммы § 76-го (стр. 386), выведемъ дифференціальныя уравненія (616, A) (стр. 537) и (758) (стр. 543).

Полученныя дифференціальныя уравненія (758) суть дифференціальныя уравненія перваго порядка относительно величинъ p, q и r; къ нимъ слѣдуетъ еще присоединить уравненія (119) стран. 105 кинематической части:

$$p = -\frac{dж}{dt}\sin ф \cos э + \frac{dф}{dt}\sin э \ldots\ldots \textbf{(768, a)}$$

$$q = \frac{dж}{dt}\sin ф \sin э + \frac{dф}{dt}\cos э \ldots\ldots \textbf{(768, b)}$$

$$r = \frac{dж}{dt}\cos ф + \frac{dэ}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(768, c)}$$

Можно, кромѣ того, прямо составить Лагранжевы дифференціальныя уравненія втораго порядка относительно координатныхъ параметровъ *ф*, *ж*, *э*, замѣняющія шесть дифференціальныхъ уравненій перваго порядка: (758) и (768); эти уравненія будутъ слѣдующія:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ф'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial ф} + (Л_ю)_y \cos ж - (Л_ю)_x \sin ж \ldots\ldots \textbf{(769, a)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ж'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial ж} + (Л_ю)_z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(769, b)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial э'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial э} +$$

$$+ ((Л_ю)_x \cos ж + (Л_ю)_y \sin ж) \sin ф + (Л_ю)_z \cos ф; \ldots \textbf{(769, c)}$$

при составленіи этихъ уравненій предполагается, что p, q, r, заключающіяся въ выраженіи (733, $\mathfrak{b}$is) живой силы T, замѣнены вторыми частями равенствъ (768, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$).

§ 120. Такъ называемое вращеніе твердаго тѣла по инерціи.

Прежде всего остановимся на тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи свободнаго твердаго тѣла равенъ нулю.

Вращательное движеніе, совершаемое въ этихъ случаяхъ твердымъ тѣломъ вокругъ его центра инерціи C, называется *вращеніемъ по инерціи*; въ настоящемъ параграфѣ займемся изученіемъ законовъ этого вращенія.

Прежде всего слѣдуетъ получить интегралы дифференціальныхъ уравненій; число искомыхъ интеграловъ равно 12-ти, такъ какъ число независимыхъ координатныхъ параметровъ, опредѣляющихъ положеніе свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ, равно шести.

Шесть изъ числа всѣхъ интеграловъ суть интегралы дифференціальныхъ уравненій (616, A) движенія центра инерціи тѣла, остальные шесть суть интегралы дифференціальныхъ уравненій вращательнаго движенія.

Въ разсматриваемыхъ нами здѣсь случаяхъ дифференціальныя уравненія вращенія тѣла вокругъ центра инерціи могутъ быть представлены, или въ видѣ уравненій:

$$\frac{d(\mathfrak{s}_c)_x}{dt} = 0, \quad \frac{d(\mathfrak{s}_c)_y}{dt} = 0, \quad \frac{d(\mathfrak{s}_c)_z}{dt} = 0, \ldots\ldots \quad \textbf{(770)}$$

или въ видѣ Эйлеровыхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_c \frac{dp}{dt} &= (\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c)qr \\ \mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} &= (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)rp \\ \mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} &= (\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c)pq \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(762, }\mathfrak{b}\text{is)}$$

и уравненій (768).

Интегрируя дифференціальныя уравненія (770), получаемъ три интеграла:

$$(л_c)_x = C_1, \quad (л_c)_y = C_2, \quad (л_c)_z = C_3, \ldots\ldots\ldots \textbf{(653)}$$

выражающіе, что законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи.

На основаніи формулъ (659) стр. 472, эти интегралы могутъ быть представлены такъ:

$$(л_c)_\xi \lambda_x + (л_c)_\eta \mu_x + (л_c)_\zeta \nu_x = C_1, \ldots$$

или, на основаніи выраженій (761) стр. 544, такъ:

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_x + \mathfrak{B}_c q\mu_x + \mathfrak{C}_c r\nu_x = C_1, \ldots\ldots\ldots \textbf{(771,a)}$$

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_y + \mathfrak{B}_c q\mu_y + \mathfrak{C}_c r\nu_y = C_2, \ldots\ldots\ldots \textbf{(771,b)}$$

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_z + \mathfrak{B}_c q\mu_z + \mathfrak{C}_c r\nu_z = C_3 \ldots\ldots\ldots \textbf{(771,c)}$$

Слѣдовательно, *при вращеніи твердаго тѣла по инерціи, главный моментъ количествъ движенія вокругъ центра инерціи сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе въ пространствѣ.*

Равенство:

$$\mathfrak{A}_c^2 p^2 + \mathfrak{B}_c^2 q^2 + \mathfrak{C}_c^2 r^2 = G^2, \ldots\ldots\ldots \textbf{(772)}$$

(гдѣ $G^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$) выражающее, что главный моментъ $(л)_c$ сохраняетъ постоянную величину, есть одинъ изъ интеграловъ Эйлеровыхъ уравненій (762, bis); въ самомъ дѣлѣ, помноживъ первое изъ нихъ на $2\mathfrak{A}_c p$, второе — на $2\mathfrak{B}_c q$, третье — на $2\mathfrak{C}_c r$ и сложивъ эти уравненія, получимъ: во второй части — нуль, а въ первой — производную по t отъ первой части интеграла (772).

Такъ какъ элементарная работа всѣхъ задаваемыхъ силъ въ настоящемъ случаѣ выразится трехчленомъ:

$$B_x dx_c + B_y dy_c + B_z dz_c,$$

и такъ какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (616, A), выражающихъ законъ движенія центра инерціи, слѣдуетъ, что этотъ трехчленъ

равняется дифференціалу живой силы центра инерціи $\left(\frac{M}{2} v_c^2\right)$, то остальная часть живой силы, а именно живая сила вращательнаго движенія, должна сохранять постоянную величину:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2) = h; \dots\dots\dots\dots (773)$$

это равенство, представляющее четвертый интегралъ дифференціальныхъ уравненій вращательнаго движенія тѣла, можетъ быть получено еще слѣдующимъ образомъ: помноживъ уравненія (762, bis) на p, q, r и сложивъ, получимъ во второй части нуль, а въ первой — производную по t отъ первой части равенства (773).

Имѣя эти четыре интеграла, можно уже составить себѣ нѣкоторое понятіе о вращеніи тѣла по инерціи, какъ показали Поансо (Poinsot) и Макъ-Куллахъ (Mac Cullagh).

Поансо замѣтилъ, что при вращеніи тѣла по инерціи центральный эллипсоидъ катится безъ скольженія по двумъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости; это можетъ быть доказано слѣдующимъ образомъ.

Проведемъ черезъ центръ инерціи тѣла мгновенную ось и найдемъ точку пересѣченія ея съ поверхностью центральнаго эллипсоида инерціи:

$$\mathfrak{A}_c \xi^2 + \mathfrak{B}_c \eta^2 + \mathfrak{C}_c \zeta^2 = м . \partial^4 \dots\dots\dots\dots (774)$$

Координаты и радіусъ векторъ ρ этой точки должны удовлетворять уравненію (774) и равенствамъ:

$$\frac{\xi_0}{\rho_0} = \frac{p}{\Omega}, \quad \frac{\eta_0}{\rho_0} = \frac{q}{\Omega}, \quad \frac{\zeta_0}{\rho_0} = \frac{r}{\Omega}; \dots\dots\dots\dots (775)$$

подставивъ выраженія для ξ, η, ζ, получаемыя изъ (775), въ уравненіе (774), получимъ:

$$\rho_0^2 = м\partial^4 . \frac{\Omega^2}{\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2} = м\partial^4 \frac{\Omega^2}{2h} \dots\dots\dots (776)$$

Проведемъ черезъ эту точку (ξ_0, η_0, ζ_0) касательную плоскость

къ эллипсоиду инерціи; разстояніе этой плоскости отъ центра инерціи C будетъ равно:

$$D = \frac{м\partial^4}{\sqrt{\mathfrak{A}_c{}^2\xi_0{}^2 + \mathfrak{B}_c{}^2\eta_0{}^2 + \mathfrak{C}_c{}^2\zeta_0{}^2}},$$

$$D = \frac{м\partial^4 . \Omega}{\rho_0\sqrt{\mathfrak{A}_c{}^2p^2 + \mathfrak{B}_c{}^2q^2 + \mathfrak{C}_c{}^2r^2}} = \sqrt{м\partial^4}\frac{\sqrt{2h}}{G} \text{ *}), \ldots . (777)$$

т. е., *плоскость, касательная къ центральному эллипсоиду инерціи въ точкѣ пересѣченія его мгновенною осью, находится въ постоянномъ разстояніи отъ центра инерціи.*

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями Ξ, Υ, Z нормалью N къ эллипсоиду инерціи въ точкѣ (ξ_0, η_0, ζ_0), выразятся такъ:

$$\cos(N,\Xi) = \frac{\mathfrak{A}_c\xi_0}{\sqrt{\mathfrak{A}_c{}^2\xi_0{}^2 + \mathfrak{B}_c{}^2\eta_0{}^2 + \mathfrak{C}_c{}^2\zeta_0{}^2}} = \frac{\mathfrak{A}_c p}{G} = \cos(л_c, \Xi)$$

$$\cos(N, \Upsilon) = \frac{\mathfrak{B}_c q}{G} = \cos(л_c, \Upsilon), \ \cos(N, \mathsf{Z}) = \frac{\mathfrak{C}_c r}{G} = \cos(л_c, \mathsf{Z}),$$

т. е., *вышесказанная касательная плоскость перпендикулярна къ направленію главнаго момента количествъ движенія тѣла вокругъ центра инерціи, а слѣдовательно она параллельна неизмѣняемой плоскости.*

И такъ, при вращеніи тѣла по инерціи, центральный эллипсоидъ

---

*) Можно показать, что D не можетъ быть болѣе длиннѣйшей главной оси эллипсоида инерціи и не можетъ быть менѣе кратчайшей его оси; для этого составимъ изъ равенствъ (772) и (773) два слѣдующія:

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\mathfrak{B}q^2 + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{C}r^2 = G^2 - 2h\mathfrak{A}$$

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{A}p^2 + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\mathfrak{B}q^2 = 2h\mathfrak{C} - G^2;$$

если $\mathfrak{A}$ есть наименьшій, а $\mathfrak{C}$ — наибольшій главный моментъ инерціи, то первыя части этихъ двухъ равенствъ не могутъ быть менѣе нуля, а потому

$$\frac{2h}{G} \text{ не болѣе } \frac{1}{\mathfrak{A}} \text{ и не менѣе } \frac{1}{\mathfrak{C}}.$$

его постоянно прикасается къ двумъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости и отстоящимъ отъ нея на разстояніяхъ равныхъ D (777).

Движеніе тѣла и эллипсоида совершается притомъ такъ, что линія, проходящая черезъ центръ и черезъ обѣ точки прикосновенія, есть мгновенная ось вращенія; слѣдовательно, эллипсоидъ инерціи катится безъ скольженія по двумъ вышесказаннымъ плоскостямъ.

Точки прикосновенія непрерывно измѣняютъ свои мѣста и на эллипсоидѣ и на плоскостяхъ; та линія, которую точка прикосновенія чертитъ на эллипсоидѣ, называется *полодіею*, а та, которую она чертитъ на плоскости, — *эрполодіею*.

Угловая скорость Ω не остается постоянною, но проэкція ея на направленіе главнаго момента ($л_c$) сохраняетъ постоянную величину; въ самомъ дѣлѣ, интегралъ (773) можетъ быть представленъ такъ:

$$\mathfrak{A}_c p . p + \mathfrak{B}_c q . q + \mathfrak{C}_c r . r = 2h,$$

$$л_c \Omega \cos (л_c, \Omega) = 2h,$$

откуда слѣдуетъ:

$$\Omega \cos (л_c, \Omega) = \frac{2h}{G} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(778)}$$

Макъ-Куллахъ замѣтилъ, что гираціонный эллипсоидъ (см. стр. 491) при вращеніи тѣла по инерціи движется такъ, что поверхность его проходитъ черезъ двѣ точки, находящіяся на направленіи главнаго момента количествъ движенія тѣла въ постоянныхъ разстояніяхъ отъ центра инерціи.

Чтобы показать это, опредѣлимъ точки пересѣченія поверхности гираціоннаго эллипсоида

$$\frac{\xi^2}{\mathfrak{A}_c} + \frac{\eta^2}{\mathfrak{B}_c} + \frac{\zeta^2}{\mathfrak{C}_c} = \frac{1}{M} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(699,bis)}$$

направленіемъ главнаго момента $л_c$; координаты ξ_1, η_1, ζ_1 и радіусъ векторъ каждой такой точки должны удовлетворять равенствамъ:

$$\frac{\xi_1}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{A}_c p}{G}, \quad \frac{\eta_1}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{B}_c q}{G}, \quad \frac{\zeta_1}{\rho_1} = \frac{\mathfrak{C}_c r}{G}$$

и уравненію (699, bis). Изъ этихъ равенствъ и изъ равенства (773) слѣдуетъ:

$$\rho_1 = \frac{G}{\sqrt{2hM}}, \dots\dots\dots\dots\dots \mathbf{(779)}$$

т. е., ρ_1 есть величина постоянная.

Черезъ эту точку проведемъ касательную плоскость къ эллипсоиду; разстояніе ея отъ центра C окажется равнымъ:

$$E = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{2h}{M}}, \dots\dots\dots\dots\dots \mathbf{(780)}$$

а направленіе ея — перпендикулярнымъ къ мгновенной оси. Слѣдовательно, величина угловой скорости обратно-пропорціональна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра C на касательную плоскость, проведенную къ гираціонному эллипсоиду въ точкѣ (ξ_1, η_1, ζ_1).

Для полнаго рѣшенія вопроса остается произвести еще два интегрированія.

Помноживъ первое изъ Эйлеровыхъ уравненій (762, bis) на $(p : \mathfrak{A}_c)$, второе — на $(q : \mathfrak{B}_c)$, третье — на $(r : \mathfrak{C}_c)$ и сложивъ, получимъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -\frac{(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{B}_c)(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{A}_c)(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_c}pqr.$$

Рѣшивъ равенства (772), (773) и

$$p^2 + q^2 + r^2 = \Omega^2$$

относительно p^2, q^2, r^2, найдемъ *):

$$p^2 = -a(\omega_1^2 - \Omega^2),\ q^2 = b(\omega_2^2 - \Omega^2),\ r^2 = -c(\omega_3^2 - \Omega^2), . \mathbf{(781)}$$

гдѣ:

$$\omega_1^2 = \frac{2h(\mathfrak{C} + \mathfrak{B}) - G^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}},\quad a = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})},$$

$$\omega_2^2 = \frac{2h(\mathfrak{C} + \mathfrak{A}) - G^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}},\quad b = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})},$$

$$\omega_3^2 = \frac{2h(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) - G^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},\quad c = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}.$$

*) Для краткости, не будемъ ставить значковъ c внизу буквъ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

На основаніи неравенствъ:

$$2h\mathfrak{C} - G^2 > 0,\ G^2 - 2h\mathfrak{A} > 0 \ldots\ldots \quad \mathbf{(782)}$$

окажется, что ω_1^2 и ω_2^2 болѣе нуля и что ω_2^2 болѣе ω_1^2 и ω_3^2; если, кромѣ того, принять въ разсчетъ, что $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} > \mathfrak{C}$, то окажется, что и ω_3^2 болѣе нуля.

Разность между ω_1^2 и ω_3^2 выразится такъ:

$$(\omega_1^2 - \omega_3^2)\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})(G^2 - 2h\mathfrak{B});$$

отсюда видно, что

$$\omega_1^2 > \omega_3^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} > 0,\ \text{т. е., если}\ D < \sqrt{\frac{м\partial^4}{\mathfrak{B}}},$$

$$\omega_1^2 < \omega_3^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} < 0,\ \text{т. е., если}\ D > \sqrt{\frac{м\partial^4}{\mathfrak{B}}}.$$

Послѣднее дифференціальное уравненіе, по подставленіи въ него выраженій (781), приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -\sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)} \ldots \quad \mathbf{(783)}$$

Такъ какъ производная отъ Ω^2 не можетъ имѣть мнимыхъ значеній, то Ω^2 не можетъ выходить изъ предѣловъ:

$$\omega_2^2\ \text{и}\ \omega_1^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} > 0$$

$$\omega_2^2\ \text{и}\ \omega_3^2,\ \text{если}\ G^2 - 2h\mathfrak{B} < 0.$$

Для интегрированія дифференціальнаго уравненія (783) можно поступить такъ:

1) Если D менѣе длины средней главной полуоси эллипсоида инерціи ($G^2 > 2h\mathfrak{B}$), положимъ:

$$\Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin^2\varphi;$$

дифференціальное уравненіе (783) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varkappa\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (784)$$

$$\varkappa = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(G^2 - 2h\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} \ldots\ldots\ldots (785)$$

$$k^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}} \cdot \frac{2h\mathfrak{C} - G^2}{G^2 - 2h\mathfrak{A}} \ldots\ldots\ldots\ldots (786)$$

Подобно тому, какъ было показано на стр. 209, условимся брать за начальное значеніе φ_0 уголъ, заключающійся въ предѣлахъ:

$$0 > \varphi_0 > -\frac{\pi}{2}, \text{ если } \left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0 > 0,$$

и

$$0 < \varphi_0 < \quad \frac{\pi}{2}, \text{ если } \left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0 > 0,$$

причемъ квадратъ синуса φ_0 и начальное значеніе φ_0' опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\sin^2\varphi_0 = \frac{\omega_2^2 - \Omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \varphi'_0 = \frac{-\left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0};$$

въ такомъ случаѣ φ будетъ непрерывно возрастать во все время движенія.

Если означить черезъ u интегралъ:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (787)$$

который на стр. 210 обозначенъ черезъ $F(\varphi, k)$, то законъ возрастанія u выразится такъ: $u = u_0 + \varkappa t$, гдѣ $u_0 = F(\varphi_0, k)$.

Величина u (787) есть функція отъ φ и k; обратно, φ есть функція отъ u и k, называемая *амплитудою* отъ u по модулю k; ее обозначаютъ слѣдующимъ знакомъ: $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ или проще: $\operatorname{am} u$.

Слѣдовательно:

$$\varphi = \operatorname{am}(\varkappa t + u_0), \quad \Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin^2\operatorname{am}(\varkappa t + u_0).$$

Функціи:

$$\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \sqrt{1-k^2\sin\varphi}$$

называются *синусомъ амплитуды* (u), *косинусомъ амплитуды* (u) *и дельтою амплитуды* (u); послѣдняя обозначается такъ: Δam$u$.

Изъ выраженій (781) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= k\varkappa\sqrt{a}\cos\mathrm{am}(\varkappa t+u_0) \\ q &= k\varkappa\sqrt{b}\sin\mathrm{am}(\varkappa t+u_0) \\ r &= \varkappa\sqrt{c}\Delta\mathrm{am}(\varkappa t+u_0) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdot \quad (788)$$

2) Если D болѣе длины средней главной полуоси центральнаго эллипсоида инерціи ($G^2 < 2h\mathfrak{B}$), положимъ:

$$\Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2-\omega_3^2)\sin^2\varphi$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(2h\mathfrak{C}-G^2)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}},$$

$$k_1^2 = \frac{\omega_2^2-\omega_3^2}{\omega_2^2-\omega_1^2} = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}\cdot\frac{G^2-2h\mathfrak{A}}{2h\mathfrak{C}-G^2},$$

получимъ тогда:

$$\left.\begin{aligned} p &= \varkappa_1\sqrt{a}\Delta\mathrm{am}(\varkappa_1 t+u_0) \\ q &= \varkappa_1 k_1\sqrt{b}\sin\mathrm{am}(\varkappa_1 t+u_0) \\ r &= \varkappa_1 k_1\sqrt{c}\cos\mathrm{am}(\varkappa_1 t+u_0) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots \quad (789)$$

3) Если D равно длинѣ средней главной полуоси центральнаго эллипсоида инерціи ($G^2 = 2h\mathfrak{B}$), то тогда $\omega_1^2 = \omega_3^2 = \frac{2h}{\mathfrak{B}}$, а дифференціальное уравненіе (783) приметъ такой видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -(\Omega^2-\omega_1^2)\sqrt{\omega_2^2-\Omega^2};$$

замѣнивъ $(\omega_2^2 - \Omega^2)$ черезъ $q^2 : b$) и интегрируя, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} q &= n\sqrt{b}\frac{e^{2(nt+\varepsilon)}-1}{e^{2(nt+\varepsilon)}+1} \\ \frac{p}{\sqrt{a}} &= \frac{r}{\sqrt{c}} = \frac{2ne^{nt+\varepsilon}}{e^{2(nt+\varepsilon)}+1} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (790)$$

$$n = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \sqrt{\frac{2h(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}};\ n\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}}}.$$

Примемъ направленіе главнаго момента количествъ движенія за ось $Z^{овъ}$.

Углы $ф$ и $э$ опредѣлятся безъ интегрированія изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}p &= G\cos(Z,\Xi) = -G\sin ф\cos э, \\ \mathfrak{B}q &= G\cos(Z,\Upsilon) = \quad G\sin ф\sin э, \\ \mathfrak{C}r &= G\cos(Z,\mathbf{Z}) = \quad G\cos ф, \end{aligned}\right\}, \dots\dots (791)$$

откуда:

$$\cos ф = \frac{\mathfrak{C}r}{G} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (792)$$

$$\operatorname{tg} э = -\frac{\mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}p} \dots\dots\dots\dots (793)$$

Для опредѣленія $ж$ придется произвести шестое и послѣднее интегрированіе.

Исключимъ $ф'$ изъ равенствъ:

$$p = -ж'\sin ф\cos э + ф'\sin э,\ q = ж'\sin ф\sin э + ф'\cos э,$$

получимъ:

$$ж'\sin ф = q\sin э - p\cos э = \frac{q\sin э\sin ф - p\cos э\sin ф}{\sin ф},$$

или, на основаніи равенствъ (791):

$$ж' = \frac{\mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{A}p^2}{G^2 - \mathfrak{C}^2r^2}G = \frac{2h - \mathfrak{C}r^2}{G^2 - \mathfrak{C}^2r^2}G.$$

Отсюда:

$$\text{ж} = \Gamma + \frac{G}{\mathfrak{C}} t + (2h\mathfrak{C} - G^2)\frac{G}{\mathfrak{C}} \int \frac{dt}{G^2 - \mathfrak{C}^2 r^2}, \ldots . \mathbf{(794)}$$

гдѣ r^2 должно быть замѣнено полученною выше функціею отъ t.

При $G^2 > 2h\mathfrak{B}$ уголъ ж выразится такъ:

$$\text{ж} = \Gamma + \frac{G}{\mathfrak{C}} t + G\frac{(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \int \frac{dt}{1 + \mu^2 k^2 \sin^2 \mathrm{am}(\varkappa t + u_0)},$$

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + \frac{G}{\mathfrak{C}} t + \frac{G}{\varkappa} \frac{(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \mu^2 k^2 \sin^2 \varphi)\,\Delta\varphi}, \ldots . \mathbf{(794, 1)}$$

$$\mu^2 = \frac{\mathfrak{C}(G^2 - 2h\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(2h\mathfrak{C} - G^2)}; \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

При $G^2 < 2h\mathfrak{B}$ уголъ ж выразится такъ:

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + \frac{G}{\mathfrak{C}} t + \frac{G}{\varkappa_1} \frac{(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \mu_1^2 k_1^2 \sin^2 \varphi)\Delta\varphi}, \ldots . \mathbf{(794, 2)}$$

$$\mu_1^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}; \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}.$$

Слѣдовательно, въ тѣхъ и въ другихъ случаяхъ:

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + \frac{G}{\mathfrak{C}} t + \psi,$$

гдѣ ψ выражается эллиптическимъ интеграломъ третьяго рода отъ φ, взятымъ въ предѣлахъ отъ φ_0 до φ.

При $G^2 = 2h\mathfrak{B}$ представимъ ж' такъ:

$$\text{ж}' = \frac{G}{\mathfrak{B}} + \frac{G}{\mathfrak{B}} \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})r^2}{2h\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 r^2};$$

затѣмъ воспользуемся слѣдующими равенствами, которыя можно вывести изъ формулъ (790):

$$r^2 = c\left(n^2 - \frac{q^2}{b}\right), \quad \left(n^2 - \frac{q^2}{b}\right)dt = \frac{dq}{\sqrt{b}},$$

тогда получимъ:

$$d\text{ж} = \frac{G}{\mathfrak{B}}dt + \frac{\lambda dq}{1 + \lambda^2 q^2}; \quad \lambda^2 = \frac{\mathfrak{B}}{2h}\,\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})};$$

отсюда:

$$\text{ж} = \text{ж}_0 + t\sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}}} + \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}}\;\frac{e^{2(nt+\varepsilon)} - 1}{e^{2(nt+\varepsilon)} + 1}\right] \,.\,.\mathbf{(794,3)}$$

Для того, чтобы составить себѣ представленіе о различныхъ видахъ вращенія тѣла по инерціи, слѣдуетъ ближе ознакомиться съ видомъ полодій и эрполодій, соотвѣтствующихъ различнымъ разстояніямъ D.

Такъ какъ каждая полодія находится на поверхности центральнаго эллипсоида и касательныя къ нему плоскости, проведенныя черезъ точки ея, отстоятъ отъ центра эллипсоида на одномъ и томъ же разстояніи D, то уравненія ея суть:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = \text{м}\partial^4$$

$$\mathfrak{A}^2\xi^2 + \mathfrak{B}^2\eta^2 + \mathfrak{C}^2\zeta^2 = \frac{\text{м}^2\partial^8}{D^2}.$$

Эту же кривую можно разсматривать, какъ линію пересѣченія эллипсоида инерціи съ коническою поверхностью, выражаемою слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{A} - \frac{\text{м}\partial^4}{D^2}\right)\xi^2 + \mathfrak{B}\left(\mathfrak{B} - \frac{\text{м}\partial^4}{D^2}\right)\eta^2 + \mathfrak{C}\left(\mathfrak{C} - \frac{\text{м}\partial^4}{D^2}\right)\zeta^2 = 0 \,.\,.\mathbf{(795)}$$

Если центръ инерціи неподвиженъ, то эта коническая поверхность представляетъ собою подвижный аксоидъ мгновенныхъ осей (см. стр. 107) кинематической части.

Изъ трехъ коэфиціентовъ этой конической поверхности втораго порядка послѣдній — всегда положительный, а первый — всегда отрицательный, потому что:

$$\frac{мд^4}{\mathfrak{A}} \geqslant D^2 \geqslant \frac{мд^4}{\mathfrak{C}},$$

коэфиціентъ же у η^2 имѣетъ положительную величину тогда, когда D болѣе длины средней полуоси эллипсоида инерціи и онъ имѣетъ величину отрицательную тогда, когда D менѣе этой полуоси.

Слѣдовательно, если $G^2 < 2h\mathfrak{B}$, т. е., D длиннѣе средней полуоси, то коническая поверхность (795) обхватываетъ ось Ξ, а потому полодія есть замкнутая кривая, окружающая собою нѣкоторую такую часть поверхности эллипсоида, которая заключаетъ въ себѣ конецъ его большой полуоси; такова, напримѣръ, полодія $e\,e_1\,e_2\,e_3$ на чертежѣ 77-мъ.

Если $G^2 > 2h\mathfrak{B}$, т. е. D короче средней полуоси, то коническая поверхность (795) обхватываетъ ось Z, а полодія есть замкнутая кривая, окружающая собою конецъ малой полуоси на поверхности эллипсоида; такова, напримѣръ, полодія $i\,i_1\,i_2\,i_3$.

Каждой полодіи, находящейся на одной половинѣ эллипсоида, соотвѣтствуетъ совершенно такая же другая кривая на другой половинѣ его; обѣ кривыя суть линіи пересѣченія поверхности эллипсоида одною и тою же коническою поверхностью.

При D равномъ длинѣ средней полуоси, т. е., при $G^2 = 2h\mathfrak{B}$, полодіями служатъ два эллипса $\beta b \beta' b'$ и $\beta_1 b \beta_1' b'$ (черт. 77), образуемые пересѣченіемъ поверхности эллипсоида плоскостями:

$$\xi = \pm\zeta\sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}}.$$

При G^2, равномъ $2h\mathfrak{A}$, полодіями служатъ концы большихъ главныхъ полуосей, а при G^2, равномъ $2h\mathfrak{C}$, — концы малыхъ полуосей эллипсоида инерціи.

Эрполодіи суть плоскія кривыя, образуемыя пересѣченіемъ той плоскости, по которой эллипсоидъ катается, съ нѣкоторою коническою поверхностью.

Эта коническая поверхность образуется положеніями мгновенной оси въ пространствѣ, когда центръ инерціи вращающагося тѣла неподвиженъ.

Направленіе мгновенной оси въ пространствѣ можетъ быть выражено величинами угловъ ϑ и ψ, подразумѣвая подъ ϑ уголъ, составляемый направленіемъ угловой скорости Ω съ направленіемъ главнаго момента количествъ движенія тѣла (который предполагается параллельнымъ оси $Z^{овъ}$), а подъ ψ — уголъ, составляемый плоскостью, проведенною черезъ направленіе мгновенной оси $C\Omega$ и черезъ главный моментъ CZ, съ плоскостью ZOX. Эти углы выражаются слѣдующимъ образомъ въ проэкціяхъ угловой скорости на неподвижныя оси координатъ:

$$\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{Q}{P}, \ldots \ldots \ldots \textbf{(796)}$$

гдѣ

$$R = \frac{2h}{G} \text{ (см. (778)) и } P^2 + Q^2 = \Omega^2 - R^2.$$

Для того, чтобы составить уравненіе вышесказанной конической поверхности, слѣдуетъ выразить P и Q функціями времени t и затѣмъ исключить t изъ равенствъ (796).

Вмѣсто этого можно составить дифференціальное уравненіе конической поверхности или даже прямо дифференціальное уравненіе эрполодіи; проинтегрировавъ составленное уравненіе, должны будемъ получить уравненіе эрполодіи въ конечномъ видѣ.

Теперь будетъ выведено дифференціальное уравненіе эрполодіи, но оно будетъ здѣсь проинтегрировано только для случая $G^2 = 2h\mathfrak{B}$.

Прежде всего составимъ выраженіе для производной отъ ψ по t:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{PQ' - QP'}{P^2+Q^2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(797)}$$

Поансо нашелъ, что эта производная выражается простою функціею отъ $\operatorname{cotg} \vartheta$; для полученія этого выраженія, подвергнемъ вторую часть равенства (797) слѣдующимъ преобразованіямъ.

Выразивъ P и Q по формуламъ (118), а P' и Q' по формуламъ (132) кинематической части, и совершивъ надлежащія преобразованія, найдемъ:

$$PQ' - QP' = (qr' - rq')\lambda_z + (rp' - pr')\mu_z + (pq' - qp')\nu_z$$

а если замѣнимъ производныя p', q', r' выраженіями ихъ въ p, q, r, получаемыми изъ дифференціальныхъ уравненій (762, bis), то найдемъ:

$$PQ' - QP' = G\frac{\mathfrak{C}^2\gamma r\nu_z + \mathfrak{B}^2\beta q\mu_z - \mathfrak{A}^2\alpha p\lambda_z}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \ldots (797, \text{bis})$$

подразумѣвая подъ α, β и γ слѣдующія выраженія:

$$\alpha = \frac{G}{\mathfrak{A}} - \frac{2h}{G}, \quad \beta = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{B}}, \quad \gamma = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{C}} \ldots (798)$$

Помощью этихъ величинъ α, β и γ могутъ быть выражены величины: ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, именно:

$$\omega_1^2 - R^2 = \frac{2h(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) - G^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} - \frac{4h^2}{G^2} = -\beta\gamma$$

$$\omega_1^2 = R^2 - \beta\gamma, \quad \omega_2^2 = R^2 + \alpha\gamma, \quad \omega_3^2 = R^2 + \alpha\beta \ldots (799)$$

Выразивъ, въ (797, bis), косинусы λ_z, μ_z, ν_z въ p, q, r по формуламъ (791), замѣнивъ p^2, q^2, r^2 выраженіями (781), а ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2— выраженіями (799), и принявъ во вниманіе слѣдующія тождества:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 1,$$

получимъ:

$$PQ' - QP' = R(\Omega^2 - R^2) - \alpha\beta\gamma,$$

а потому:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha\beta\gamma}{R^2}\cot g^2\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (800)$$

Такова формула, найденная Поансо.

Вмѣсто $\cot g\,\vartheta$ можно ввести въ эту формулу величину радіуса вектора $\mathfrak{r}$ эрполодіи, проведеннаго изъ точки пересѣченія плоскости кривой направленіемъ главнаго момента количествъ движенія. Такъ какъ радіусъ векторъ $\mathfrak{r}$ и разстояніе D суть катеты прямоугольнаго треугольника, имѣющаго гипотенузою радіусъ векторъ эллипсоида инерціи, направленный вдоль по мгновенной оси, то:

$$\mathfrak{r} = D\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \varepsilon R\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \varepsilon\sqrt{\Omega^2 - R^2}; \quad \varepsilon^2 = \frac{M\delta^4}{2h},$$

а потому формула (800) получитъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha\beta\gamma}{\mathfrak{r}^2}\varepsilon^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (800, A)$$

Производную отъ $\mathfrak{r}$ по t можемъ выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{\mathfrak{r}}\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} = -\frac{\varepsilon^2}{\mathfrak{r}}\sqrt{(\omega_3^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)},$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon\mathfrak{r}}\sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma - \mathfrak{r}^2)(\mathfrak{r}^2 + \varepsilon^2\beta\gamma)(\mathfrak{r}^2 - \varepsilon^2\alpha\beta)} \ldots (801, A)$$

Изъ уравненій (800, A) и (801, A) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе эрполодій:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\psi} = -\frac{\mathfrak{r}\sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma - \mathfrak{r}^2)(\mathfrak{r}^2 + \varepsilon^2\beta\gamma)(\mathfrak{r}^2 - \varepsilon^2\alpha\beta)}}{\varepsilon(R\mathfrak{r}^2 - \varepsilon^2\alpha\beta\gamma)} \ldots (802, A)$$

Въ томъ случаѣ, когда $G^2 = 2h\mathfrak{B}$, т. е. $\beta = 0$, это уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$-\frac{d\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}\sqrt{\varepsilon^2\alpha\gamma - \mathfrak{r}^2}} = \frac{d\psi}{\varepsilon R};$$

интегрируя, получимъ уравненіе кривой линіи:

$$\frac{\varepsilon\varkappa R}{\mathfrak{r}} = \frac{e^{\varkappa(\psi + c)} + e^{-\varkappa(\psi + c)}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (803)$$

$$\varkappa = \frac{n}{R} = \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2h(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}},$$

гдѣ c есть произвольная постоянная.

Кривая, выражаемая уравненіемъ (803), изображена на черт. 78-мъ. Она имѣетъ видъ двойной спирали, обѣ половины которой ассимптотически завиваются вокругъ точки K ($\mathfrak{r}$ приближается къ нулю при приближеніи ψ къ $+\infty$ и къ $-\infty$); при $\psi = -c$ радіусъ векторъ кривой имѣетъ наибольшую величину. Линія MKN, на которой находятся точки пересѣченія обѣихъ половинъ кривой, есть ось симметріи ея.

При помощи полученныхъ выше дифференціальныхъ уравненій можно составить себѣ понятіе о нѣкоторыхъ свойствахъ прочихъ эрполодій; начнемъ съ кривыхъ, соотвѣтствующихъ разстояніямъ D меньшимъ длины средней полуоси эллипсоида инерціи.

Въ этихъ случаяхъ $2h\mathfrak{B} < G^2$, то есть $\beta < 0$; означимъ положительную величину $(-\beta)$ черезъ β_1:

$$\beta_1 = -\beta = \frac{G}{\mathfrak{B}} - \frac{2h}{G} = \frac{G}{\mathfrak{B}} - R;$$

тогда дифференціальныя уравненія (800, A) и (801, A) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = R + \frac{\alpha\beta_1\gamma}{\mathfrak{r}^2}\varepsilon^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(800,B)}$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon\mathfrak{r}}\sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma - \mathfrak{r}^2)(\mathfrak{r}^2 - \varepsilon^2\beta_1\gamma)(\mathfrak{r}^2 + \varepsilon^2\alpha\beta_1)} \ldots \mathbf{(801,B)}$$

Изъ послѣдняго уравненія видно, что вся кривая заключается между двумя концентрическими окружностями, имѣющими слѣдующіе радіусы:

$$\mathfrak{r}_1 = \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{r}_2 = \varepsilon\sqrt{\beta_1\gamma}$$

и что она прикасается поочередно, то къ наружной окружности радіуса $\mathfrak{r}_1$, то ко внутренней — радіуса $\mathfrak{r}_2$. Изъ дифференціальнаго уравненія (800, B) видно, что при $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ угловая скорость радіуса вектора $\mathfrak{r}$ имѣетъ наименьшую величину $(R + \beta_1)$, т. е. $(G : \mathfrak{B})$, а при $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2$ — наибольшую величину $(R + \alpha)$, т. е. $(G : \mathfrak{A})$. На чертежахъ 79-мъ, 80-мъ и 81-мъ изображены нѣкоторыя изъ замкнутыхъ эрполодій этого вида.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда разстояніе D болѣе средней полуоси эллипсоида инерціи, величина β болѣе нуля, такъ какъ $2h\mathfrak{B} > G^2$.

Изъ дифференціальнаго уравненія (801, A) видно, что при положительномъ β эрполодія заключается между двумя концентрическими окружностями, имѣющими слѣдующіе радіусы:

$$\mathfrak{r}_1 = \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{r}_2 = \varepsilon\sqrt{\alpha\beta}$$

и что она прикасается къ нимъ поочередно. Изъ дифференціальнаго уравненія (800, A) видно, что угловая скорость радіуса вектора $\mathfrak{r}$ имѣетъ наибольшую величину $(R - \beta) = (G : \mathfrak{B})$ при наибольшей величинѣ $(\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1)$ и наименьшую величину $(R - \gamma) = (G : \mathfrak{C})$ при наименьшей величинѣ $(\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2)$ радіуса вектора. Примѣры эрполодій этого рода см. на чертежахъ: 86, 87, 88 и 89.

При $G^2 = 2h\mathfrak{A}$ эрполодіею служитъ точка K, въ которой плоскость прикасается къ концу большой полуоси эллипсоида; при

$G^2 = 2h\mathfrak{C}$ эрполодiею служитъ точка прикосновенiя плоскости къ концу малой полуоси эллипсоида.

§ 121. Различiе между главными осями инерцiи по отношенiю къ устойчивости вращенiя.

Вращенiе твердаго тѣла по инерцiи можетъ совершаться съ постоянною угловою скоростью только вокругъ одной изъ главныхъ осей инерцiи; въ самомъ дѣлѣ, изъ дифференцiальнаго уравненiя (783) видно, что Ω^2 можетъ быть равно постоянной величинѣ только при условiи, чтобы оно равнялось одной изъ трехъ величинъ: ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2; а изъ выраженiй (781) слѣдуетъ, что тогда равна нулю одна изъ величинъ p, q или r. Положимъ, что $\Omega^2 = \omega_1^2$, такъ что $p = 0$; если взглянемъ на первое изъ дифференцiальныхъ уравненiй (762, bis), то увидимъ, что p не можетъ быть постоянно равнымъ нулю безъ того, чтобы не была равною нулю одна изъ двухъ другихъ проэкцiй угловой скорости: q или r.

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что Ω можетъ быть постоянною величиною только въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1) если постоянно $p = 0$ и $q = 0$,
2) если постоянно $r = 0$ и $p = 0$,
3) если постоянно $q = 0$ и $r = 0$;

въ первомъ случаѣ тѣло вращается вокругъ малой оси эллипсоида инерцiи, во второмъ — вокругъ средней, въ третьемъ — вокругъ большей.

Въ этихъ случаяхъ ось вращенiя сохраняетъ не только неизмѣнное положенiе въ твердомъ тѣлѣ, но и кромѣ того постоянное направленiе въ пространствѣ, въ чемъ нетрудно убѣдиться при помощи имѣющихся формулъ.

Напримѣръ, если $p = 0$ и $r = 0$, то изъ формулъ (791) видно, что $\phi = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, а тогда изъ формулъ (107) и (108) кинематической части (стр. 94 — 95) заключимъ, что:

$$P = 0, \;\; Q = 0,$$

слѣдовательно, угловая скорость постоянно совпадаетъ съ осью $Z^{овъ}$.

Изъ этого слѣдуетъ, *что свободное твердое тѣло можетъ вращаться по инерціи равномѣрно только вокругъ своихъ главныхъ осей инерціи; при такомъ вращеніи та ось, вокругъ которой вращеніе происходитъ, сохраняетъ постоянное направленіе въ пространствѣ.*

Для того, чтобы тѣло вращалось вокругъ которой либо изъ главныхъ осей инерціи, необходимо, чтобы начальная угловая скорость была направлена по этой оси.

Совпадаетъ ли начальная угловая скорость съ одною изъ главныхъ осей инерціи, или нѣтъ, во всякомъ случаѣ, для полнаго опредѣленія вращательнаго движенія твердаго тѣла необходимо знать начальныя положенія главныхъ осей инерціи въ пространствѣ, начальное направленіе угловой скорости и начальную величину ея, т. е., начальныя значенія угловъ *ф*, *ж*, *э* и проэкцій P, Q, R угловой скорости на направленія неподвижныхъ осей координатъ. По этимъ начальнымъ даннымъ и по формуламъ (47) — (54) кинематической части опредѣлимъ начальныя значенія косинусовъ λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, μ_y, μ_z, ν_x, ν_y, ν_z, а затѣмъ, по формуламъ (116) кинематической части, — начальныя значенія p_0, q_0, r_0 проэкцій угловой скорости на направленія осей Ξ, Υ, Z; далѣе, по формуламъ (772) (стр. 550) и (761) (стр. 544), опредѣлимъ величину G главнаго момента количествъ движенія тѣла (вокругъ центра инерціи) и начальное направленіе его относительно осей Ξ, Υ, Z, а по формуламъ (659) стр. (472) опредѣлимъ направленіе его въ пространствѣ. Это направленіе возьмемъ за ось $Z^{\text{овъ}}$, а два другія направленія, перпендикулярныя къ нему и между собою — за оси $X^{\text{овъ}}$ и $Y^{\text{овъ}}$. Величину живой силы вращательнаго движенія тѣла вокругъ центра инерціи опредѣлимъ по формулѣ (773).

Имѣя численныя значенія величинъ G и $2h$, опредѣлимъ величину отношенія $(G^2 : 2h)$; сравнивъ ее съ величинами главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи даннаго твердаго тѣла, встрѣтимся съ однимъ изъ слѣдующихъ случаевъ:

$$1)\ \frac{2h}{G^2} = \mathfrak{C}_c, \quad 2)\ \mathfrak{C}_c > \frac{G^2}{2h} > \mathfrak{B}_c, \quad 3)\ \frac{G^2}{2h} = \mathfrak{B}_c,$$

$$4)\ \mathfrak{B}_c > \frac{G^2}{2h} > \mathfrak{A}_c, \quad 5)\ \frac{G^2}{2h} = \mathfrak{A}_c.$$

1) Если $G^2 = 2h\mathfrak{C}_c$, то формула (786) (стр. 556) дастъ $k = 0$, а

потому формулы (787), (788), (792) дадутъ $\varphi = u = \varkappa t$, $p = 0$, $q = 0$, $r = \varkappa\sqrt{c}$, $\mathfrak{f} = 0$; очевидно, это есть случай вращенія тѣла вокругъ малой оси центральнаго эллипсоида.

2) Если G^2 не равно $2h\mathfrak{C}_c$, но болѣе $2h\mathfrak{B}_c$, то законъ вращенія выражается формулами (784) — (788), (792), (793) и (794, 1); постоянная u_0 и знаки корней $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ должны быть опредѣлены по величинамъ и знакамъ начальныхъ: p_0, q_0, r_0.

3) Если $G^2 = 2h\mathfrak{B}_c$, то законъ вращенія выражается формулами (790), (792), (793) и (794, 3); изъ формулъ (790) видно, что при возрастаніи t до безконечности, величины p и r приближаются къ нулю, а q — къ $\pm n\sqrt{b}$, то есть, къ

$$\pm\sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}_c}},$$

поэтому мгновенная ось ассимптотически приближается къ совпаденію съ положительною или съ отрицательною осью Y.

Мы будемъ подразумѣвать подъ n положительно взятую величину корня:

$$n = +\sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}_c}\,\frac{(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{B}_c)(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{A}_c\mathfrak{C}_c}};$$

тогда знаки корней $\sqrt{a}$ и $\sqrt{c}$ опредѣлятся по знакамъ начальныхъ величинъ p_0 и r_0, какъ это видно изъ равенствъ:

$$\frac{p_0}{\sqrt{a}} = \frac{r_0}{\sqrt{c}} = \frac{2n}{e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon}} \dots\dots\dots\dots (804)$$

(Эти равенства, а также и слѣдующее:

$$q_0 = n\sqrt{b}\,\frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \dots\dots\dots\dots (805)$$

получаются изъ формулъ (790) при ($t = 0$)).

Изъ равенствъ (804) слѣдуетъ, что знакъ корня $\sqrt{a}$ долженъ быть одинаковъ со знакомъ величины p_0 и знакъ корня $\sqrt{c}$ — одинаковъ со знакомъ величинъ r_0; знаки величинъ p и r остаются неизмѣнными во все время движенія.

Мы условились считать n положительнымъ; въ силу этого условія изъ выраженія для q ((790), стр. 558) слѣдуетъ, что при возрастаніи t

до безконечности, q приближается къ $n\sqrt{b}$; съ другой стороны изъ дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c}{\mathfrak{B}_c} rp$$

и изъ того обстоятельства, что знаки величинъ r, p не могутъ измѣниться при движеніи, слѣдуетъ, что q либо непрерывно возрастаетъ, либо убываетъ во все время движенія; а именно, q непрерывно возрастаетъ, если начальныя значенія p_0 и r_0 оба положительныя или оба отрицательныя; если же одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное, то q непрерывно убываетъ. Отсюда мы должны заключить, что корень $\sqrt{b}$ долженъ быть взятъ съ плюсомъ, если $p_0 > 0$ и $r_0 > 0$ или если $p_0 < 0$ и $r_0 < 0$ и, обратно, корень $\sqrt{b}$ долженъ быть взятъ съ минусомъ, если $p_0 > 0$ и $r_0 < 0$ или если $p_0 < 0$ и $r_0 > 0$; въ первыхъ случаяхъ угловая скорость непрерывно приближается къ совпаденію съ положительною осью Υ, во вторыхъ — къ совпаденію съ отрицательною осью Υ.

Придавъ корню $\sqrt{b}$ надлежащій знакъ, опредѣлимъ e^{ε} изъ равенства (805).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, при разсматриваемыхъ нами здѣсь случаяхъ вращенія тѣла, точка пересѣченія мгновенной оси съ поверхностью эллипсоида перемѣщается по направленію (см. чертежъ 82-й) стрѣлки s_1, если начальное положеніе ея было на полуэллипсѣ $b'\beta b$; стрѣлки s_2, h_1, h_2 указываютъ направленія перемѣщеній ея въ тѣхъ случаяхъ, когда начальныя положенія ея находятся на прочихъ полуэллипсахъ. Во всякомъ случаѣ эта точка на эллипсоидѣ приближается ассимптотически къ точкѣ b или b', а на эрполодіи она движется по спирали (черт. 78) въ одну сторону, не измѣняя направленія движенія по кривой, приближаясь ассимптотически къ точкѣ K.

Если въ начальный моментъ $p_0 = 0$ и $r_0 = 0$, то изъ равенствъ (804) слѣдуетъ, что тогда e^{ε} равно ∞, а потому тогда $q = n\sqrt{b} = q_0$; это — случай вращенія тѣла вокругъ средней оси эллипсоида инерціи.

4) Если G^2 менѣе $2h\mathfrak{B}_c$, то вращеніе тѣла выражается формулами (789), (792), (793), (794, 2). Знаки корней $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ и величина постоянной u_0 должны быть опредѣлены по начальнымъ: p_0, q_0, r_0.

5) Если $G^2 = 2h\mathfrak{A}_c$, то $k_1 = 0$, а потому формулы (789) дадутъ: $p = \varkappa_1\sqrt{a}$, $q = 0$, $r = 0$; это случай вращенія твердаго тѣла вокругъ большой оси эллипсоида инерціи.

Главныя оси наибольшаго и наименьшаго момента инерціи называются *осями устойчиваго вращенія*, а главная ось средняго момента инерціи называется *осью неустойчиваго вращенія*; сейчасъ будетъ объяснено, почему онѣ могутъ быть такъ названы.

Если тѣло вращается вокругъ меньшей оси Cc (черт. 82) эллипсоида инерціи и какая либо причина отклонитъ угловую скорость отъ этого направленія на весьма малый уголъ, а затѣмъ тѣлу будетъ снова предоставлено вращаться по инерціи, то отклоненіе угловой скорости отъ оси Cc и при дальнѣйшемъ движеніи не превыситъ нѣкотораго весьма малаго предѣла, такъ какъ полодія, описываемая точкою пересѣченія мгновенной оси съ поверхностью эллипсоида, будетъ замкнутая кривая fff, окружающая точку c весьма тѣсно со всѣхъ сторонъ.

То же самое можно сказать и относительно вращенія вокругъ бо́льшей оси Ca эллипсоида инерціи; если какая либо причина отклонитъ точку пересѣченія эллипсоида мгновенною осью изъ a въ g_1, то при дальнѣйшемъ движеніи эта точка будетъ описывать полодію g_1gg; если уголъ aCg_1 весьма малъ, то отклоненіе угловой скорости отъ оси Ca будетъ весьма малымъ и во всякій моментъ движенія, потому что всѣ точки полодіи g_1gg почти столь же близки къ точкѣ a, какъ и точка g_1.

Слѣдовательно, если тѣло вращается вокругъ большей или меньшей оси эллипсоида инерціи, и если ему будетъ сообщенъ слабый толчекъ, вслѣдствіе котораго угловая скорость отклонится отъ оси на весьма малый уголъ, то угловая скорость не будетъ совпадать съ осью и потомъ, но будетъ описывать около нея нѣкоторую коническую поверхность съ весьма острымъ угломъ при вершинѣ. Если толчекъ очень слабъ, то отклоненія угловой скорости отъ оси инерціи столь ничтожны, что вращеніе тѣла почти не отличается отъ вращенія вокругъ оси инерціи.

Поэтому и можно сказать, что вращенія твердаго тѣла вокругъ крайнихъ осей инерціи имѣютъ устойчивый характеръ. Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что такая устойчивость имѣетъ мѣсто въ какую бы сторону ни было направлено отклоненіе угловой скорости, происходящее вслѣдствіе толчка.

Если вращеніе происходило вокругъ средней оси Cb, то дѣйствіе весьма малаго толчка можетъ повлечь за собою различныя измѣненія движенія тѣла, въ зависимости отъ того, по какому направленію будетъ отклоненъ изъ точки b конецъ мгновенной оси. Если толчекъ перенесъ этотъ конецъ изъ b въ s_1 или въ s_2 (см. черт. 82), то при дальнѣйшемъ движеніи конецъ мгновенной оси будетъ приближаться къ точкѣ b; слѣдовательно, отклоненіе угловой скорости по одному изъ этихъ двухъ направленій влечетъ за собою постепенное, хотя и весьма медленное, возвращеніе ея къ оси $Y^{ов}$. Напротивъ, отклоненіе конца мгновенной оси изъ точки b въ h_1 или h_2 влечетъ за собою дальнѣйшее удаленіе его отъ b; если же толчекъ отклонилъ конецъ мгновенной оси изъ b въ k_1, k_2, n_1 или въ n_2, то дальнѣйшее перемѣщеніе этого конца совершается по полодіямъ, изображеннымъ на чертежѣ; при этомъ отклоненіе угловой скорости отъ оси Cb въ концѣ концовъ дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла теряетъ всякое сходство съ вращеніемъ вокругъ оси Cb.

Слѣдовательно, вращеніе вокругъ оси Cb имѣетъ устойчивый характеръ только тогда, когда угловая скорость, отклоняясь отъ оси Cb, остается въ плоскости $\beta b \beta'$, при отклоненіяхъ же по всѣмъ остальнымъ направленіямъ вращеніе оказывается неустойчивымъ; по этой причинѣ средняя ось инерціи и называется осью неустойчиваго вращенія.

§ 122. Вращательное движеніе по инерціи такого твердаго тѣла, центральный эллипсоидъ котораго есть эллипсоидъ вращенія или шаръ.

Если $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{A}_c$, т. е., эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то вращательное движеніе по инерціи получаетъ болѣе простой видъ, потому что какъ полодіи такъ и эрполодіи будутъ кругами, слѣдовательно, уголъ ϕ, составляемый осью Z съ направленіемъ главнаго момента количествъ движенія, будетъ сохранять постоянную величину, а поэтому и проэкція главнаго момента на направленіе Z будетъ постоянна; но такъ какъ:

$$\mathfrak{C}_c r = G \cos \phi,$$

то отсюда слѣдуетъ, что

$$r = \frac{G \cos \phi}{\mathfrak{C}_c}$$

имѣетъ величину постоянную, слѣдовательно, вращеніе тѣла вокругъ оси $C\mathsf{Z}$ совершается равномѣрно, а потому и плоскость $\mathsf{Z}CG$ (черт. 83 и 84) вращается вокругъ линіи CG равномѣрно.

Но эллипсоидъ инерціи можетъ быть удлиненнымъ или сжатымъ; въ первомъ случаѣ угловая скорость Ω заключается внутри угла $GC\mathsf{Z}$ (черт. 83), во второмъ — внѣ (черт. 84); въ первомъ случаѣ подвижный аксоидъ, образуемый положеніями мгновенной оси внутри тѣла, будетъ внѣ аксоида неподвижнаго, образуемаго положеніями мгновенной оси въ пространствѣ; во второмъ случаѣ подвижный аксоидъ обнимаетъ собою аксоидъ неподвижный, какъ изображено на чертежѣ (84); этотъ наружный конусъ катится безъ скольженія по внутреннему неподвижному конусу.

Если начальная угловая скорость направлена по оси Z или по одной изъ экваторіальныхъ осей эллипсоида инерціи, то ось вращенія сохраняетъ неизмѣнное положеніе, какъ къ тѣлѣ, такъ и въ пространствѣ.

Ось Z есть устойчивая ось вращенія, а каждая экваторіальная ось — неустойчивая; послѣднее видно изъ слѣдующаго: если осью вращенія служила какая либо экваторіальная ось Ca (черт. 85) и какая либо причина перенесла конецъ мгновенной оси въ точку α, то при дальнѣйшемъ движеніи этотъ конецъ будетъ перемѣщаться по полодіи $\alpha\alpha_1$, отклоненіе угловой скорости отъ оси Ca дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла теряетъ всякое сходство съ вращеніемъ вокругъ оси Ca.

Если эллипсоидъ инерціи — шаръ, то всякая ось есть ось инерціи; вращеніе такого тѣла по инерціи совершается съ постоянною угловою скоростью вокругъ всякой центральной оси, причемъ эта ось сохраняетъ неизмѣнное положеніе въ тѣлѣ и неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

§ 123. Примѣры силъ, при дѣйствіи которыхъ свободное твердое тѣло вращается по инерціи вокругъ своего центра инерціи.

Если къ свободному твердому тѣлу не приложено никакихъ внѣшнихъ силъ, то его центръ инерціи движется прямолинейно и равномѣрно, а самое тѣло вращается вокругъ своего центра по законамъ, приведеннымъ въ предыдущихъ параграфахъ; полное движеніе, совершаемое при этомъ твердымъ тѣломъ, называется движеніемъ его по инерціи.

Примѣръ 99-й. Свободное твердое тѣло подвержено только силѣ тяжести, такъ что къ каждому элементу объема тѣла приложена сила, направленная по оси $У^{овъ}$, и равная $\sigma g dx dy dz$, гдѣ σ есть плотность вещества тѣла въ этомъ элементѣ.

Въ этомъ случаѣ проэкціи на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ къ тѣлу, будутъ:

$$B_x = 0,\ B_y = g\iiint \sigma dx dy dz = gM,\ B_z = 0,$$

гдѣ интегрированіе распространено на весь объемъ твердаго тѣла, а M означаетъ массу тѣла.

Проэкціи на оси координатъ главнаго момента этихъ силъ вокругъ центра инерціи будутъ равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ здѣсь $X_i = 0,\ У_i = \sigma g dx dy dz,\ Z_i = 0$, то:

$$(Л_c)_x = -g\iiint \sigma(z - z_c) dO = -g\iiint \sigma z dO + g z_c M = 0$$

$$(Л_c)_y = 0,\ (Л_c)_z = g\iiint \sigma x dO - g x_c M = 0.$$

Поэтому центръ инерціи твердаго тѣла будетъ двигаться какъ тяжелая матерьяльная точка массы M (см. стр. 81):

$$x_c = \alpha t,\ y_c = \frac{gt^2}{2} + \beta t,\ z_c = 0,$$

а тѣло будетъ вращаться вокругъ своего центра по инерціи.

Примѣръ 100-й. Всѣ элементы свободнаго твердаго тѣла притягиваются къ началу координатъ; силы притяженія пропорціональны массамъ элементовъ и ихъ разстояніямъ отъ начала координатъ.

Въ этомъ случаѣ проэкціи на оси координатъ силы, приложенной къ элементу тѣла, суть:

$$X_i = -\mu x\sigma dO,\ \ Y_i = -\mu y\sigma dO,\ \ Z_i = -\mu z\sigma dO,$$

слѣдовательно, проэкціи главнаго вектора равны:

$$B_x = -\mu\iiint\sigma x dO = -\mu M x_c,$$

$$B_y = -\mu M y_c,\ \ B_z = -\mu M z_c,$$

а проэкціи главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи равны нулю; напримѣръ:

$$(Л_c)_x = -\mu\iiint\sigma((y-y_c)z-(z-z_c)y)dO =$$

$$= \mu(y_c\iiint\sigma z dO - z_c\iiint\sigma y dO) = 0.$$

Поэтому, при дѣйствіи этихъ силъ, центръ инерціи тѣла будетъ двигаться какъ свободная матерьяльная точка массы M, притягиваемая къ началу координатъ силою: μMr, а самое тѣло вращается вокругъ этого центра по инерціи.

§ 124. Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ.

Положимъ, что къ матерьяльнымъ точкамъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, образующимъ одну неизмѣняемую систему, приложены внѣшнія силы, имѣющія потенціалы, такъ, что къ точкѣ m_1 приложена сила, имѣющая потенціалъ $V_1(x_1, y_1, z_1)$, къ точкѣ m_2 — сила, имѣющая потенціалъ $V_2(x_2, y_2, z_2)$, и т. д.; V_1 есть какая либо функція отъ абсолютныхъ координатъ точки m_1, V_2 — какая либо функція отъ координатъ точки m_2, и т. д.

Потенціалъ всей совокупности этихъ силъ выразится, какъ намъ уже извѣстно (стр. 506 (727)), суммою:

$$U=\sum_{i=1}^{i=n} V_i$$

Если выразить абсолютныя координаты точекъ системы по формуламъ (45) кинематической части (стр. 56), то U обратится въ функцію отъ шести координатныхъ параметровъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф$, $ж$, $э$, выражающихъ положеніе неизмѣняемой среды въ пространствѣ.

Зная выраженіе функціи U, мы будемъ въ состояніи получить изъ него выраженія проэкцій главнаго вектора приложенныхъ силъ на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$ и проэкціи главнаго момента ихъ на оси $X^{овъ}$ $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ и на оси Ξ, Υ, Z, потому что, какъ сейчасъ докажемъ, производныя отъ U по $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ выражаютъ величины проэкцій главнаго вектора всей совокупности силъ на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$, а производныя отъ U по $ф$, $ж$ и $э$ выражаютъ величины проэкцій главнаго момента на направленія N, (см. стр. 96 кинематической части) Z и Z.

Взявъ производную отъ U по $x_ю$ и принявъ во вниманіе, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_ю}=1$, мы легко найдемъ, что:

$$\frac{\partial U}{\partial x_ю}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_ю}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=B_x;$$

такимъ образомъ окажется:

$$B_x=\frac{\partial U}{\partial x_ю},\ B_y=\frac{\partial U}{\partial y_ю},\ B_z=\frac{\partial U}{\partial z_ю}\ \ldots\ldots \mathbf{(806)}$$

Составимъ выраженіе производной отъ U по $ф$:

$$\frac{\partial U}{\partial ф}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial ф}+\frac{\partial V_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial ф}+\frac{\partial V_i}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial ф}\right),$$

гдѣ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial ф}=\xi_i\frac{\partial \lambda_x}{\partial ф}+\eta_i\frac{\partial \mu_x}{\partial ф}+\zeta_i\frac{\partial \nu_x}{\partial ф};$$

замѣнивъ здѣсь ξ_i, η_i, ζ_i ихъ выраженіями въ разностяхъ $(x_i - x_ю)$, $(y_i - y_ю)$, $(z_i - z_ю)$, т. е. сдѣлавъ то же самое, что было дѣлаемо при преобразованіи выраженій (93) кинематической части въ выраженія (96), получимъ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial ф} = (z_i - z_ю)Q(ф) - (y_i - y_ю)R(ф),$$

гдѣ $P(ф)$, $Q(ф)$, $R(ф)$ отличаются отъ выраженій ((95) кинематической части, стр. 84) для P, Q, R тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто производныхъ отъ λ_x, λ_y, ... ν_z по t, входятъ производныя отъ тѣхъ же косинусовъ по $ф$; т. е., если въ выраженіяхъ (95) кинематической части замѣнимъ dt черезъ $dф$, то получимъ выраженія для $P(ф)$, $Q(ф)$, $R(ф)$.

Другія выраженія для $P(ф)$, $Q(ф)$ и $R(ф)$ получимъ изъ выраженій (107), (108) и (109) кинематической части, если замѣнимъ въ нихъ производную $ф'$ — единицею, а производныя $ж'$ и $э'$ — нулями; тогда получимъ:

$$P(ф) = -\sin ж,\ \ Q(ф) = \cos ж,\ \ R(ф) = 0\,.$$

Поэтому выраженіе для производной отъ U по $ф$ преобразуется въ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = -\sin ж \sum_{i=1}^{i=n}\left((y_i - y_ю)\frac{\partial V_i}{\partial z_i} - (z_i - z_ю)\frac{\partial V_i}{\partial y_i}\right) +$$

$$+ \cos ж \sum_{i=1}^{i=n}\left((z_i - z_ю)\frac{\partial V_i}{\partial x_i} - (x_i - x_ю)\frac{\partial V_i}{\partial z_i}\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = (Л_ю)_y \cos ж - (Л_ю)_x \sin ж \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \textbf{(807)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = (Л_ю)_x \cos(N, X) + (Л_ю)_y \cos(N, У),$$

т. е., эта производная выражаетъ величину проэкціи на направленіе N главнаго момента силъ вокругъ точки ($Ю$):

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = Л_ю \cos(Л_ю, N)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \textbf{(807,bis)}$$

Подобнымъ же образомъ составимъ выраженія для производныхъ отъ U по $э$ и по $ж$; мы найдемъ:

$$\frac{\partial U}{\partial э} = (Л_ю)_x P(э) + (Л_ю)_y Q(э) + (Л_ю)_z R(э),$$

гдѣ $P(э)$, $Q(э)$, $R(э)$ суть тѣ выраженія, въ которыя обратятся вторыя части формулъ (107) — (109) кинем. части, если замѣнимъ въ нихъ производную $э'$ — единицею, а производныя $ф'$ и $ж'$ — нулями, а именно:

$$P(э) = \cos ж \sin ф = \nu_x, \quad Q(э) = \sin ж \sin ф = \nu_y, \quad R(э) = \nu_z;$$

поэтому:

$$\frac{\partial U}{\partial э} = \Big((Л_ю)_x \cos ж + (Л_ю)_y \sin ж\Big) \sin ф + (Л_ю)_z \cos ф \,.\,. \quad \textbf{(808)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial э} = Л_ю \cos (Л_ю, \mathsf{Z}), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(808, bis)}$$

т. е. производная отъ U по $э$ выражаетъ проэкцію главнаго момента силъ на ось Z.

Величины $P(ж)$ и $Q(ж)$, получаемыя изъ выраженій (107) и (108) кинематической части при замѣщеніи производныхъ $ф'$ и $э'$ — нулями, а производной $ж'$ — единицею, окажутся равными нулю, а $R(ж)$ окажется равною единицѣ; поэтому:

$$\frac{\partial U}{\partial ж} = (Л_ю)_z = Л_ю \cos (Л_ю, Z), \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(809)}$$

т. е. производная отъ U по $ж$ выражаетъ проэкцію главнаго момента силъ на ось Z.

И такъ, *если вся совокупность силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ точекъ, имѣетъ потенціалъ* U (который есть функція отъ шести координатныхъ параметровъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф$, $ж$, $э$), *то проэкціи главнаго вектора на направленія осей* $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$ *выразятся частными производными отъ* U *по координатамъ* $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, *а проэкціи главнаго момента силъ вокругъ*

*точки Ю на направленія Z, **Z** и N выразятся частными производными отъ U по ж, э и ф.*

На основаніи равенствъ (807), (808), (809), Лагранжевы дифференціальныя уравненія (769) (стр. 548) вращенія твердаго тѣла получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial ф'}\right)}{dt} = \dfrac{\partial (T+U)}{\partial ф}, \quad \dfrac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial ж'}\right)}{dt} = \dfrac{\partial (T+U)}{\partial ж}, \\ \dfrac{d\left(\dfrac{\partial T}{\partial э'}\right)}{dt} = \dfrac{\partial (T+U)}{\partial э}. \end{array}\right\} \ldots (769, \text{bis})$$

Примѣръ 101-й. Твердое тѣло есть магнитъ, находящійся въ однородномъ магнитномъ полѣ; составить выраженіе потенціала магнитныхъ силъ, приложенныхъ ко всему тѣлу.

Говоря, что магнитъ находится въ однородномъ магнитномъ полѣ, мы подъ этимъ подразумѣваемъ, что магнитныя силы, приложенныя ко всѣмъ элементамъ магнита, параллельны и пропорціональны количествамъ свободнаго магнитизма элементовъ. Пусть направленія магнитныхъ силъ параллельны оси $Z^{\text{овъ}}$, а величина силы, приложенной къ единицѣ сѣвернаго магнитизма, равна k.

Проэкціи на оси $X^{\text{овъ}}$, $У^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$ силы, приложенной къ элементу объема тѣла, заключающему въ себѣ точку (x, y, z), будутъ равны:

$$X = 0, \ \ У = 0, \ \ Z = kd\mu,$$

гдѣ $d\mu$ означаетъ количество свободнаго магнитизма, заключающагося въ элементѣ (dO) тѣла; если свободный магнитизмъ элемента — сѣверный, т. е., если $d\mu$ величина положительная, то сила направлена параллельно положительной оси $Z^{\text{овъ}}$, если же свободный магнитизмъ элемента южный, то $d\mu$ есть величина отрицательная и сила направлена параллельно отрицательной оси $Z^{\text{овъ}}$.

Такъ какъ потенціалъ силы, приложенной къ элементу тѣла, равенъ $kzd\mu$, то потенціалъ всей совокупности силъ равенъ:

$$U = k \iiint z d\mu,$$

гдѣ интегрированіе распространено по всему объему магнита.

Возьмемъ за точку *Ю* центръ инерціи *C* тѣла и выразимъ *z* по формулѣ (45) кинемат. части, тогда *U* выразится такъ:

$$U = kKz_c + k\lambda_z A_\xi + k\mu_z A_\eta + k\nu_z A_\zeta,$$

гдѣ:

$$A_\xi = \iiint \xi d\mu, \quad A_\eta = \iiint \eta d\mu, \quad A_\zeta = \iiint \zeta d\mu$$

и *K* есть интегралъ, выражающій количество магнитизма во всемъ тѣлѣ; такъ какъ во всякомъ тѣлѣ столько же сѣвернаго свободнаго магнитизма, сколько и южнаго, то $K = 0$.

Величины A_ξ, A_η, A_ζ называются проэкціями магнитнаго момента магнита на оси Ξ, Υ, Z; величина:

$$A = +\sqrt{A_\xi^2 + A_\eta^2 + A_\zeta^2}$$

называется магнитнымъ моментомъ магнита, а направленіе, неизмѣнно связанное съ тѣломъ и составляющее съ осями Ξ, Υ, Z углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{A_\xi}{A}, \quad \frac{A_\eta}{A}, \quad \frac{A_\zeta}{A},$$

называется направленіемъ магнитной оси магнита.

Означая черезъ *A* направленіе магнитной оси магнита, можемъ выразить *U* такъ:

$$U = kA\cos(A, Z),$$

а если взять направленіе магнитной оси, проведенное черезъ центръ инерціи *C* твердаго тѣла, за ось Z, то потенціалъ силъ, дѣйствующихъ на магнитъ, находящійся въ однородно-магнитномъ полѣ, выразится такъ:

$$U = kA\cos\phi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(810)}$$

т. е., *U* есть функція только отъ ϕ и притомъ:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = -kA\sin\phi;$$

слѣдовательно, главный векторъ этихъ силъ равенъ нулю, а главный моментъ имѣетъ направленіе противоположное направленію *N*.

Примѣръ 102-й. Элементы твердаго однороднаго шара притягиваются къ началу координатъ силами, дѣйствующими по закону тяготѣнія. Составить выраженіе потенціала всей совокупности этихъ силъ.

Означимъ черезъ μ величину притягивающей массы, находящейся въ началѣ координатъ и черезъ ε общій множитель силъ тяготѣнія (см. (205 bis) стр. 132).

Потенціалъ притяженія, приложеннаго къ элементу объема, равенъ:

$$\varepsilon\mu \frac{\sigma}{r} dO,$$

гдѣ σ есть плотность вещества тѣла, а r — разстояніе элемента dO отъ начала координатъ.

Поэтому, потенціалъ этихъ силъ на тѣло какой либо формы, выразится интеграломъ:

$$U = \varepsilon\mu \iiint \frac{\sigma}{r} dO, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (811)$$

гдѣ интегрированіе распространено по всему объема тѣла.

Пусть притягиваемое тѣло есть шаръ однородной плотности и радіуса R.

Замѣнимъ r слѣдующимъ выраженіемъ:

$$r = +\sqrt{r^2_c - 2r_c\rho\cos\varphi + \rho^2},$$

гдѣ r_c означаетъ разстояніе центра инерціи C (онъ же центръ поверхности шара) отъ притягивающаго центра, ρ — разстояніе элемента dO отъ центра C, φ — уголъ, составляемый между собою направленіями, проведенными изъ C къ притягивающему центру и къ элементу dO. Выразимъ dO въ сферическихъ координатахъ (стр. 434), полюсъ которыхъ взятъ въ точкѣ C, а полярная ось направлена по линіи, соединяющей C съ притягивающимъ центромъ. Интегрировать придется въ слѣдующихъ предѣлахъ: по ρ отъ нуля до R, по φ отъ нуля до π, по ψ отъ нуля до 2π.

Произведемъ сначала интегрированія по ψ и по φ.

$$U = 2\pi\varepsilon\mu\sigma \int_0^R \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\varphi d\varphi d\rho}{\sqrt{r_c^2 - 2r_c\rho\cos\varphi + \rho^2}} =$$

$$= 2\pi\varepsilon\mu \frac{\sigma}{r_c} \int_0^R \rho d\rho \{(r_c + \rho) - (+\sqrt{(r_c - \rho)^2})\}.$$

Корень, соотвѣтствующій нижнему предѣлу интегрированія по φ, еще не извлеченъ; онъ долженъ выражать *положительно-взятое* разстояніе отъ притягивающаго центра той точки шара, которая имѣетъ сферическія координаты: $\varphi = 0$ и какое либо ρ; если притягивающій центръ внѣ шара, т. е., r_c болѣе R, то для всѣхъ ρ:

$$(+\sqrt{(r_c - \rho)^2}) = r_c - \rho,$$

а потому:

$$U = 4\pi\varepsilon\mu \frac{\sigma}{r_c} \int_0^R \rho^2 d\rho = \varepsilon\mu \cdot \frac{4}{3}\pi\sigma R^3 \cdot \frac{1}{r_c} = \varepsilon\mu \frac{M}{r_c} \ldots . \textbf{(812)}$$

Если бы притягивающій центръ находился внутри шара, то пришлось бы раздѣлить интегрированіе по ρ на двѣ части: отъ нуля до r_c и отъ r_c до R; для всѣхъ ρ, заключающихся между нулемъ и r_c, положительно-взятое значеніе вышеозначеннаго корня выражается разностью $(r_c - \rho)$, для всѣхъ же ρ, заключающихся между r_c и R, оно должно выразиться разностью: $(\rho - r_c)$. Поэтому, если притягивающій центръ находится внутри сферы, то U выразится такъ:

$$U = \varepsilon\mu \left\{ \frac{4}{3}\pi\sigma r_c^3 \cdot \frac{1}{r_c} + 2\pi\sigma(R^2 - r_c^2) \right\} \ldots . \textbf{(813)}$$

И такъ, потенціалъ всей совокупности притягивающихъ силъ, приложенныхъ къ однородному шару, есть функція координатъ центра инерціи шара; слѣдовательно, главный моментъ этихъ силъ вокругъ C равенъ нулю.

Если шаръ незаключаетъ въ себѣ притягивающаго центра, то, какъ слѣдуетъ изъ выраженія (812) потенціала U, главный векторъ равняется по величинѣ и по направленію силѣ притяженія, оказываемой притяги-

вающимъ центромъ на матерьяльную точку массы M, если бы она находилась въ центрѣ шара.

Если тѣло однородной плотности имѣетъ не сферическую форму, то главный моментъ (вокругъ центра инерціи) притягивающихъ силъ не будетъ равенъ нулю.

Примѣръ 103-й. Предполагая, что вещество твердаго тѣла расположено симметрично относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, пересѣкающихся въ его центрѣ инерціи, и что разстояніе r_c весьма велико сравнительно съ размѣрами тѣла, составить приближенное выраженіе потенціала U (811), пренебрегая четвертыми и высшими степенями отношеній между размѣрами тѣла и разстояніемъ r_c.

Начнемъ съ того, что разложимъ отношеніе $(r_c:r)$ въ рядъ, расположенный по возрастающимъ степенямъ отношенія $(\rho:r_c)$ и отбросимъ члены, заключающіе четвертыя и высшія степени этого отношенія.

$$\frac{r_c}{r} = \left[1 - 2\frac{\rho}{r_c}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{r_c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = (1-z)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \ldots;$$

$$\frac{r_c}{r} = 1 + \frac{\rho}{r_c}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{r_c^2}\,\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2} + \frac{\rho^3}{r_c^3}\,\frac{5\cos^3\varphi - 3\cos\varphi}{2} + \ldots.$$

Здѣсь φ есть уголъ, составляемый направленіемъ ρ (предполагая подъ этимъ направленіе, проведенное изъ C къ элементу dO) съ направленіемъ, проведеннымъ изъ C къ притягивающей точкѣ.

Возьмемъ линіи пересѣченія плоскостей симметріи твердаго тѣла за оси Ξ, Υ, Z и означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, составляемыхъ съ ними направленіемъ, проведеннымъ изъ притягивающаго центра къ центру инерціи C; тогда $\rho\cos\varphi$ выразится такъ:

$$\rho\cos\varphi = -(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\xi).$$

Это выраженіе подставимъ въ предыдущій рядъ, а самый рядъ — подъ интегралъ второй части равенства (811); при интегрированіи по всему объему тѣла обратятся въ нуль члены, заключавшіе ξ, η, ζ линейнымъ образомъ, потому что центръ инерціи есть начало координатъ ξ, η, ζ; обратятся также въ нуль всѣ члены третьей степени относительно ξ, η, ζ, потому что плоскости координатъ суть плоскости симметріи тѣла; поэтому останется:

$$U = \epsilon\varkappa\left(\frac{M}{r_c} + \frac{3I_c' - H_c}{2r_c^3}\right), \ldots\ldots\ldots (814)$$

гдѣ:

$$I_c' = \iiint \sigma\varrho^2 \cos^2\varphi dO, \quad H_c = \iiint \sigma\varrho^2 dO,$$

т. е., I'_c есть квадратичный моментъ твердаго тѣла относительно плоскости, перпендикулярной къ направленію r_c и проведенной черезъ центръ инерціи тѣла, а H_c есть полярный квадратичный моментъ вокругъ центра инерціи C; M — масса тѣла.

На основаніи формулъ (690) и (692) страницы (489):

$$I_c' = H_c - (\mathfrak{A}_c\lambda^2 + \mathfrak{B}_c\mu^2 + \mathfrak{C}_c\nu^2);\ 2H_c = \mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c + \mathfrak{C}_c,$$

поэтому, выраженію (814) можно дать слѣдующій видъ:

$$U = \varepsilon\varkappa\left(\frac{M}{r_c} + \frac{\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c + \mathfrak{C}_c - 3(\mathfrak{A}_c\lambda^2 + \mathfrak{B}_c\mu^2 + \mathfrak{C}_c\nu^2)}{2r_c^3}\right); \ldots (\mathbf{814}\ \text{bis})$$

заключающіеся здѣсь косинусы λ, μ, ν могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} r_c\lambda &= (x_c\lambda_x + y_c\lambda_y + z_c\lambda_z),\\ r_c\mu &= (x_c\mu_x + y_c\mu_y + z_c\mu_z),\\ r_c\nu &= (x_c\nu_x + y_c\nu_y + z_c\nu_z). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{815})$$

Взявъ отъ U производныя по $ф$, $ж$ и $э$, будемъ имѣть выраженія проэкцій главнаго момента силъ на направленія N, Z, Z.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда U есть функція отъ косинусовъ λ_x, μ_x, ν_x, λ_y, $\ldots \nu_z$, могутъ быть полезны нижеслѣдующія выраженія проэкцій главнаго момента силъ на оси Ξ, Υ, Z и X, $У$, Z.

Если U есть функція отъ сказанныхъ косинусовъ, то частная производная отъ нея по которой либо изъ перемѣнныхъ $ф$, $ж$, $э$ выразится такъ (напримѣръ, по $ж$):

$$\frac{\partial U}{\partial ж} = \frac{\partial U}{\partial\lambda_x}\frac{\partial\lambda_x}{\partial ж} + \frac{\partial U}{\partial\mu_x}\frac{\partial\mu_x}{\partial ж} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial\nu_z}\frac{\partial\nu_z}{\partial ж} \ldots\ldots (\mathbf{816})$$

Производныя отъ косинусовъ λ_x, μ_x, ν_x, $\ldots \nu_z$ по одной изъ перемѣнныхъ $ф$, $ж$, $э$ могутъ быть получены изъ выраженій (120) стр. 105 кинематической части; напримѣръ, чтобы получить произ-

водныя по *ж*, надо въ формулахъ (120) (119) сдѣлать *ж'* равнымъ единицѣ, а *ф'* и *э'* — равными нулю, или, что то же самое, замѣнить dt черезъ $dж$, а величины p, q, r, — величинами:

$$p(ж) = \frac{\partial p}{\partial ж'} = -\sin ф \cos э = \cos(\Xi, Z),$$

$$q(ж) = \frac{\partial q}{\partial ж'} = \sin ф \sin э = \cos(\Upsilon, Z),$$

$$r(ж) = \frac{\partial r}{\partial ж'} = \cos ф = \cos(\mathbf{Z}, Z);$$

тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$\frac{\partial \lambda_x}{\partial ж} = \frac{\partial r}{\partial ж'} \mu_x - \frac{\partial q}{\partial ж'} \nu_x, \quad \frac{\partial \mu_x}{\partial ж} = \frac{\partial p}{\partial ж'} \nu_x - \frac{\partial r}{\partial ж'} \lambda_x,$$

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial ж'} = \frac{\partial q}{\partial ж'} \lambda_x - \frac{\partial p}{\partial ж'} \mu_x$$

и подобныя выраженія для производныхъ отъ прочихъ шести косинусовъ.

Подставимъ эти выраженія въ (816) и сличимъ тогда это равенство съ равенствомъ:

$$\frac{\partial U}{\partial ж} = (Л_ю)_\xi \cos(\Xi, Z) + (Л_ю)_\eta \cos(\Upsilon, Z) + (Л_ю)_\zeta \cos(\mathbf{Z}, Z);$$

подобнымъ же образомъ составимъ надлежащія выраженія для производныхъ отъ U по *ф* и *э* и сличимъ ихъ съ равенствами:

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = (Л_ю)_\xi \cos(\Xi, N) + (Л_ю)_\eta \cos(\Upsilon, N),$$

$$\frac{\partial U}{\partial э} = (Л_ю)_\zeta;$$

по сличеніи окажется, что проэкціи на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ главнаго момента силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$(Л_ю)_\xi = \frac{\partial U}{\partial \mu_x}\nu_x + \frac{\partial U}{\partial \mu_y}\nu_y + \frac{\partial U}{\partial \mu_z}\nu_z -$$

$$- \frac{\partial U}{\partial \nu_x}\mu_x - \frac{\partial U}{\partial \nu_y}\mu_y - \frac{\partial U}{\partial \nu_z}\mu_z \ldots\ldots\ldots \textbf{(817, a)}$$

$$(Л_ю)_\eta = \frac{\partial U}{\partial \nu_x}\lambda_x + \frac{\partial U}{\partial \nu_y}\lambda_y + \frac{\partial U}{\partial \nu_z}\lambda_z -$$

$$- \frac{\partial U}{\partial \lambda_x}\nu_x - \frac{\partial U}{\partial \lambda_y}\nu_y - \frac{\partial U}{\partial \lambda_z}\nu_z \ldots\ldots\ldots \textbf{(817, b)}$$

$$(Л_ю)_\zeta = \frac{\partial U}{\partial \lambda_x}\mu_x + \frac{\partial U}{\partial \lambda_y}\mu_y + \frac{\partial U}{\partial \lambda_z}\mu_z -$$

$$- \frac{\partial U}{\partial \mu_x}\lambda_x - \frac{\partial U}{\partial \mu_y}\lambda_y - \frac{\partial U}{\partial \mu_z}\lambda_z \ldots\ldots\ldots \textbf{(817, c)}$$

Подобнымъ же образомъ получимъ слѣдующія выраженія проэкцій главнаго момента силъ на оси X, $У$, Z:

$$(Л_ю)_x = \frac{\partial U}{\partial \lambda_z}\lambda_y - \frac{\partial U}{\partial \lambda_y}\lambda_z + \frac{\partial U}{\partial \mu_z}\mu_y - \frac{\partial U}{\partial \mu_y}\mu_z +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial \nu_z}\nu_y - \frac{\partial U}{\partial \nu_y}\nu_z \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(818, a)}$$

$$(Л_ю)_y = \frac{\partial U}{\partial \lambda_x}\lambda_z - \frac{\partial U}{\partial \lambda_z}\lambda_x + \frac{\partial U}{\partial \mu_x}\mu_z - \frac{\partial U}{\partial \mu_z}\mu_x +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial \nu_x}\nu_z - \frac{\partial U}{\partial \nu_z}\nu_x \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(818, b)}$$

$$(Л_ю)_z = \frac{\partial U}{\partial \lambda_y}\lambda_x - \frac{\partial U}{\partial \lambda_x}\lambda_y + \frac{\partial U}{\partial \mu_y}\mu_x - \frac{\partial U}{\partial \mu_x}\mu_y +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial \nu_y}\nu_x - \frac{\partial U}{\partial \nu_x}\nu_y \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(818, c)}$$

По формуламъ (817) составимъ выраженія проэкцій главнаго момента на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ въ примѣрѣ 103-мъ; получимъ:

$$(Л_c)_\xi = \frac{\partial U}{\partial \mu}\nu - \frac{\partial U}{\partial \nu}\mu = \frac{3\varepsilon\varkappa}{r_c^3}(\mathfrak{C}_c\nu.\mu - \mathfrak{B}_c\mu.\nu) \ldots \textbf{(819, a)}$$

$$(Л_c)_\eta = \frac{3\varepsilon\varkappa}{r_c^3}(\mathfrak{A}_c\lambda.\nu - \mathfrak{C}_c\nu.\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(819, b)}$$

$$(Л_c)_\zeta = \frac{3\varepsilon\varkappa}{r_c^3}(\mathfrak{B}_c\mu.\lambda - \mathfrak{A}_c\lambda.\mu) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(819, c)}$$

Представимъ себѣ, что черезъ точку пересѣченія K эллипсоида инерціи тѣла съ продолженіемъ направленія OC (O — притягивающій центръ) проведена плоскость касательная къ эллипсоиду; означимъ черезъ n направленіе перпендикуляра, опущеннаго изъ C (черт. 90) на эту плоскость, черезъ ψ уголъ, составляемый направленіемъ n съ направленіемъ CK, черезъ I — моментъ инерціи тѣла вокругъ оси OCK, черезъ ξ, η, ζ координаты точки K относительно осей Ξ, Υ, Z, черезъ $\mathfrak{r}$ — длину радіуса вектора CK и черезъ D — разстояніе касательной плоскости отъ C; произведемъ слѣдующія преобразованія:

$$\mathfrak{A}_c\lambda = \sqrt{\mathfrak{A}_c^2\lambda^2 + \mathfrak{B}_c^2\mu^2 + \mathfrak{C}_c^2\nu^2}\cos(n, \Xi) =$$

$$= \sqrt{\mathfrak{A}_c^2\xi^2 + \mathfrak{B}_c^2\eta^2 + \mathfrak{C}_c^2\zeta^2}\,\frac{\cos(n, \Xi)}{\mathfrak{r}} = \cos(n, \Xi)\,\frac{м.\partial^4}{\mathfrak{r}.D} =$$

$$= \cos(n, \Xi)\,\frac{м.\partial^4}{\mathfrak{r}^2\cos\psi} = I\,\frac{\cos(n, \Xi)}{\cos\psi};$$

$$\mathfrak{B}_c\mu = I\,\frac{\cos(n, \Upsilon)}{\cos\psi}, \quad \mathfrak{C}_c\nu = I\,\frac{\cos(n, Z)}{\cos\psi},$$

тогда выраженіямъ (819) можно будетъ дать слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} (Л_c)_\xi &= \frac{3\varepsilon\varkappa I}{r_c^3\cos\psi}\Big(\mu\cos(n, Z) - \nu\cos(n, \Upsilon)\Big), \\ (Л_c)_\eta &= \frac{3\varepsilon\varkappa I}{r_c^3\cos\psi}\Big(\nu\cos(n, \Xi) - \lambda\cos(n, Z)\Big), \\ (Л_c)_\zeta &= \frac{3\varepsilon\varkappa I}{r_c^3\cos\psi}\Big(\lambda\cos(n, \Upsilon) - \mu\cos(n, \Xi)\Big). \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(819, bis)}$$

Отсюда видно:

что главный моментъ $Л_c$ имѣетъ направленіе, перпендикулярное къ CK и къ n,

что, ставъ ногами въ C, головою по направленію n, и смотря на точку K, будемъ имѣть направленіе $Л_c$ по лѣвую руку,

что величина $Л_c$ равна:

$$Л_c = \frac{3\varepsilon\varkappa}{r_c^3}I\,\mathrm{tg}\,\psi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(820)}$$

т. е. величина главнаго момента притяженій обратно пропорціональна третьей степени разстоянія r_c, прямо пропорціональна моменту инерціи тѣла вокругъ линіи OC и прямо пропорціональна тангенсу

угла ψ; слѣдовательно, когда линія OC совпадаетъ съ одною изъ главныхъ осей инерціи тѣла, тогда $Л_c$ равенъ нулю.

Если $\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c$ то $(Л_c)_\zeta = 0$ (819, c); т. е., если тѣло есть тѣло вращенія вокругъ оси $\mathbf{Z}$, то главный моментъ перпендикуляренъ къ этой оси.

Примѣръ 104-й. Приближенное выраженіе потенціала силъ тяготѣнія, дѣйствующихъ между двумя такими тѣлами, какъ въ примѣрѣ 103-мъ; предполагается, что можно пренебречь вторыми и высшими степенями отношеній: $(l_1 l_2 : R^2)$, $(l_1^2 : R^2)$, $(l_2^2 : R^2)$, гдѣ l_1 и l_2 суть наибольшіе размѣры того и другаго тѣла, а R — разстояніе между ихъ центрами инерціи.

Пренебрегая этими величинами, легко найдемъ слѣдующее выраженіе для U:

$$U = \frac{M_1 M_2}{R} + M_2 \frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 - 3I_1}{2R^3} + M_1 \frac{\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 - 3I_2}{2R^3}, \ldots (821)$$

гдѣ M_1, M_2 суть массы тѣлъ; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ — главные моменты инерціи перваго тѣла, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ — втораго, I_1 и I_2 — моменты инерціи тѣлъ вокругъ прямой, проведенной черезъ центры инерціи.

§ 125. Элементарная работа всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Движеніе, совершаемое твердымъ тѣломъ въ теченіи безконечномалаго времени dt, можетъ быть разложено на вращательное движеніе вокругъ какого либо полюса $Ю$ и на поступательное движеніе, общее съ этимъ полюсомъ (кинемат. часть, стр. (79 и 127).

Проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$ перемѣщенія, совершаемаго какою либо точкою твердаго тѣла, могутъ быть выражены такъ:

$$\left.\begin{aligned} dx &= dx_ю + (z - z_ю)\,Qdt - (y - y_ю)\,Rdt \\ dy &= dy_ю + (x - x_ю)\,Rdt - (z - z_ю)\,Pdt \\ dz &= dz_ю + (y - y_ю)\,Pdt - (x - x_ю)\,Qdt \end{aligned}\right\} \ldots (822)$$

Поэтому, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу:

$$\sum\Big(Xdx + Ydy + Zdz\Big)$$

можетъ быть представлена подъ слѣдующимъ видомъ:

$$B_x dx_{ю} + B_y dy_{ю} + B_z dz_{ю} + (Л_{ю})_x P dt + (Л_{ю})_y Q dt + (Л_{ю})_z R dt =$$
$$= B ds_{ю} \cos(B, ds_{ю}) + Л_{ю} \cos(Л_{ю}, \Omega) \Omega dt,$$

гдѣ $ds_{ю}$ выражаетъ величину и направленіе перемѣщенія точки $Ю$, принадлежащей твердому тѣлу.

Если бы твердое тѣло совершало поступательное движеніе и притомъ то самое, какое совершаетъ точка $Ю$, то работа всѣхъ задаваемыхъ силъ равнялась бы:

$$B ds_{ю} \cos(B, ds_{ю}), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(823)}$$

а если бы твердое тѣло совершало вращательное движеніе вокругъ неподвижной точки $Ю$ съ тою же угловою скоростью, какую оно имѣетъ въ полномъ движеніи, то работа всѣхъ задаваемыхъ силъ равнялась бы:

$$Л_{ю} \cos(Л_{ю}, \Omega) \Omega dt \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(824)}$$

Въ полномъ движеніи тѣла элементарная работа задаваемыхъ силъ равна суммѣ работъ (823) и (824); поэтому можно сказать, что *сумма элементарныхъ работъ всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть разложена на двѣ части: на работу* (823), *совершаемую ими въ поступательномъ движеніи тѣла, общемъ съ движеніемъ полюса Ю, и на работу* (824), *совершаемую ими во вращательномъ движеніи тѣла вокругъ этого полюса.*

Такъ какъ разложенія одного и того же движенія тѣла на части поступательную и вращательную многообразны до безконечности, то столь же многообразны и разложенія на двѣ части элементарной работы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Во всякомъ случаѣ, элементарная работа силъ въ поступательной части перемѣщенія твердаго тѣла равняется произведенію изъ перемѣщенія полюса на величину проэкціи главнаго вектора силъ на направленіе этого перемѣщенія.

Элементарная же работа силъ во вращательной части перемѣщенія твердаго тѣла равняется произведенію изъ *угловаго перемѣщенія* Ωdt на величину проэкціи главнаго момента силъ (вокругъ полюса) на направленіе мгновенной оси.

Вращательная часть суммы элементарныхъ работъ можетъ быть представлена въ видѣ помноженной на dt суммы опредѣлителей

$$dt\Sigma \begin{vmatrix} P, & Q, & R \\ x-x_ю, & y-y_ю, & z-z_ю \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix}; \ldots\ldots (825)$$

каждый изъ этихъ опредѣлителей можно разсматривать, какъ выраженіе величины объема параллелопипеда, построеннаго на слѣдующихъ ребрахъ, проведенныхъ изъ точки $Ю$: одно ребро есть длина, изображающая угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$, другое — сила $\boldsymbol{F}$, приложенная къ точкѣ (x, y, z) твердаго тѣла, третье — радіусъ векторъ, проведенный къ этой точкѣ изъ точки $Ю$.

Вращательную часть суммы элементарныхъ работъ можно еще представить въ видѣ слѣдующаго тричлена:

$$(Л_ю)_\xi p dt + (Л_ю)_\eta q dt + (Л_ю)_\zeta r dt. \ldots\ldots\ldots (826)$$

Точно такъ же можетъ быть разложена на двѣ части сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ твердаго тѣла; этимъ разложеніемъ мы уже пользовались въ § 119-мъ и оно выражено было формулою (763):

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \sum_{i=1}^{i=n} F_i\varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) =$$

$$= B\varepsilon_ю \cos(B, \varepsilon_ю) + Л_ю\theta \cos(Л_ю, \theta); \ldots\ldots (763)$$

т. е. *работа, совершаемая при всякомъ ничтожно-маломъ возможномъ перемѣщеніи твердаго тѣла задаваемыми силами,*

приложенными къ нему, можетъ быть разложена на двѣ части:

1) *на работу*

$$B\varepsilon_ю \cos(B,\varepsilon_ю) = \delta x_ю \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \delta y_ю \sum_{i=1}^{i=n} У_i + \delta z_ю \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \quad (827)$$

совершаемую ими въ поступательной части перемѣщенія и

2) *на работу*

$$Л_ю\theta \cos(Л_ю,\theta) = (Л_ю)_x\theta_x + (Л_ю)_y\theta_y + (Л_ю)\theta_z =$$

$$= (Л_ю)_\xi\theta_\xi + (Л_ю)_\eta\theta_\eta + (Л_ю)_\zeta\theta_\zeta, \quad \ldots\ldots (828)$$

совершаемую ими во вращательной части перемѣщенія тѣла.

Если вся совокупность задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, имѣетъ потенціалъ U, который выраженъ въ видѣ функціи отъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф$, $ж$ и $э$, или отъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, λ_x, μ_x, ν_x, λ_y, μ_y, ν_y, λ_z, μ_z ν_z, то элементарная работа силъ на поступательной части возможнаго перемѣщенія тѣла можетъ быть выражена такъ:

$$B\varepsilon_ю \cos(B,\varepsilon_ю) = \frac{\partial U}{\partial x_ю}\delta x_ю + \frac{\partial U}{\partial y_ю}\delta y_ю + \frac{\partial U}{\partial z_ю}\delta z_ю, \ldots (829)$$

потому что частныя производныя отъ U по $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ выражаютъ проэкціи главнаго вектора B на оси $X^{овъ}$, $У^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ (см. (806) стр. 575).

Вторая часть равенства (829) выражаетъ приращеніе, получаемое функціею U при поступательномъ перемѣщеніи всего твердаго тѣла на длину $\varepsilon_ю$; поэтому проэкція главнаго вектора B на направленіе $\varepsilon_ю$ выражается отношеніемъ приращенія, получаемаго потенціальною функціею U при поступательномъ перемѣщеніи тѣла на безконечно-малую длину $\varepsilon_ю$ или $\delta s_ю$ по этому направленію, къ величинѣ этого перемѣщенія; обыкновенно это отношеніе выражаютъ символически въ видѣ производной $\frac{dU}{ds_ю}$; такъ что:

$$B\cos(B,\varepsilon_ю) = \frac{dU}{ds_ю}, \ldots\ldots\ldots (829, \text{bis})$$

гдѣ вторая часть есть символъ, имѣющій слѣдующее значеніе:

$$\frac{dU}{ds_ю} = \frac{\partial U}{\partial x_ю}\cos(\varepsilon_ю, X) + \frac{\partial U}{\partial y_ю}\cos(\varepsilon_ю, У) + \frac{\partial U}{\partial z_ю}\cos(\varepsilon_ю, Z). \quad (830)$$

Пусть $\delta_\theta U$ есть приращеніе, получаемое функціею U при вращеніи твердаго тѣла на ничтожно-малый уголъ θ вокругъ какой либо оси A, проходящей черезъ точку $Ю$. Элементарная работа, совершаемая при этомъ вращеніи всѣми силами, имѣющими потенціалъ U, выразится съ одной стороны приращеніемъ $\delta_\theta U$, съ другой стороны произведеніемъ $Л_ю\theta\cos(Л_ю,A)$, а потому проэкція главнаго момента $Л_ю$ на направленіе A можетъ быть выражена въ видѣ отношенія $(\delta_\theta U:\theta)$; это отношеніе тоже изображаютъ символически подъ видомъ производной $\frac{dU}{dэ_A}$, замѣняя $\delta_\theta U$ черезъ dU, а θ — черезъ $dэ_A$; такъ что:

$$Л_ю\cos(Л_ю,A)=\frac{dU}{dэ_A}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(831)$$

Напримѣръ, проэкціи главнаго момента на оси $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, Ξ, Υ выразятся символически въ видѣ производныхъ:

$$(Л_ю)_x=\frac{dU}{dэ_x},\ (Л_ю)_y=\frac{dU}{dэ_y},\ (Л_ю)_\xi=\frac{dU}{dэ_\xi},\ (Л_ю)_\eta=\frac{dU}{dэ_\eta},$$

значенія этихъ символовъ выражаются формулами (818, a), (818, b) (817, a), (817, b), приведенными выше.

Въ примѣненіи же къ проэкціямъ главнаго момента на оси $Z^{овъ}$, $\mathbf{Z}$, и N эти символическія производныя получаютъ буквальный смыслъ, потому что углы $э_z$, $э_\zeta$ и $э_n$ входятъ явнымъ образомъ въ выраженіе U; а именно: $э_z$ есть уголъ $ж$, $э_\zeta$ — уголъ $э$ и $э_n$ — уголъ $ф$. Поэтому то:

$$(Л_ю)_z=\frac{\partial U}{\partial ж},\ (Л_ю)_\zeta=\frac{\partial U}{\partial э},\ Л_ю\cos(Л_ю,N)=\frac{\partial U}{\partial ф},$$

какъ было доказано въ § 124-мъ.

§ 126. Движеніе свободнаго твердаго тѣла, къ которому приложены силы, имѣющія потенціалъ, выражаемый формулою (810); центральный эллипсоидъ инерціи тѣла есть эллипсоидъ вращенія вокругъ оси Z.

Въ этомъ случаѣ центръ инерціи тѣла находится въ покоѣ, или движется прямолинейно и равномѣрно.

Составимъ дифференціальныя уравненія вращательнаго движенія вида (769, bis) (стр. 578) для настоящаго случая. Такъ какъ мы

предполагаемъ, что $\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c$, то живая сила вращательнаго движенія выразится такъ:

$$T = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c(p^2 + q^2) + \mathfrak{C}_c r^2) = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c((ж')^2 \sin^2 ф + (ф')^2) + \mathfrak{C}_c r^2),$$

притомъ

$$U = Ak \cos ф,$$

поэтому въ настоящемъ случаѣ:

$$\frac{\partial T}{\partial ф'} = \mathfrak{A}_c ф', \quad \frac{\partial T}{\partial ж'} = \mathfrak{A}_c(p\lambda_z + q\mu_z) + \mathfrak{C}_c r\nu_z, \quad \frac{\partial T}{\partial э'} = \mathfrak{C}_c r,$$

$$\frac{\partial T}{\partial ф} = \mathfrak{A}_c(ж')^2 \sin ф \cos ф - \mathfrak{C}_c r ж' \sin ф, \quad \frac{\partial T}{\partial ж} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial э} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial ф} = -Ak \sin ф, \quad \frac{\partial U}{\partial ж} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial э} = 0;$$

слѣдовательно, дифференціальныя уравненія вращенія тѣла суть:

$$\mathfrak{A}_c ф'' = \mathfrak{A}_c(ж')^2 \sin ф \cos ф - \mathfrak{C}_c r ж' \sin ф - Ak \sin ф,$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ж'}\right)}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{C}_c r}{dt} = 0.$$

Послѣднія два уравненія даютъ слѣдующіе интегралы:

$$\mathfrak{A}_c p\lambda_z + \mathfrak{A}_c q\mu_z + \mathfrak{C}_c r\nu_z = C_1 \quad \text{(832)}$$

$$r = \omega \quad \text{(833)}$$

Первый изъ этихъ интеграловъ выражаетъ, что проэкція на ось $Z^{овъ}$ главнаго момента количествъ движенія вращающагося тѣла сохраняетъ постоянную величину; второй интегралъ выражаетъ, что проэкція угловой скорости на ось Z сохраняетъ постоянную величину ω.

Кромѣ того, такъ какъ скорость центра инерціи тѣла сохраняетъ постоянную величину, то законъ живой силы дастъ слѣдующій интегралъ:

$$\mathfrak{A}_c(ж')^2 \sin^2 ф + \mathfrak{A}_c(ф')^2 + \mathfrak{C}_c r^2 = 2h_1 + 2Ak \cos ф. \quad \text{(834)}$$

Три полученные интеграла (832), (833) и (834) подлежатъ дальнѣйшему интегрированію.

Замѣнивъ въ интегралѣ (832) величины p и q выраженіями (768) стр. 548, а косинусы λ_z, μ_z, ν_z — выраженіями (49), (52), (55) кинематической части, получимъ:

$$\mathfrak{A}_c ж' \sin^2 ф = C_1 - \mathfrak{C}_c \omega \cos ф; \ldots\ldots \quad \textbf{(832, bis)}$$

а исключивъ отсюда и изъ интеграла (834) величину $ж'$, получимъ уравненіе:

$$(ф' \sin ф)^2 = \frac{2Ak}{\mathfrak{A}_c} S, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(835)}$$

гдѣ S есть многочленъ третьей степени отъ $\cos ф$:

$$S = \left(\frac{2h_1 - \mathfrak{C}_c \omega^2}{2Ak} + \cos ф\right) \sin^2 ф - \frac{(C_1 - \mathfrak{C}_c \omega \cos ф)^2}{2\mathfrak{A}_c Ak} \ldots \quad \textbf{(836)}$$

Если въ какой либо моментъ времени проэкція угловой скорости на ось симметріи (**Z**) тѣла равна нулю, то это же самое будетъ и во все время движенія; въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (832,bis) и (836) получаютъ слѣдующій, болѣе простой, видъ:

$$\sin^2 ф \cdot \frac{dж}{dt} = \frac{C_1}{\mathfrak{A}_c}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(832,B)}$$

$$(ф' \cdot \sin ф)^2 = \frac{2Ak}{\mathfrak{A}_c} S_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(835,B)}$$

$$S_1 = \left(\frac{h_1}{Ak} + \cos ф\right) (1 - \cos^2 ф) - \frac{C_1^2}{2\mathfrak{A}_c Ak}.$$

Эти уравненія вполнѣ сходны съ дифференціальными уравненіями (333) и (335), опредѣляющими движеніе математическаго маятника при дѣйствіи силы тяжести (примѣръ 27-й, стр. 206—216); разница состоитъ лишь въ томъ, что на мѣстѣ величинъ:

$$\varphi, \ \psi, \ \frac{g}{R}, \ \frac{C}{R^2}, \ \frac{h}{R^2},$$

заключавшихся въ уравненіяхъ (333) и (335), въ новыхъ уравненіяхъ (832, B), (835, B) стоятъ величины:

$$ф, \ ж, \ \frac{Ak}{\mathfrak{A}_c}, \ \frac{C_1}{\mathfrak{A}_c}, \ \frac{h_1}{\mathfrak{A}_c}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что *при* $\omega = 0$ *вращеніе оси* Z *тѣла вокругъ центра инерціи совершается такъ, какъ совершается движеніе математическаго маятника длины:*

$$R = \frac{\mathfrak{A}_c g}{Ak} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (837)$$

подъ вліяніемъ силы тяжести.

Поэтому, если начальныя угловыя скорости $ж'_0$, $э'_0$ и начальный уголъ ϕ_0 таковы, что:

$$ж'_0 \cos \phi_0 + э'_0 = 0,$$

то вращательное движеніе оси Z совершается по законамъ, выражаемымъ слѣдующими формулами:

$$\cos \phi = \cos \beta - (\cos \beta - \cos \alpha) \sin^2 am(u, \varkappa) \dots\dots\dots (838)$$

$$ж - ж_0 = \pm \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \beta}} \left[\frac{1}{(1 + \cos \beta)} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{1 + n_1 \sin^2 am u} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - \cos \beta} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{1 + n_2 \sin^2 am u} \right], \dots\dots\dots\dots (839)$$

гдѣ $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ суть корни уравненія $S_1 = 0$,

$$\varkappa^2 = \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{1 + 2\cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \beta}, \quad u = u_0 + t \sqrt{\frac{Ak}{\mathfrak{A}_c}} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2\varkappa^2}},$$

$$u_0 = \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \eta}}, \quad \sin^2 \eta_0 = \frac{\cos \beta - \cos \phi_0}{\cos \beta - \cos \alpha},$$

$$n_1 = - \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{1 + \cos \beta}, \quad n_2 = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{1 - \cos \beta}.$$

Вращеніе твердаго тѣла вокругъ оси Z совершается при этомъ по слѣдующему закону:

$$э = э_0 - \int_0^t ж' \cos \phi dt \dots\dots\dots\dots (840)$$

Если же ω не равно нулю, то вращеніе оси **Z** вокругъ центра инерціи совершается иначе, чѣмъ движеніе математическаго маятника.

Каковы бы ни были начальныя обстоятельства вращенія тѣла, т. е. величины ф_0, ж_0, э_0, $\text{ф}'_0$, $\text{ж}'_0$, $\text{э}'_0$, мы опредѣлимъ постоянныя ω, C_1 и h_1 по формуламъ:

$$\omega = \text{ж}'_0 \cos \text{ф}_0 + \text{э}'_0, \quad C_1 = \mathfrak{A}_c \text{ж}'_0 \sin^2 \text{ф}_0 + \mathfrak{C}_c \omega \cos \text{ф}_0$$

$$h_1 = \frac{\mathfrak{A}_c}{2}\left[(\text{ж}'_0)^2 \sin^2 \text{ф}_0 + (\text{ф}'_0)^2\right] + \frac{\mathfrak{C}_c}{2}\omega^2 - Ak \cos \text{ф}_0.$$

Постоянныя h_1 и C_1 мы замѣнимъ двумя другими величинами, причемъ нѣсколько измѣнимъ видъ дифференціальныхъ уравненій (832 bis) и (834).

Отложимъ отъ центра инерціи тѣла по оси **Z** длину $R = \overline{С\text{Ц}}$ (черт. 91), выражаемую отношеніемъ (837); проэкція этой длины на ось $Z^{овъ}$ равна $R \cos \text{ф}$; скорость v точки Ц и проэкція этой скорости на плоскость XY выразятся такъ:

$$v = R\sqrt{(\text{ж}')^2 \sin^2 \text{ф} + (\text{ф}')^2}, \quad v \sin(v, Z) = R\text{ж}' \sin \text{ф}.$$

Если въ дифференціальномъ уравненіи (834) замѣнить $\mathfrak{A}_c$ отношеніемъ $(AkR : g)$, то это уравненіе можно будетъ представить такъ:

$$\frac{v^2}{2g} - R \cos \text{ф} = \frac{h_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c \omega^2}{Ak} R = -b, \quad \text{(834, A)}$$

гдѣ b есть длина, имѣющая то же самое значеніе, какое имѣетъ длина, означенная тѣмъ же знакомъ въ примѣрѣ 33-мъ (стр. 235); а именно $z = b$ есть уровень той плоскости, до которой достигла бы свободная точка, брошенная параллельно отрицательной оси $Z^{овъ}$, если бы она была подвержена силѣ тяжести по направленію положительной оси $Z^{овъ}$ и была бы брошена изъ уровня плоскости $z_0 = R \cos \text{ф}_0$ съ начальною скоростью v_0; пусть B_1BB_2 (черт. 91) есть линія пересѣченія плоскости ZZ съ плоскостью $z = b$.

Въ другомъ дифференціальномъ уравненіи: (832, bis) также замѣнимъ $\mathfrak{A}_c$ вышесказаннымъ отношеніемъ и, кромѣ того, представимъ C_1 подъ видомъ:

$$C_1 = \mathfrak{C}_c \omega \frac{D}{R},$$

(гдѣ D есть нѣкоторая длина), тогда этому уравненію можно будетъ дать слѣдующій видъ:

$$R\text{ж}'\sin\phi = v\sin(v,Z) = \frac{\mathfrak{C}_c\omega g}{Ak}\frac{(D - R\cos\phi)}{R\sin\phi} \ldots\ldots \quad \mathbf{(832, A)}$$

Такимъ образомъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (832, bis) и (834), вмѣсто прежнихъ постоянныхъ C_1 и h_1, введены новыя постоянныя b и D.

Возьмемъ точку C (центръ инерціи) за начало координатныхъ осей CX', $CУ'$, CZ' параллельныхъ неподвижнымъ осямъ координатъ; пусть $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ суть координаты относительно этихъ осей.

Кромѣ плоскости $\mathfrak{z} = b$, проведемъ еще другую плоскость: $\mathfrak{z} = D$; пусть D_1DD_2 (черт. 91) есть пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью осей $Z\mathbf{Z}$; проведемъ черезъ точку $Ц$ прямую $HGЦE$ параллельную оси CZ. Очевидно, что $HЦ$ будетъ координатою $\mathfrak{z}$ точки $Ц$, а если плоскость $Z\mathbf{Z}$ (плоскость чертежа) будетъ случайно совпадать съ плоскостью $Z'CX'$, то CH будетъ координатою $\mathfrak{x}$ точки $Ц$.

Такъ какъ:

$$R\cos\phi = \mathfrak{z} = \overline{HЦ},\ \ R\sin\phi = \overline{CH} = \overline{DE} = \mathfrak{r},$$

$$D - R\cos\phi = D - \mathfrak{z} = \overline{EЦ};\ \ R\cos\phi - b = \mathfrak{z} - b = \overline{GЦ},$$

то уравненія (834, A) и (832, A) выразятся такъ:

$$v^2 = 2g(\mathfrak{z} - b) = 2g\overline{GЦ} \ldots\ \ldots \quad \mathbf{(834, A)}$$

$$v\sin(v,Z) = \frac{\mathfrak{C}_c\omega g}{Ak}\frac{D - \mathfrak{z}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{C}_c\omega g}{Ak}\frac{\overline{EЦ}}{\overline{DE}} = \frac{\mathfrak{C}_c\omega g}{Ak}\operatorname{tg}(EDЦ) \ldots \quad \mathbf{(832, A)}$$

Первое изъ этихъ уравненій выражаетъ, что квадратъ скорости точки $Ц$ пропорціоналенъ высотѣ этой точки надъ плоскостью B_1BB_2; второе — что проэкція скорости этой точки на плоскость $X'У'$ пропорціональна тангенсу угла $EDЦ$; притомъ слѣдуетъ замѣтить, что такъ какъ $v\sin(v,Z) = R\text{ж}'\sin\phi$, то $\text{ж}'$ имѣетъ положительное значеніе, если точка $Ц$ ниже плоскости D_1DD_2 и отрицательное значеніе въ противоположномъ случаѣ, т. е., въ первомъ случаѣ *прецессія* положительная (см. кинем. часть стр. 97), во второмъ — отрицательная.

Когда введемъ въ многочленъ S (836) длины D и b вмѣсто C_1 и h_1, то онъ получитъ слѣдующій видъ:

$$S = \frac{1}{R^3}\left[(\mathfrak{z} - b)(R^2 - \mathfrak{z}^2) - F(D - \mathfrak{z})^2\right] \ldots \textbf{(836, A)}$$

$$F = \frac{\mathfrak{C}_c{}^2\omega^2 R}{2\mathfrak{A}_c A k} = \frac{\mathfrak{C}_c{}^2}{\mathfrak{A}_c{}^2}\cdot\frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Въ силу уравненія:

$$R^2(\phi')^2\sin^2\phi = \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2 = \frac{2Ak}{\mathfrak{A}_c}R^2 S = 2gRS \ldots\ldots \textbf{(835, A)}$$

координата $\mathfrak{z}$ точки $Ц$ можетъ получать при движеніи тѣла только тѣ значенія, которыя дѣлаютъ выраженіе:

$$SR^3 = -\mathfrak{z}^3 + (b - F)\mathfrak{z}^2 + (R^2 + 2FD)\mathfrak{z} - (bR^2 + FD^2)$$

положительнымъ; изъ того же уравненія видно, что въ начальный моментъ времени это выраженіе имѣетъ положительное значеніе:

$$\frac{R^4}{2g}(\phi_0')^2\sin^2\phi_0 = \frac{R^2}{2g}(\mathfrak{z}_0')^2.$$

Принимая въ соображеніе знаки величинъ, въ которыя обращается SR^3 при нижеслѣдующихъ значеніяхъ $\mathfrak{z}$:

Значенія $\mathfrak{z}$:	$-\infty$,	$-R$,	$\mathfrak{z}_0$,	$+R$,	$+\infty$,
Значенія R^3S:	$+\infty$,	$-F(D+R)^2$,	$\frac{R^2}{2g}(\mathfrak{z}_0')^2$,	$-F(D-R)^2$,	$-\infty$,

мы заключимъ, что SR^3 имѣетъ три дѣйствительные корня: одинъ ($\mathfrak{z}_3$) между $(-\infty)$ и $(-R)$, другой ($\mathfrak{z}_2$) между $(-R)$ и $\mathfrak{z}_0$ и третій ($\mathfrak{z}_1$) между $\mathfrak{z}_0$ и R.

Всѣ значенія $\mathfrak{z}$, заключающіяся въ предѣлахъ отъ $\mathfrak{z}_2$ до $\mathfrak{z}_1$, дѣлаютъ выраженіе SR^3 положительнымъ или равнымъ нулю, а потому это суть всѣ тѣ значенія, которыя можетъ получить произведеніе $R\cos\phi$ во время движенія тѣла при данныхъ начальныхъ обстоятельствахъ. Вслѣдствіе этого, подобно какъ на страницѣ 208-й, сдѣлаемъ такую подстановку:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1\cos^2\eta + \mathfrak{z}_2\sin^2\eta, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(841)}$$

помощью которой дифференціальныя уравненія (835, A) и (832, A) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\eta}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\eta}} = dt\sqrt{\frac{Ak}{\mathfrak{A}_c}}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}}{\varkappa\sqrt{2R}} \ldots\ldots\ldots \textbf{(835,C)}$$

$$\frac{dж}{dt} = \frac{\mathfrak{C}_c\omega}{2\mathfrak{A}_c}\left[\frac{R + D}{R + \mathfrak{z}} + \frac{D - R}{R - \mathfrak{z}}\right] \ldots\ldots\ldots \textbf{(832, C)}$$

Величина $\varkappa^2$ выражается отношеніемъ:

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_3},$$

которое во всякомъ случаѣ менѣе единицы, такъ какъ $\mathfrak{z}_2 > \mathfrak{z}_3$.

По сходству этихъ дифференціальныхъ уравненій съ дифференціальными уравненіями (342) стр. 209 и (355) стр. 213 коническаго маятника, мы можемъ заключить, что уголъ ϕ измѣняется періодически въ предѣлахъ:

$$\arccos\left(\frac{\mathfrak{z}_1}{R}\right) \text{ и } \arccos\left(\frac{\mathfrak{z}_2}{R}\right)$$

и что измѣненіе этого угла (или *нутація* оси CZ) совершается по законамъ простаго коническаго маятника, причемъ продолжительность размаха (т. е., перехода отъ верхняго предѣла къ нижнему, или обратно) равна:

$$T = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_c}{Ak}} \cdot \frac{\varkappa\sqrt{2R}}{\sqrt{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \eta}} \quad \ldots\ldots\ldots (842)$$

Движеніе же прецессіональное, т. е., законъ измѣненія угла ж, можетъ весьма разниться отъ закона измѣненія этого угла въ математическомъ маятникѣ; въ самомъ дѣлѣ при движеніи послѣдняго знакъ прецессіи не измѣняется, между тѣмъ, какъ въ разсматриваемыхъ нами движеніяхъ твердаго тѣла могутъ быть случаи, въ которыхъ прецессія переходитъ періодически изъ положительной въ отрицательную и обратно. Это будетъ происходить навѣрно въ тѣхъ случаяхъ, когда $D^2 < R^2$ и $(D - b) > 0$; дѣйствительно, въ этихъ случаяхъ многочленъ SR^3 при $\mathfrak{z} = D$ получаетъ положительное значеніе: $(D - b)(R^2 - D^2)$, а это значитъ, что плоскость $\mathfrak{z} = D$ находится между плоскостями $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_2$ и что слѣдовательно, при каждомъ переходѣ точки Ц отъ верхняго предѣла къ нижнему и при каждомъ обратномъ переходѣ она должна будетъ проходить черезъ уровень $\mathfrak{z} = D$; а на этомъ уровнѣ, какъ мы уже знаемъ, прецессія мѣняетъ знакъ.

Вообще движеніе оси CZ можетъ быть весьма разнообразно и это разнообразіе обусловливается большимъ разнообразіемъ тѣхъ значеній, которыя могутъ имѣть величины b, D и F.

Длины b и D опредѣляются по начальнымъ обстоятельствамъ движенія помощію формулъ:

$$b = R \cos \text{ф}_0 - \frac{v_0^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (843)$$

$$D = R\left(\frac{\mathfrak{A}_c}{\mathfrak{C}_c} \frac{\sin^2 \text{ф}_0}{\cos \text{ф}_0 + \frac{\text{э}'_0}{\text{ж}'_0}} + \cos \text{ф}_0\right); \ldots (844)$$

разность между ними равна:

$$D - b = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{R\mathfrak{A}_c \text{ж}'_0}{\mathfrak{C}_c \omega} \sin^2 \text{ф}_0 \ldots\ldots\ldots (845)$$

Изъ формулы (843) видно, что b не можетъ быть болѣе $R \cos \text{ф}_0$, то есть, что уровень $B_1\, BB_2$ не можетъ быть выше того уровня, въ которомъ находится точка $Ц$ въ начальный моментъ.

Длина D, какъ видно изъ формулы (844), опредѣляется величиною угла ф_0 и величиною отношенія $(\text{э}'_0 : \text{ж}'_0)$.

Когда извѣстны b, D и F, то можно опредѣлить корни $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$ уравненія $SR^2 = 0$.

Между прочимъ можно замѣтить, что эти корни суть координаты точекъ пересѣченія кривой:

$$\mathfrak{z} - b - F\frac{(D-\mathfrak{z})^2}{\mathfrak{r}^2} = 0 \ldots\ldots\ldots (846)$$

съ кругомъ радіуса R, имѣющимъ центръ въ точкѣ C; это можно заключить изъ дифференціальнаго уравненія (835, А), если представить его подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{R^2}{2g}(\text{ф}'_0)^2 = \mathfrak{z} - b - F\frac{(D-\mathfrak{z})^2}{R^2 - \mathfrak{z}^2}.$$

Кривая (846) представляетъ три разновидности, смотря по знаку разности $(D - b)$; во всякомъ случаѣ кривая находится только въ той части плоскости $(\mathfrak{z}\mathfrak{x})$, гдѣ $\mathfrak{z} > b$ и не переходитъ въ ту часть ея, гдѣ $\mathfrak{z} < b$.

1) Если $(D - b) > 0$, то кривая состоитъ изъ двухъ безконечно длинныхъ вѣтвей, пересѣкающихся въ точкѣ $\mathfrak{z} = D$, $\mathfrak{x} = 0$ и взаимно симметричныхъ относительно оси CZ; со сторонъ a_1 и a_2 (черт. 91) обѣ вѣтви удаляются въ безконечность, приближаясь ассимптотически къ прямой $\mathfrak{z} = b$, съ другихъ же сторонъ c_1 и c_2 онѣ удаляются въ безконечность ($\mathfrak{z} = \infty$, $\mathfrak{x} = \pm\infty$) подобно параболѣ; первая часть равенства (846) имѣетъ положительныя значенія внутри областей $c_2 D a_2$ и $c_1 D a_1$.

2) Если $D = b$, то кривая обращается въ соединеніе прямой линіи $\mathfrak{z} = b$ съ параболою $\mathfrak{x}^2 = F(\mathfrak{z} - b)$ (см. черт. 95-й, гдѣ парабола изображена линіею $c_1 D c_2$); первая часть уравненія (846) имѣетъ положительныя значенія внутри областей $c_2 D D_2$ и $c_1 D D_1$.

3) Если $(D - b) < 0$, то кривая распадается на двѣ непересѣкающіяся и непересѣкающія оси CZ вѣтви $c_2 n_2 a_2$ и $c_1 n_1 a_1$ (черт. 96); каждая изъ нихъ подходитъ къ оси CZ на ближайшее разстояніе при $\mathfrak{z} = 2b - D$ (въ n_1 и n_2) и имѣетъ по одной точкѣ перегиба при $\mathfrak{z} = (4b - 3D)$; первая часть уравненія (846) имѣетъ положительныя значенія въ частяхъ плоскости A_2 и A_1 (см. черт. 96).

Если пожелаемъ составить себѣ нѣкоторое понятіе о различныхъ видахъ движеній, которыя можетъ совершать точка $Ц$ вращающагося тѣла, то должны будемъ обратить вниманіе не только на знакъ разности $(D - b)$, но также и на знакъ разности $(R^2 - D^2)$.

При послѣдующихъ разсужденіяхъ надо имѣть въ виду, что кривая (846) во всякомъ случаѣ, либо пересѣкаетъ кругъ радіуса R, либо касается къ нему; въ самомъ дѣлѣ, въ начальный моментъ движенія первая часть уравненія (846) должна быть, либо болѣе нуля, либо равна нулю, такъ какъ она должна равняться $(R^2 (ф'_0)^2 : 2g)$.

1. Случаи, въ которыхъ D болѣе b, т. е. $(D - b) > 0$.

Случаи a_1; $D^2 < R^2$, т. е. $R > D > (-R)$. Въ этихъ случаяхъ кривая, описываемая точкою $Ц$, должна имѣть видъ, изображенный на чертежахъ 92-мъ и (92, а). Нутація $ф'$ обращается въ нуль, какъ на параллели $ф_1$ ($Ц_1'\ Ц_1''$ на черт. 92 и 92_1 a), такъ и на параллели $ф_2$ ($Ц'_2\ Ц''_2$ на тѣхъ-же чертежахъ), гдѣ:

$$ф_1 = \arccos\left(\frac{\mathfrak{z}_1}{R}\right),\quad ф_2 = \arccos\left(\frac{\mathfrak{z}_2}{R}\right);$$

но на первой параллели прецессія отрицательная ($ж'_1$) на второй— положительная ($ж'_2$):

$$ж'_1 = -\sqrt{2gF}\,\frac{(\mathfrak{z}_1 - D)}{R^2 - \mathfrak{z}_1^{\,2}},\quad ж'_2 = \sqrt{2gF}\,\frac{(D - \mathfrak{z}_2)}{R^2 - \mathfrak{z}_2^{\,2}},$$

потому что въ этихъ случаяхъ D менѣе $\mathfrak{z}_1$ и болѣе $\mathfrak{z}_2$, какъ сказано выше. На параллели $\mathfrak{z} = D$ прецессія обращается въ нуль, такъ что кривая, описываемая точкою $Ц$, пересѣкаетъ эту параллель ортогонально.

Такое движеніе совершаетъ точка $Ц$, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда $ж'_0 = 0$, а $э'_0$ и $ф'_0$ неравны нулю; тогда $D = R\cos ф_0$.

$$b = R\cos ф_0 - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Если бы тѣло не вращалось вокругъ своей оси симметріи, т. е. $э'_0$ было бы равно нулю, то ось $СЦZ$ постоянно оставалась бы въ той плоскости, проходящей черезъ ось CZ', въ которой она находилась въ начальный моментъ движенія; вслѣдствіе же вращенія тѣла вокругъ оси Z, ось $СЦZ$ выходитъ изъ этой плоскости и точка $Ц$ описываетъ кривую вышеозначеннаго вида, причемъ прецессія обращается въ нуль каждый разъ, какъ точка $Ц$ вступаетъ на уровень начальнаго положенія: $\mathfrak{z} = D = R \cos ф_0$.

Случаи b_1; $D^2 = R^2$, т. е. $D = +R$ или $D = -R$. Въ первомъ случаѣ $ф_1 = 0$, т. е. $\mathfrak{z}_1 = D = +R$ (черт. 93), во второмъ $ф_2 = \pi$, т. е. $\mathfrak{z}_2 = D = -R$; значитъ кривая, описываемая точкою $Ц$, проходитъ въ первомъ случаѣ черезъ верхнюю, а во второмъ черезъ нижнюю точку сферы; въ этихъ точкахъ прецессія равна нулю. Видъ кривой изображенъ на чертежѣ (93, а). Если бы тѣло не вращалось вокругъ оси Z и точка $Ц$ должна была бы проходить черезъ верхнюю точку сферы, то движеніе ея должно было бы совершаться въ одной меридіональной плоскости.

Случаи c_1; $D^2 > R^2$, то есть, $D > +R$ (см. черт. 94) или $D < (-R)$. Прецессія не мѣняетъ знака и не обращается въ нуль; кривая, описываемая точкою $Ц$, имѣетъ видъ (94, а).

2. Случаи, въ которыхъ $D = b$.

Случаи a_2; $D^2 < R^2$ (см. черт. 95). Такъ какъ въ этихъ случаяхъ уровень $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_2$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и уровень $\mathfrak{z} = D$, то на немъ прецессія равна нулю, а такъ какъ на немъ же и нутація равна нулю, то кривая, описываемая точкою $Ц$, имѣетъ на этомъ уровнѣ точки возврата, какъ изображено на чертежѣ (95, а), гдѣ представлена часть подобной кривой.

Такимъ образомъ совершается движеніе точки $Ц$ напримѣръ въ томъ случаѣ, когда $ф'_0 = 0$ и $ж'_0 = 0$, а $э'_0$ неравно нулю.

Въ этомъ случаѣ:

$$SR^3 = (\mathfrak{z} - b)(R^2 - \mathfrak{z}^2 - F\mathfrak{z} + Fb);$$

стало быть: $\mathfrak{z}_2 = b$,

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{F}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{b}{F} + \frac{R^2}{F^2}\right)}\right) = b + \frac{R^2 - b^2}{F} - 2b\frac{R^2 - b^2}{F^2} + \ldots$$

$$\mathfrak{z}_1 = b + \frac{\mathfrak{A}_c^2}{\mathfrak{C}_c^2}\frac{2g \sin^2 ф_0}{\omega^2} - 8b\frac{\mathfrak{A}_c^4}{\mathfrak{C}_c^4}\frac{g^2 \sin^2 ф_0}{R^2\omega^4} + \ldots$$

Отсюда видно, что чѣмъ болѣе ω^2, тѣмъ менѣе величина разности $(\mathfrak{z}_1 - b) = (\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2)$, т. е. тѣмъ тѣснѣе предѣлы, между которыми колеблется уголъ ϕ.

При большой величинѣ ω $(\omega = \vartheta'_0)$ модуль $\varkappa$ можетъ быть выраженъ приближенно слѣдующею формулою:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{R^2 - b^2}{F^2}} = \frac{R \sin \phi_0}{F} = \frac{\mathfrak{A}_c^2}{\mathfrak{C}_c^2} \frac{2g \sin \phi_0}{R\omega^2};$$

отсюда слѣдуетъ:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_c}{Ak}} \cdot \frac{\varkappa\sqrt{2R}}{\sqrt{\mathfrak{z}_1 - b}} = \frac{2\mathfrak{A}_c}{\omega \mathfrak{C}_c}.$$

Пренебрегая высшими степенями отношенія $(1:\omega)$ въ выраженіи (842), найдемъ, что промежутокъ T, въ теченіи котораго точка *Ц* переходитъ отъ уровня $\mathfrak{z}_2 = b$ до уровня $\mathfrak{z}_1$ или обратно, имѣетъ приблизительно слѣдующую величину:

$$T = \pi \frac{\mathfrak{A}_c}{\mathfrak{C}_c \omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (847)$$

Примѣняя ту же степень приближенія, составимъ изъ уравненій (835, C) и (832, C) слѣдующее:

$$d\text{ж} = \frac{R + b}{R + \mathfrak{z}} d\eta - \frac{R - b}{R - \mathfrak{z}} d\eta,$$

гдѣ $\mathfrak{z}$ должно быть выражено по формулѣ (841); интегрируя въ предѣлахъ отъ $\eta = 0$ до $\eta = \frac{\pi}{2}$, найдемъ, что уголъ *ж* въ теченіи времени T измѣняется на слѣдующую величину:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{z}_1 - b}{R + b}}} - \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{z}_1 - b}{R - b}}} = - \frac{\mathfrak{A}_c^2}{\mathfrak{C}_c^2} \frac{g\pi}{R\omega^2};$$

раздѣливъ эту величину на величину промежутка времени T, получимъ величину средней прецессіи, совершаемой осью CZ при такомъ движеніи тѣла, вращающагося съ большою угловою скоростью.

$$\text{Средняя прецессія} = - \frac{\mathfrak{A}_c}{\mathfrak{C}_c} \frac{g}{R\omega} = - \frac{Ak}{\mathfrak{C}_c \omega} \ldots\ldots (848)$$

При весьма большихъ ω интервалъ $(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2)$ и величина промежутка времени T будутъ столь ничтожны, что глазъ не въ состояніи уловить

этихъ колебаній; будетъ только видно, что ось CZ совершаетъ прецессію, величина которой (848) тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе ω и тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе силовой моментъ Ak; при этомъ бываетъ слышенъ звукъ, высота котораго соотвѣтствуетъ числу промежутковъ времени T въ секундѣ. Напримѣръ, если тѣло дѣлаетъ 1000 оборотовъ въ минуту, а $\mathfrak{C}_c = 2\mathfrak{A}_c$, то $T = 0{,}015$ секунды и высота звука соотвѣтствуетъ 33-мъ колебаніямъ въ секунду.

Случаи b_2; $D = b = +R$. Въ этомъ случаѣ ось CZ постоянно совпадаетъ съ осью Z'.

Если же $D = b = -R$, то тогда $SR^3 = (\mathfrak{z} + R)^2\ (R - F - \mathfrak{z})$ и интегралы дифференціальныхъ уравненій (835) и (832) будутъ слѣдующіе:

$$\frac{2R - F}{R + \mathfrak{z}} = \left(\sqrt{\frac{2R - F}{R + \mathfrak{z}_0}} \cos nti + i \sqrt{\frac{R - F - \mathfrak{z}_0}{R + \mathfrak{z}_0}} \sin nti\right)^2 \ldots\ldots (849)$$

$$ж - ж_0 = -\frac{\sqrt{2gF}}{2R}\, t + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R - F - \mathfrak{z}}{F}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R - F - \mathfrak{z}_0}{F}}; \; (850)$$

здѣсь:

$$n = \frac{\sqrt{2g(2R - F)}}{2R}.$$

Для того, чтобы подобное движеніе могло произойдти, необходимо, чтобы $R - F - \mathfrak{z}_0$ было болѣе нуля. Изъ равенства (849) можно видѣть, что при этомъ движеніи ось CZ ассимптотически приближается къ положенію $ф = \pi$, причемъ, какъ видно изъ равенства (850), она описываетъ спирально завертывающуюся коническую поверхность.

Если $F = O$, то точка $Ц$ совершаетъ движеніе, разсмотрѣнное на страницѣ 241-й.

Случаи c_2; $D = b < -R$.

Если $F = O$, то точка $Ц$ совершаетъ движеніе, разсмотрѣнное на страницѣ 240-й.

Если же F не равно нулю, но менѣе, чѣмъ

$$\frac{R^2 - \mathfrak{z}_0^2}{\mathfrak{z}_0 - b},$$

то точка $Ц$ совершаетъ движеніе по нѣкоторому сферическому поясу; этого движенія разсматривать не будемъ.

3. Случаи, въ которыхъ D менѣе b, т. е. $(D - b) < O$.

Случаи a_3; $b < R$. Черт. 96 и (96, а). Кривая имѣетъ видъ, изобра-

женный на чертежѣ (96, а); если $\omega > O$, то прецессія отрицательная на протяженіи всего движенія.

Случаевъ b_2 и c_2 разсматривать не будемъ.

Когда корни $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$ равны между собою, то есть, когда кривая, выражаемая уравненіемъ (846), прикасается къ кругу радіуса R, тогда ось CZ совершаетъ постоянную прецессію, не имѣя нутаціи.

Такое прикосновеніе кривой (846) къ кругу радіуса R можетъ быть въ слѣдующихъ категоріяхъ случаевъ.

Въ случаяхъ (1, c_1), когда $D > R > b$, прикосновеніе можетъ происходить только въ точкахъ верхняго полукруга (гдѣ $\vartheta < \frac{\pi}{2}$), какъ изображено на чертежѣ (94, b).

Въ случаяхъ той же категоріи, когда $D > b$ и притомъ $D < -R$, прикосновеніе можетъ происходить только въ точкахъ нижняго полукруга (гдѣ $\vartheta > \frac{\pi}{2}$), какъ изображено на чертежѣ (94, c).

Въ случаяхъ (2, c_2), когда $D = b < -R$, прикосновеніе можетъ быть только въ точкахъ нижняго полукруга.

Въ случаяхъ (3), когда $D < b$ и кривая имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ 96-мъ, прикосновеніе можетъ происходить и въ точкахъ нижняго и въ точкахъ верхняго полукруга.

Если заданы: уголъ ϑ_0 и величина ω (или F), при которыхъ ось симметріи тѣла должна совершать постоянную прецессію безъ нутаціи, то мы можемъ слѣдующимъ образомъ опредѣлить величину прецессіи $\varkappa'$.

Прежде всего найдемъ соотвѣтственныя значенія величинъ D и b; для этого возьмемъ равенства:

$$2\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_3 = b - F, \quad \mathfrak{z}_1^2 + 2\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_3 = -R^2 - 2FD,$$

$$\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{z}_3 = -bR^2 - FD^2$$

и исключимъ изъ нихъ b и $\mathfrak{z}_3$, тогда получимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія D:

$$D^2 - D\frac{R^2 + \mathfrak{z}_1^2}{\mathfrak{z}_1} + R^2 - \frac{(R^2 - \mathfrak{z}_1^2)^2}{2\mathfrak{z}_1 F} = 0,$$

изъ котораго находимъ два значенія для D:

$$D_1 = \mathfrak{z}_1 + \frac{R^2 - \mathfrak{z}_1^2}{2\mathfrak{z}_1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\mathfrak{z}_1}{F}}\right),$$

$$D_2 = \mathfrak{z}_1 + \frac{R^2 - \mathfrak{z}_1^2}{2\mathfrak{z}_1}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mathfrak{z}_1}{F}}\right).$$

Изъ уравненія $SR^3 = 0$ найдемъ соотвѣтственныя значенія (b_1 и b_2) величины b.

Такимъ образомъ оказывается, что движеніе твердаго тѣла безъ нутаціи при заданныхъ величинахъ $\mathfrak{z}_1 = R\cos\phi_0$ и F можетъ совершаться двоякимъ образомъ: съ прецессіею

$$ж'_1 = \frac{\sqrt{2gF}}{2\mathfrak{z}_1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\mathfrak{z}_1}{F}}\right), \dots\dots\dots (851)$$

и съ прецессіею:

$$ж'_2 = \frac{\sqrt{2gF}}{2\mathfrak{z}_1}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mathfrak{z}_1}{F}}\right). \dots\dots\dots (852)$$

Если $\mathfrak{z}_1 > 0$, то оба рѣшенія возможны при всякихъ ω и притомъ тогда прецессія $ж'_1$ положительная, а прецессія $ж'_2$ отрицательная; первая соотвѣтствуетъ случаю, изображенному на чертежѣ (94, b), когда $D > R$ и $b < R$; прецессія же $ж'_2$ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда кривая, изображенная на чертежѣ 96-мъ, касается верхняго полукруга (тогда $D < b < R$).

Если $\mathfrak{z}_1 < 0$, то рѣшеніе возможно при такихъ F, которыя не менѣе $(-2\mathfrak{z}_1)$. т. е., при

$$\omega^2 \text{ не меньшемъ } \frac{-4\mathfrak{z}_1 A^2 k^2}{\mathfrak{C}_c^2 g}.$$

При всякой величинѣ ω, удовлетворяющей этому условію, тѣло можетъ совершать два движенія безъ нутаціи: одно съ постоянною прецессіею $ж'_1$, другое — съ постоянною прецессіею $ж'_2$; обѣ — отрицательныя, такъ какъ $\mathfrak{z}_1 < 0$ и корень менѣе единицы.

§ 127. Примѣръ 104-й. Неизмѣняемая система состоитъ изъ отдѣльныхъ матерьяльныхъ точекъ; движеніе совершается въ средѣ, оказывающей каждой изъ точекъ сопротивленіе, пропорціональное ея количеству движенія; всѣ точки этой неизмѣняемой системы притягиваются къ началу координатъ силами, пропорціональными массамъ точекъ и ихъ разстояніямъ отъ начала координатъ.

Проэкціи на оси X, Y, Z силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i будутъ равны:

$$-\mu m_i x_i - \varepsilon m_i x'_i, \quad -\mu m_i y_i - \varepsilon m_i y'_i, \quad -\mu m_i z_i - \varepsilon m_i z'_i,$$

поэтому проэкціи на тѣ же оси главнаго вектора силъ будутъ:

$$B_x = -\mu M x_c - \varepsilon M x'_c, \quad B_y = -\mu M y_c - \varepsilon M y'_c,$$

$$B_z = -\mu M z_c - \varepsilon M z'_c;$$

а проэкціи на тѣ же оси главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи будутъ:

$$Л_x = -\varepsilon л_x,\ Л_y = -\varepsilon л_y,\ Л_z = -\varepsilon л_z.$$

Если возьмемъ за оси Ξ, Υ, Z главныя центральныя оси инерціи неизмѣняемой системы, то проэкціи на нихъ главнаго момента силъ выразятся такъ:

$$(Л_c)_\xi = -\varepsilon\mathfrak{A}_c p,\ (Л_c)_\eta = -\varepsilon\mathfrak{B}_c q,\ (Л_c)_\zeta = -\varepsilon\mathfrak{C}_c r.$$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія тѣла по формуламъ (616, А) и (641) стр. 537-й:

$$Mx_c'' = -\mu Mx_c - \varepsilon Mx'_c;\ My_c'' = -\mu My_c - \varepsilon My'_c,$$

$$Mz_c'' = -\mu Mz_c - \varepsilon Mz'_c,$$

$$\frac{dл_x}{dt} = -\varepsilon л_x,\ \frac{dл_y}{dt} = -\varepsilon л_y,\ \frac{dл_z}{dt} = -\varepsilon л_z \ldots\ldots (853)$$

Первыя три дифференціальныя уравненія интегрируются такъ, какъ указано въ примѣрѣ 3-мъ (см. стр. 46, 50 и 82); слѣдовательно, центръ инерціи неизмѣняемой системы описываетъ плоскую кривую; если μ болѣе $\frac{\varepsilon^2}{4}$, то кривая эта есть спираль, изображенная на чертежѣ 6-мъ (листъ 1-й).

Слѣдующія три дифференціальныя уравненія (853) даютъ интегралы:

$$л_x = C_1 e^{-\varepsilon t},\ л_y = C_2 e^{-\varepsilon t},\ л_z = C_3 e^{-\varepsilon t};\ \ldots\ldots (854)$$

слѣдовательно, главный моментъ (вокругъ центра инерціи) количествъ движенія неизмѣняемой системы сохраняетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ, а величина его уменьшается по слѣдующему закону:

$$л_c = Ge^{-\varepsilon t}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (855)$$

гдѣ

$$G = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}.$$

Эйлеровы дифференціальныя уравненія въ этомъ примѣрѣ таковы:

$$\mathfrak{A}_c \frac{dp}{dt} = (\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c)qr - \varepsilon\mathfrak{A}_c p$$

$$\mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} = (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)rp - \varepsilon\mathfrak{B}_c q$$

$$\mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} = (\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c)pq - \varepsilon\mathfrak{C}_c r,$$

но легко ихъ привести къ слѣдующему виду:

$$\mathfrak{A}_c \frac{dp_1}{dt} = (\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c)q_1 r_1, \quad \mathfrak{B}_c \frac{dq_1}{dt} = (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)r_1 p_1,$$

$$\mathfrak{C}_c \frac{dr_1}{dt} = (\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c)p_1 q_1,$$

гдѣ:

$$p_1 = pe^{\varepsilon t}, \; q_1 = qe^{\varepsilon t}, \; r_1 = re^{\varepsilon t}, \quad \mathrm{t} = -\frac{e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon}.$$

Легко теперь получить интегралы:

$$\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2 = 2he^{-2\varepsilon t},$$

$$\mathfrak{A}_c^2 p^2 + \mathfrak{B}_c^2 q^2 + \mathfrak{C}_c^2 r^2 = G^2 e^{-2\varepsilon t},$$

изъ которыхъ можно заключить, что центральный эллипсоидъ инерціи неизмѣняемой системы постоянно прикасается къ двумъ плоскостямъ, перпендикулярнымъ къ направленію λ_c и отстоящимъ отъ центра инерціи на разстояніяхъ, равныхъ:

$$D = \sqrt{\text{м}.\partial^4}\,\frac{\sqrt{2h}}{G} \dots\dots\dots\dots\dots (777)$$

Поступая далѣе такимъ же образомъ, какъ въ § 120, получимъ остальные интегралы; такъ, если D менѣе длины средней полуоси эллипсоида инерціи, получатся слѣдующія выраженія для p, q, r:

$$p = k\varkappa\sqrt{a}\,e^{-\varepsilon t}\cos am\left(u_0 - \frac{\varkappa}{\varepsilon}e^{-\varepsilon t}\right),$$

$$q = k\varkappa\sqrt{b}\,e^{-\varepsilon t}\sin am\left(u_0 - \frac{\varkappa}{\varepsilon}e^{-\varepsilon t}\right),$$

$$r = \varkappa\sqrt{c}\;e^{-\varepsilon t}\,\Delta am\left(u_0 - \frac{\varkappa}{\varepsilon}e^{-\varepsilon t}\right).$$

Имѣя выраженія для p, q и r, опредѣлимъ $\cos \text{ѳ}$ и $\operatorname{tg} \text{э}$ по формуламъ:

$$\operatorname{tg} \text{э} = -\frac{\mathfrak{B}_c q}{\mathfrak{A}_c p}, \quad \cos \text{ѳ} = \frac{\mathfrak{C}_c \mathfrak{r}_1}{G};$$

уголъ ж выразится такъ:

$$\text{ж} = \Gamma - \frac{G}{\varepsilon \mathfrak{C}_c} e^{-\varepsilon t} + (2h\mathfrak{C}_c - G^2) \frac{G}{\mathfrak{C}_c} \int \frac{e^{-\varepsilon t} dt}{G^2 - \mathfrak{C}_2{}^2 r_1{}^2}.$$

§ 128. Несвободныя твердыя тѣла; число степеней свободы.

Въ началѣ настоящей главы было сказано, что свободное твердое тѣло имѣетъ шесть степеней свободы, такъ какъ всѣ шесть величинъ $x_\text{ю}$, $y_\text{ю}$, $z_\text{ю}$, ѳ, ж, э, опредѣляющія положеніе твердаго тѣла, вполнѣ независимы одна отъ другой, если тѣло свободно; точка $Ю$ можетъ тогда занимать произвольное положеніе въ пространствѣ и углы ѳ, ж и э могутъ имѣть произвольныя значенія.

Свобода движенія такого твердаго тѣла неограничена: которая угодно изъ точекъ его можетъ имѣть всякую скорость по всякому направленію и угловая скорость тѣла можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направленіе.

Если твердое тѣло связано съ такимъ механизмомъ, или подчинено такому условію, въ силу котораго координаты тѣла должны удовлетворять равенству:

$$\text{в}(x_\text{ю}, y_\text{ю}, z_\text{ю}, \text{ѳ}, \text{ж}, \text{э}, t) = 0, \dots\dots\dots\dots (856)$$

то этотъ механизмъ или условіе представляетъ удерживающую связь, лишающую тѣло одной степени свободы, потому что тогда только пять изъ числа шести координатъ $x_\text{ю}$, $y_\text{ю}$, $z_\text{ю}$, ѳ, ж, э тѣла независимы одна отъ другой и произвольны, значеніе же шестой опредѣлится изъ уравненія (856) по значеніямъ первыхъ пяти и по значенію t; вмѣстѣ съ тѣмъ скорости $x'_\text{ю}$, $y'_\text{ю}$, $z'_\text{ю}$ и составляющія $\text{ѳ}'$, $\text{ж}'$, $\text{э}'$ угловой скорости связаны между собою зависимостью, выражаемою равенствомъ:

$$\frac{\partial \text{в}}{\partial t} + \frac{\partial \text{в}}{\partial x_\text{ю}} x'_\text{ю} + \frac{\partial \text{в}}{\partial y_\text{ю}} y'_\text{ю} + \frac{\partial \text{в}}{\partial z_\text{ю}} z'_\text{ю} + \frac{\partial \text{в}}{\partial \text{ѳ}} \text{ѳ}' + \frac{\partial \text{в}}{\partial \text{ж}} \text{ж}' + \frac{\partial \text{в}}{\partial \text{э}} \text{э}' = 0 \dots (857)$$

Такимъ образомъ твердое тѣло, связанное одною удерживающею связью, выражаемою однимъ равенствомъ вида (856), имѣетъ *пять степеней свободы*.

Если твердое тѣло связано двумя удерживающими связями, каждая изъ которыхъ выражается равенствомъ вида (856), то оно имѣетъ *четыре степени свободы*; тѣло связанное тремя такими связями, имѣетъ три степени свободы и т. д.; наконецъ, если твердое тѣло связано шестью связями, то оно совершенно несвободно.

Связи, ограничивающія свободу твердаго тѣла, могутъ быть и неудерживающими; каждая такая связь выражается условіемъ вида:

$$\text{в}\,(x_{\text{ю}}, y_{\text{ю}}, z_{\text{ю}}, \text{ф}, \text{ж}, \text{э}, t) \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(858)}$$

Очевидно, что каждое такое условіе ограничиваетъ одну изъ степеней свободы твердаго тѣла.

§ 129. Дифференціальныя уравненія движенія несвободнаго твердаго тѣла, имѣющаго пять степеней свободы.

Если связь удерживающая и уравненіе ея представлено подъ видомъ (856), то можно составить Лагранжевы дифференціальныя уравненія въ координатныхъ параметрахъ $x_{\text{ю}}, y_{\text{ю}}, z_{\text{ю}}, \text{ф}, \text{ж}, \text{э}$, принявъ въ разсчетъ, что эти параметры связаны между собою уравненіемъ связи; согласно съ тѣмъ, что сказано на стр. 368, въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ должны будутъ заключаться частныя производныя отъ в по координатнымъ параметрамъ, помноженныя на множитель λ, такъ что уравненія будутъ:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial x'_{\text{ю}}}\right)}{dt} = B_x + \lambda \frac{\partial \text{в}}{\partial x_{\text{ю}}}, \quad \textbf{(859, a)} \qquad \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial y'_{\text{ю}}}\right)}{dt} = B_y + \lambda \frac{\partial \text{в}}{\partial y_{\text{ю}}}, \quad \textbf{(859, b)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial z'_{\text{ю}}}\right)}{dt} = B_z + \lambda \frac{\partial \text{в}}{\partial y_{\text{ю}}}, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(859, c)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \text{ф}'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \text{ф}} + (\text{Л}_{\text{ю}})_y \cos \text{ж} - (\text{Л}_{\text{ю}})_x \sin \text{ж} + \lambda \frac{\partial \text{в}}{\partial \text{ф}}, \ldots\ldots \quad \textbf{(859, d)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \text{ж}'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \text{ж}} + (\text{Л}_{\text{ю}})_z + \lambda \frac{\partial \text{в}}{\partial \text{ж}}, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(859, e)}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial э'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial э} + (Л_ю)_x \cos ж \sin ф +$$

$$+ (Л_ю)_y \sin ж \sin ф + (Л_ю)_z \cos ф + \lambda \frac{\partial в}{\partial э}, \quad \ldots\ldots (859, f)$$

здѣсь T предполагается выраженною по формулѣ (733, bis) стр. 542-й, но проэкціи скорости $w_ю$ на оси Ξ, Υ, Z должны быть выражены помощью величинъ $x'_ю$, $y'_ю$, $z'_ю$.

Можно также составить дифференціальныя уравненія движенія, исходя изъ начала д'Аламбера, поступая такъ, какъ показано на стр. 538—543; но теперь надо будетъ къ первой части равенства (752) стр. (539) придать $\lambda \delta в$, гдѣ:

$$\delta в = \frac{\partial в}{\partial x_ю}\delta x_ю + \frac{\partial в}{\partial y_ю}\delta y_ю + \frac{\partial в}{\partial z_ю}\delta z_ю + \frac{\partial в}{\partial ф}\delta ф + \frac{\partial в}{\partial ж}\delta ж + \frac{\partial в}{\partial э}\delta э = 0,$$

гдѣ $\delta ф$, $\delta ж$, $\delta э$ должно выразить въ функціяхъ величинъ θ_ζ, θ_η, θ_ζ; эти выраженія, получаемыя изъ формулъ (759) стр. 543-й суть:

$$\left.\begin{aligned} \sin ф\, \delta ж &= \theta_\eta \sin э - \theta_\xi \cos э, \\ \delta ф &= \theta_\eta \cos э + \theta_\xi \sin э, \\ \delta э &= \theta_\zeta + (\theta_\xi \cos э - \theta_\eta \sin э) \operatorname{cotg} ф \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (860)$$

Послѣ надлежащихъ преобразованій получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$Mx_c'' = B_x + \lambda\frac{\partial в}{\partial x_ю},\ My_c'' = B_y + \lambda\frac{\partial в}{\partial y_ю},\ Mz_c'' = B_z + \lambda\frac{\partial в}{\partial z_ю}, (861, a, b, c)$$

$$\frac{d\,(л_ю)_\xi}{dt} = r\,(л_ю)_\eta - q\,(л_ю)_\zeta + M(\gamma\beta_c - \beta\gamma_c) +$$

$$+ (Л_ю)_\xi + \lambda\left[\left(\frac{\partial в}{\partial э}\cos ф - \frac{\partial в}{\partial ж}\right)\frac{\cos э}{\sin ф} + \frac{\partial в}{\partial ф}\sin э\right], \ldots (861, d)$$

$$\frac{d\,(л_ю)_\eta}{dt} = p\,(л_ю)_\zeta - r\,(л_ю)_\xi + M(\alpha\gamma_c - \gamma\alpha_c) +$$

$$+ (Л_ю)_\eta + \lambda\left[\frac{\partial в}{\partial ф}\cos э + \left(\frac{\partial в}{\partial ж} - \frac{\partial в}{\partial э}\cos ф\right)\frac{\sin э}{\sin ф}\right], \ldots (861, e)$$

$$\frac{d(л_ю)_\zeta}{dt} = q(л_ю)_\xi - p(л_ю)_\eta + M(\beta\alpha_c - \alpha\beta_c) +$$

$$+ (Л_ю)_\xi + \lambda \frac{\partial в}{\partial э} \text{*)} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(861, f)}$$

Тѣ члены этихъ дифференціальныхъ уравненій, которые заключаютъ λ, выражаютъ величины проэкцій на оси координатъ главнаго вектора и момента реакцій связи; а именно, величины:

$$\lambda \frac{\partial в}{\partial x_ю}, \quad \lambda \frac{\partial в}{\partial y_ю}, \quad \lambda \frac{\partial в}{\partial z_ю},$$

которыя мы будемъ обозначать символами: $V_x(в)$, $V_y(в)$, $V_z(в)$, суть проэкціи главнаго вектора реакцій связи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$; величины же, выражаемыя формулами:

$$(\Lambda_ю)_\xi = \lambda \left[\left(\frac{\partial в}{\partial э} \cos ф - \frac{\partial в}{\partial ж} \right) \frac{\cos э}{\sin ф} + \frac{\partial в}{\partial ф} \sin э \right] \ldots \mathbf{(862, d)}$$

$$(\Lambda_ю)_\eta = \lambda \left[\left(\frac{\partial в}{\partial ж} - \frac{\partial в}{\partial э} \cos ф \right) \frac{\sin э}{\sin ф} + \frac{\partial в}{\partial ф} \cos э \right] \ldots \mathbf{(862, e)}$$

$$(\Lambda_ю)_\zeta = \lambda \frac{\partial в}{\partial э}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(862, f)}$$

суть проэкціи на оси Ξ, Υ, Z главнаго момента вокругъ *Ю* реакцій связи $в = 0$.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда $в$ есть функція отъ t, $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ и отъ косинусовъ λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, μ_y, μ_z, ν_x, ν_y, ν_z, величины $(\Lambda_ю)_\xi$, $(\Lambda_ю)_\eta$, $(\Lambda_ю)_\zeta$ могутъ быть выражены иначе, а именно въ частныхъ производныхъ отъ $в$ по этимъ косинусамъ; въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіи:

$$\delta в = \frac{\partial в}{\partial x_ю} \delta x_ю + \frac{\partial в}{\partial y_ю} \delta y_ю + \frac{\partial в}{\partial z_ю} \delta z_ю + \frac{\partial в}{\partial \lambda_x} \delta \lambda_x + \ldots\ldots + \frac{\partial в}{\partial \nu_z} \delta \nu_z$$

---

*) Кромѣ того надо имѣть въ виду еще уравненія (768) стр. 548-й.

выразимъ варьяціи $\delta\lambda_x$, $\delta\lambda_y$, ... $\delta\nu_z$ въ функціяхъ проэкцій θ_ξ, θ_η, θ_ζ, угловой варьяціи θ на оси Ξ, Υ, Z по формуламъ:

$$\left.\begin{array}{l} \delta\lambda_x=\mu_x\theta_\zeta-\nu_x\theta_\eta,\ \delta\mu_x=\nu_x\theta_\xi-\lambda_x\theta_\zeta,\ \delta\nu_x=\lambda_x\theta_\eta-\mu_x\theta_\xi \\ \delta\lambda_y=\mu_y\theta_\zeta-\nu_y\theta_\eta,\ \delta\mu_y=\nu_y\theta_\xi-\lambda_y\theta_\zeta,\ \delta\nu_y=\lambda_y\theta_\eta-\mu_y\theta_\xi \\ \delta\lambda_z=\mu_z\theta_\zeta-\nu_z\theta_\eta,\ \delta\mu_z=\nu_z\theta_\xi-\lambda_z\theta_\zeta,\ \delta\nu_z=\lambda_z\theta_\eta-\mu_z\theta_\xi \end{array}\right\}^{*)} . . (863)$$

тогда это произведеніе $\lambda\delta 8$ приметъ видъ:

$$\lambda\delta 8=\lambda\left[\frac{\partial 8}{\partial x_ю}\delta x_ю+\frac{\partial 8}{\partial y_ю}\delta y_ю+\frac{\partial 8}{\partial z_ю}\delta z_ю\right]+(\Lambda_ю)_\xi\theta_\xi+(\Lambda_ю)_\eta\theta_\eta+(\Lambda_ю)_\zeta\theta_\zeta,$$

гдѣ:

$$(\Lambda_ю)_\xi=\lambda\left[\frac{\partial 8}{\partial\mu_x}\nu_x+\frac{\partial 8}{\partial\mu_y}\nu_y+\frac{\partial 8}{\partial\mu_z}\nu_z-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial 8}{\partial\nu_x}\mu_x-\frac{\partial 8}{\partial\nu_y}\mu_y-\frac{\partial 8}{\partial\nu_z}\mu_z\right] . . . . . . (864, a)$$

$$(\Lambda_ю)_\eta=\lambda\left[\frac{\partial 8}{\partial\nu_x}\lambda_x+\frac{\partial 8}{\partial\nu_y}\lambda_y+\frac{\partial 8}{\partial\nu_z}\lambda_z-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial 8}{\partial\lambda_x}\nu_x-\frac{\partial 8}{\partial\lambda_y}\nu_y-\frac{\partial 8}{\partial\lambda_z}\nu_z\right] . . . . (864, b)$$

$$(\Lambda_ю)_\zeta=\lambda\left[\frac{\partial 8}{\partial\lambda_x}\mu_x+\frac{\partial 8}{\partial\lambda_y}\mu_y+\frac{\partial 8}{\partial\lambda_z}\mu_z-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial 8}{\partial\mu_x}\lambda_x-\frac{\partial 8}{\partial\mu_y}\lambda_y-\frac{\partial 8}{\partial\mu_z}\lambda_z\right] . . . . . . (864, c)$$

Другія дифференціальныя уравненія вращательнаго движенія несвободнаго твердаго тѣла, соотвѣтствующія уравненіямъ (641) стр. 537-й, получатся изъ равенства:

$$(B_x-Mx_c'')\delta x_ю+(B_y-My_c'')\delta y_ю+(B_z-Mz_c'')\delta z_ю+$$
$$+((Л_ю)_x-(л_ю)'_x)\theta_x+((Л_ю)_y-(л_ю)'_y)\theta_y+((Л_ю)_z-(л_ю)'_z)\theta_z+$$
$$+M((y_c'z_ю'-z_c'y_ю')\theta_x+(z_c'x_ю'-x_c'z_ю')\theta_y+(x_c'y_ю'-y_c'x_ю')\theta_z)=0$$

---

*) Эти формулы могутъ быть выведены подобно формуламъ (120) стр. 105-й кинематической части.

если принять въ разсчетъ, что варьяціи $\delta x_ю$, $\delta y_ю$, $\delta z_ю$, θ_x, θ_y, θ_z связаны между собою зависимостью $\delta в = 0$, первую часть которой надо выразить въ $\delta x_ю$, $\delta y_ю$, $\delta z_ю$, θ_x, θ_y, θ_z.

Когда $в$ есть функція отъ t, $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф$, $ж$, $э$, тогда выразимъ $\delta ф$, $\delta ж$, $\delta э$, по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta ф &= \theta_y \cos ж - \theta_x \sin ж \\ \sin ф\, \delta э &= \theta_y \sin ж + \theta_x \cos ж \\ \delta ж &= \theta_z - (\theta_y \sin ж + \theta_x \cos ж) \operatorname{cotg} ф, \end{aligned}\right\} \ldots (865)$$

когда же $в$ есть функція отъ t, $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, λ_x, λ_y, ... ν_y, ν_z, тогда выразимъ $\delta\lambda_x$, $\delta\lambda_y$, ... $\delta\nu_z$ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\lambda_x = \lambda_z \theta_y - \lambda_y \theta_z, \quad \delta\mu_x = \mu_z \theta_y - \mu_y \theta_z, \\ &\qquad\qquad \delta\nu_x = \nu_z \theta_y - \nu_y \theta_z, \\ &\delta\lambda_y = \lambda_x \theta_z - \lambda_z \theta_x, \quad \delta\mu_y = \mu_x \theta_z - \mu_z \theta_x, \\ &\qquad\qquad \delta\nu_y = \nu_x \theta_z - \nu_z \theta_x, \\ &\delta\lambda_z = \lambda_y \theta_x - \lambda_x \theta_y, \quad \delta\mu_z = \mu_y \theta_x - \mu_x \theta_y, \\ &\qquad\qquad \delta\nu_z = \nu_y \theta_x - \nu_x \theta_y. \end{aligned}\right\} \ldots (866)$$

Примѣнивъ пріемъ Эйлера и Лагранжа, указанный на стр. 388—389, получимъ три дифференціальныя уравненія (861, a, b, c) и три слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(л_ю)_x}{dt} + M(y'_ю z'_c - z'_ю y'_c) &= (Л_ю)_x + (\Lambda_ю)_x \\ \frac{d(л_ю)_y}{dt} + M(z'_ю x'_c - x'_ю z'_c) &= (Л_ю)_y + (\Lambda_ю)_y \\ \frac{d(л_ю)_z}{dt} + M(x'_ю y'_c - y'_ю x'_c) &= (Л_ю)_z + (\Lambda_ю)_z \end{aligned}\right\}, \ldots (867)$$

гдѣ $(\Lambda_ю)_x$, $(\Lambda_ю)_y$, $(\Lambda_ю)_z$ суть проэкціи главнаго момента реакцій связи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$.

Если в есть функція отъ t, $x_{ю}$, $y_{ю}$, $z_{ю}$, $ф$, $ж$, $э$, то величины этихъ проэкцій выразятся формулами:

$$(\Lambda_{ю})_x = \lambda\left[\left(\frac{\partial в}{\partial э} - \frac{\partial в}{\partial ж}\cos ф\right)\frac{\cos ж}{\sin ф} - \frac{\partial в}{\partial ф}\sin ж\right], \ldots (868,a)$$

$$(\Lambda_{ю})_y = \lambda\left[\left(\frac{\partial в}{\partial э} - \frac{\partial в}{\partial ж}\cos ф\right)\frac{\sin ж}{\sin ф} + \frac{\partial в}{\partial ф}\cos ж\right], \ldots (868,b)$$

$$(\Lambda_{ю})_z = \lambda\frac{\partial в}{\partial ж} \ldots\ldots\ldots\ldots (868,c)$$

Когда же в есть функція отъ λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, ... ν_z, тогда эти проэкціи выразятся такъ:

$$(\Lambda_{ю})_x = \lambda\left[\frac{\partial в}{\partial \lambda_z}\lambda_y + \frac{\partial в}{\partial \mu_z}\mu_y + \frac{\partial в}{\partial \nu_z}\nu_y - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial в}{\partial \lambda_y}\lambda_z - \frac{\partial в}{\partial \mu_y}\mu_z - \frac{\partial в}{\partial \nu_y}\nu_z\right], \ldots (869,a)$$

$$(\Lambda_{ю})_y = \lambda\left[\frac{\partial в}{\partial \lambda_x}\lambda_z + \frac{\partial в}{\partial \mu_x}\mu_z + \frac{\partial в}{\partial \nu_x}\nu_z - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial в}{\partial \lambda_z}\lambda_x - \frac{\partial в}{\partial \mu_z}\mu_x - \frac{\partial в}{\partial \nu_z}\nu_x\right], \ldots (869,b)$$

$$(\Lambda_{ю})_z = \lambda\left[\frac{\partial в}{\partial \lambda_y}\lambda_x + \frac{\partial в}{\partial \mu_y}\mu_x + \frac{\partial в}{\partial \nu_y}\nu_x - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial в}{\partial \lambda_x}\lambda_y - \frac{\partial в}{\partial \mu_x}\mu_y - \frac{\partial в}{\partial \nu_x}\nu_y\right] \ldots (869,c)$$

§ 130. Нѣкоторые примѣры условій, ограничивающихъ одну степень свободы движенія твердаго тѣла.

Условія, ограничивающія степени свободы движенія твердаго тѣла могутъ быть весьма разнообразны и могутъ быть воспроизведены помощью весьма разнообразныхъ механизмовъ. Здѣсь ограничимся небольшимъ числомъ примѣровъ.

1) Опредѣленная точка K твердаго тѣла должна оставаться на данной поверхности: $f(x, y, z, t) = 0$.

Принявъ эту точку за точку $Ю$, выразимъ это условіе равенствомъ:

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (870)$$

Можно также принять за точку *Ю* другую точку твердаго тѣла, напримѣръ его центръ инерціи *C*; тогда уравненіе связи представится подъ слѣдующимъ видомъ:

$$f((x_c+\xi_k\lambda_x+\eta_k\mu_x+\zeta_k\nu_x),(y_c+\xi_k\lambda_y+$$
$$+\eta_k\mu_y+\zeta_k\nu_y),(z_c+\xi_k\lambda_z+\eta_k\mu_z+\zeta_k\nu_z),t)=0, \quad (870,\text{bis})$$

гдѣ x_c, y_c, z_c суть абсолютныя координаты центра инерціи, служащаго началомъ координатныхъ осей Ξ, Υ, Z; ξ_k, η_k, ζ_k суть постоянныя величины, а именно относительныя координаты точки *K* твердаго тѣла. Такъ какъ теперь точка *C* замѣняетъ собою точку *Ю*, то въ уравненіяхъ (859) и (861, a, b, c) производныя отъ в по $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ должны быть замѣнены производными отъ f по x_c, y_c, z_c, а въ уравненіяхъ (861, d, e, f) и (867) величины $л_ю$, $Л_ю$, $\Lambda_ю$ должны быть замѣнены моментами $л_c$, $Л_c$, Λ_c вокругъ центра инерціи.

По предыдущимъ формуламъ найдемъ, что проэкціи главнаго вектора реакцій этой связи на оси *X*, *У*, *Z* суть:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x_c}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_k},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y_c}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y_k},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z_c}=\lambda\frac{\partial f}{\partial z_k}$$

и что проэкціи главнаго момента на тѣ же оси выражаются такъ:

$$(\Lambda_c)_x=\lambda\left[\frac{\partial f}{\partial z_k}(y_k-y_c)-\frac{\partial f}{\partial y_k}(z_k-z_c)\right],$$
$$(\Lambda_c)_y=\lambda\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(z_k-z_c)-\frac{\partial f}{\partial z_k}(x_k-x_c)\right],$$
$$(\Lambda_c)_z=\lambda\left[\frac{\partial f}{\partial y_k}(x_k-x_c)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(y_k-y_c)\right];$$

стало быть реакція этой связи состоитъ изъ одной силы, приложенной къ точкѣ *K*, направленной по нормали къ данной поверхности и имѣющей величину:

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\right)^2}.$$

2) Связь, обратная предыдущей: поверхность $F(\xi,\eta,\zeta)=0$, принадлежащая твердому тѣлу, постоянно проходитъ черезъ точку

x_0, y_0, z_0, неподвижную или движущуюся даннымъ образомъ. Взявъ опять точку C вмѣсто точки $Ю$, выразимъ разсматриваемое условіе подъ видомъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} &F(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0 \\ &\xi_0 = (x_0 - x_c)\lambda_x + (y_0 - y_c)\lambda_y + (z_0 - z_c)\lambda_z \\ &\eta_0 = (x_0 - x_c)\mu_x + (y_0 - y_c)\mu_y + (z_0 - z_c)\mu_z \\ &\zeta_0 = (x_0 - x_c)\nu_x + (y_0 - y_c)\nu_y + (z_0 - z_c)\nu_z \end{aligned}\right\}, \ldots (871)$$

гдѣ ξ_0, η_0, ζ_0 суть перемѣнныя величины, а именно относительныя координаты той точки поверхности тѣла, которая совпадаетъ съ точкою x_0, y_0, z_0.

Реакція этой связи состоитъ изъ одной силы, приложенной къ тѣлу въ точкѣ ξ_0, η_0, ζ_0, направленной по нормали къ поверхности тѣла и имѣющей величину:

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_0}\right)^2}.$$

3) Твердое тѣло ограничено въ своемъ движеніи такимъ образомъ, что нѣкоторая кривая линія, неизмѣнно связанная съ твердымъ тѣломъ, должна постоянно прикасаться къ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (872)$$

въ одной точкѣ; точка прикосновенія можетъ измѣнять свое мѣсто, какъ на кривой, такъ и на поверхности.

Взявъ центръ инерціи или другую подходящую точку тѣла за точку $Ю$, выразимъ относительныя координаты точекъ кривой линіи въ функціяхъ длины дуги кривой:

$$\xi = \varphi_1(s),\ \ \eta = \varphi_2(s),\ \ \zeta = \varphi_3(s), \ldots\ldots (873)$$

гдѣ s считается отъ опредѣленной точки кривой въ опредѣленную сторону по ней.

Зная длину s_0, опредѣляющую точку прикосновенія, опредѣлимъ относительныя координаты $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ этой точки по формуламъ (873), а абсолютныя координаты по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_c + \lambda_x \varphi_1(s_0) + \mu_x \varphi_2(s_0) + \nu_x \varphi_3(s_0) \\ y_0 &= y_c + \lambda_y \varphi_1(s_0) + \mu_y \varphi_2(s_0) + \nu_y \varphi_3(s_0) \\ z_0 &= z_c + \lambda_z \varphi_1(s_0) + \mu_z \varphi_2(s_0) + \nu_z \varphi_3(s_0) \end{aligned}\right\} \ldots (874)$$

эти абсолютныя координаты должны удовлетворять уравненію:

$$f(x_0, y_0, z_0, t) = 0 \ldots\ldots\ldots (872, \text{bis})$$

Въ точкѣ прикосновенія касательная къ кривой должна быть перпендикулярна къ нормали, возстановленной къ поверхности (872) изъ этой точки, т. е.:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{dy_0}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial z_0}\frac{dz_0}{ds_0} = 0 \ldots\ldots\ldots (875)$$

Предположимъ, что въ равенствахъ (872, bis) и (875) координаты x_0, y_0, z_0 замѣнены выраженіями (874) и что послѣ этого уравненіе (875) рѣшено относительно s_0, такъ что послѣднее выразится функціею

$$s_0 = \Phi(t, x_c, y_c, z_c, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \ldots \nu_z)$$

отъ показанныхъ здѣсь перемѣнныхъ; положимъ далѣе, что эта функція подставлена вмѣсто s_0 въ уравненіе (872, bis), тогда это послѣднее обратится въ уравненіе разсматриваемой нами связи.

Если надо будетъ получить частную производную отъ первой части уравненія связи по одной изъ перемѣнныхъ t, x_c, y_c, z_c, λ_x, ... ν_z, напримѣръ по x_c, то придется ее составлять слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial s}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial s_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial s_0} + \frac{\partial f}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial s_0}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_c},$$

но въ силу равенства (875) множитель у $\frac{\partial \Phi}{\partial x_c}$ равенъ нулю, а потому искомая частная производная равняется производной отъ f по x_0; точно также убѣдимся, что:

$$\frac{\partial 8}{\partial \lambda_x} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \xi_0,$$

и т. д. Принявъ это во вниманіе, мы легко найдемъ, что реакція этой связи состоитъ изъ одной силы, приложенной къ тѣлу въ точкѣ ξ_0, η_0, ζ_0; сила эта направлена по нормали къ поверхности (872) въ той же точкѣ и равна:

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)^2}.$$

4) Твердое тѣло ограничено въ своемъ движеніи тѣмъ, что нѣкоторая поверхность $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$, неизмѣнно связанная съ тѣломъ, должна постоянно прикасаться къ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

въ одной точкѣ; точка прикосновенія можетъ измѣнять свое мѣсто, какъ на первой, такъ и на второй поверхности.

Означимъ черезъ x_0, y_0, z_0 абсолютныя и черезъ ξ_0, η_0, ζ_0 относительныя координаты точки прикосновенія; эти координаты связаны между собою равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_c + \xi_0\lambda_x + \eta_0\mu_x + \zeta_0\nu_x, \\ y_0 &= y_c + \xi_0\lambda_y + \eta_0\mu_y + \zeta_0\nu_y, \\ z_0 &= z_c + \xi_0\lambda_z + \eta_0\mu_z + \zeta_0\nu_z, \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (876)$$

и должны удовлетворять уравненіямъ:

$$F(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0, \dots\dots\dots\dots (877)$$

$$f(x_0, y_0, z_0, t) = 0. \dots\dots\dots\dots (878)$$

Кромѣ того, въ точкѣ прикосновенія, нормаль къ поверхности (878) должна совпадать съ нормалью къ поверхности (877), т. е.:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}\lambda_x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\lambda_y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\lambda_z}{\frac{\partial F}{\partial \xi_0}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}\mu_x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\mu_y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\mu_z}{\frac{\partial F}{\partial \eta_0}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}\nu_x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\nu_y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\nu_z}{\frac{\partial F}{\partial \zeta_0}} \ldots\ldots\ldots\ldots (879)$$

Рѣшивъ три уравненія (877) и (879) относительно ξ_0, η_0, ζ_0:

$$\xi_0 = \Phi_1(x_c, y_c, z_c, \lambda_x, \lambda_{y_c}, \ldots \nu_z, t), \ \eta_0 = \Phi_2, \ \zeta_0 = \Phi,$$

и подставивъ эти выраженія въ уравненіе (878), получимъ уравненіе разсматриваемой связи:

$$\vartheta = f((x_c + \lambda_x\Phi_1 + \mu_x\Phi_2 + \nu_x\Phi_3), (y_c + \lambda_y\Phi_1 + \mu_y\Phi_2 +$$

$$+ \nu_y\Phi_3), (z_c + \lambda_z\Phi_1 + \mu_z\Phi_2 + \nu_z\Phi_3), t) = 0 \ldots (880)$$

Производная первой части уравненія связи по одной изъ перемѣнныхъ x_c, y_c, z_c, λ_x, $\lambda_y, \ldots \nu_z$, t, напримѣръ по x_c, выразится такъ:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\lambda_x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\lambda_y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\lambda\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_c} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\mu_x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\mu_y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\mu_z\right)\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_c} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\nu_x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\nu_y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\nu_z\right)\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_c},$$

или, на основаніи равенствъ (879), такъ:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_0}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_c} + \frac{\partial F}{\partial \eta_0}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_c} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_0}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_c}\right)\frac{\Delta f}{\Delta F},$$

но изъ равенства (877) слѣдуетъ, что полная производная отъ F по x_c равна нулю, поэтому:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0}.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$(\Lambda_c)_x = \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial z_0}(y_0 - y_c) - \frac{\partial f}{\partial y_0}(z_0 - z_c)\right],$$

и т. д. Слѣдовательно, реакція этой связи состоитъ изъ одной силы, приложенной къ тѣлу въ точкѣ прикосновенія поверхностей; эта сила направлена по общей нормали и равна

$$\lambda \Delta f = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)^2}.$$

Если составимъ механизмъ изъ пяти твердыхъ тѣлъ I, II, III, IV, V, сочлененныхъ такъ, чтобы каждое изъ нихъ имѣло одну степень свободы въ относительномъ движеніи по отношенію къ непосредственно предыдущему тѣлу этого ряда, и если тѣло I имѣетъ одну степень свободы абсолютнаго движенія, то тѣло V будетъ имѣть пять степеней свободы абсолютнаго движенія.

5) Возьмемъ, напримѣръ, механизмъ, изображенный на чертежѣ 97-мъ; его составляютъ слѣдующія тѣла:

I. Крестъ K, который можетъ только вращаться вокругъ неподвижной оси OY; ось $Z_2OZ'_2$, перпендикулярная къ оси OY или $Z_1OZ'_1$ вставлена въ гнѣзда, сдѣланныя въ тѣлѣ II.

II. Вилка BB въ относительномъ движеніи по отношенію къ тѣлу I можетъ только вращаться вокругъ оси $Z_2OZ'_2$; четырехгранная гильза L составляетъ одно цѣлое съ этою вилкою. Въ этой вилкѣ свободно скользитъ четырехгранный стержень SS.

III. Вилка B_2B_2, составляющая одно цѣлое со стержнемъ SS, имѣетъ цилиндрическія гнѣзда, служащія подшипниками оси $Z_4Z'_4$, параллельной оси $Z_2Z'_2$ и составляющей одно цѣлое съ кольцомъ IV.

IV. Кольцо это, въ относительномъ движеніи по отношенію къ тѣлу III, можетъ только вращаться вокругъ оси $Z_4Z'_4$; это кольцо имѣетъ цилиндрическія гнѣзда, служащія подшипниками оси ZZ', перпендикулярной къ оси $Z_4Z'_4$ и составляющей одно цѣлое съ тѣломъ V.

Тѣло V, въ относительномъ движеніи по отношенію къ кольцу IV, можетъ только вращаться вокругъ оси ZZ'.

Оси Z_1Z_1' и Z_2Z_2' пересѣкаются въ началѣ координатъ O, а оси Z_4Z_4' и ZZ'— въ точкѣ $Ю$; черезъ точки $Ю$ и O проходитъ направленіе оси стержня SS.

Разсмотримъ характеръ свободы абсолютнаго движенія каждаго тѣла I, II, III, IV, V.

Тѣло I. Точка O этого тѣла должна оставаться въ началѣ координатъ и ось $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_1'$ должна совпадать съ осью $OУ$, поэтому тѣло это имѣетъ только одну степень свободы: ось $\mathbf{Z}_2O\mathbf{Z}_2'$ можетъ составлять произвольный уголъ $ѳ_1 = \mathbf{Z}_2'OZ$ съ осью $Z^{овъ}$.

Тѣло II. Точка O этого тѣла должна оставаться въ началѣ координатъ, а ось $\mathbf{Z}_2O\mathbf{Z}_2'$ — въ плоскости XZ; поэтому это тѣло имѣетъ двѣ степени свободы: ось $O\mathbf{Z}_2'$ можетъ составлять произвольный уголъ $ф_2 = ѳ_1$ съ осью $Z^{овъ}$ и плоскость $\mathbf{Z}_2'OЮ$ можетъ составлять произвольный уголъ $ѳ_2$ съ плоскостью $ZO\mathbf{Z}_2'$ или ZOX. Косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ $OЮ$ (см. черт. 97) съ осями $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, $Z^{овъ}$, получатся изъ формулъ (47), (48) и (49) кинематической части, если примемъ ось $O\mathbf{Z}_2'$ тѣла II за ось $\mathbf{Z}$, а направленіе $OЮ$ — за ось $\mathbf{Ξ}$; подставивъ $ф_2 = ѳ_1$, $ж_2 = 0$, получимъ:

$$\cos(OЮ,\ X) = \cos ѳ_2 \cos ѳ_1,\ \cos(OЮ,\ У) = \sin ѳ_2,$$
$$\cos(OЮ,\ Z) = -\cos ѳ_2 \sin ѳ_1.$$

Тѣло III имѣетъ три степени свободы.

Тѣло IV имѣетъ четыре степени свободы: точка $Ю$, координаты которой можно выразить такъ:

$$x_ю = r_ю \cos ѳ_2 \cos ѳ_1,\ y_ю = r_ю \sin ѳ_2,\ z_ю = -r_ю \cos ѳ_2 \sin ѳ_1,$$

($r_ю$ означаетъ величину разстоянія точки $Ю$ отъ точки O), можетъ имѣть произвольное положеніе, на сколько позволяетъ длина стержня SS, и плоскость $\mathbf{Z}'Ю\mathbf{Z}_4'$ можетъ составлять произвольный уголъ $ѳ_4$ съ плоскостью, проведенною черезъ ось $Ю\mathbf{Z}_4'$ параллельно оси $Z^{овъ}$. Такъ какъ ось $\mathbf{Z}_4Ю\mathbf{Z}_4'$ параллельна оси $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2'$, то послѣдняя плоскость должна быть параллельна плоскости XZ и кромѣ того уголъ $ф_4$, составляемый осью $Ю\mathbf{Z}_4'$ съ осью $Z^{овъ}$, долженъ быть равенъ $ѳ_1$, поэтому двѣ связи, ограничивающія свободу движенія твердаго тѣла IV, выражаются слѣдующими равенствами:

$$ж_4 = 0,\ \operatorname{tg} ф_4 = \operatorname{tg} ѳ_1 = -\frac{z_ю}{x_ю},$$

гдѣ $ф_4$ и $ж_4$ суть углы, опредѣляющіе направленіе оси $Ю\mathbf{Z}_4'$ тѣла IV.

Косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ $Ю\mathbf{Z}'$ съ осями $X^{овъ}$, $У^{овъ}$, $Z^{овъ}$, получатся изъ формулъ (47), (48), (49) кинематической части, если въ нихъ замѣнимъ $ф$, $ж$ и $ѳ$ величинами $ф_4 = ѳ_1$, $ж_4 = 0$ и $ѳ_4$; получимъ:

$$\cos(Ю\mathbf{Z}', X) = \cos ѳ_4 \cos ѳ_1,\ \cos(Ю\mathbf{Z}',\ У) = \sin ѳ_4,$$
$$\cos(Ю\mathbf{Z}', Z) = -\cos ѳ_4 \sin ѳ_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (881)$$

По устройству механизма, разстояніе $r_ю$ не можетъ выходить изъ нѣкоторыхъ предѣловъ; а именно, когда вилка B_2B_2 упрется въ верхній конецъ гильзы L — разстояніе $r_ю$ получитъ наименьшее значеніе, когда же нижнее утолщеніе стержня S задержится нижнимъ концомъ гильзы L, разстояніе $r_ю$ получитъ наибольшее значеніе.

Пока $r_ю$ заключается внутри, а не на границахъ этихъ предѣловъ, твердое тѣло V имѣетъ пять степеней свободы; составимъ уравненіе связи, представляемой описаннымъ механизмомъ при промежуточныхъ значеніяхъ $r_ю$.

Означимъ черезъ $ф$ и $ж$ углы, опредѣляющіе направленіе оси $ЮZ'$ твердаго тѣла V; косинусы угловъ, составляемыхъ этою осью съ осями $Z^{овъ}$ и $X^{овъ}$, выразятся съ одной стороны въ углахъ $ф$ и $ж$ по формуламъ:

$$\nu_z = \cos ф,\ \nu_x = \sin ф \cos ж,$$

а съ другой стороны въ углахъ $э_1$ и $э_4$ по формуламъ (881), поэтому:

$$\operatorname{tg} ф \cos ж = -\operatorname{cotg} э_1 = \frac{x_ю}{z_ю};$$

откуда получимъ уравненіе связи:

$$z_ю \sin ф \cos ж - x_ю \cos ф = 0 \dots\dots\dots (882)$$

$$z_ю \nu_x - x_ю \nu_z = 0 \dots\dots\dots (882, \text{bis})$$

Проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ главнаго вектора V и главнаго момента $\Lambda_ю$ реакцій этой связи суть:

$$V_x = -\lambda\nu_z,\ V_y = 0,\ V_z = \lambda\nu_x,$$

$$(\Lambda_ю)_x = -\lambda x_ю \nu_y,\ (\Lambda_ю)_y = \lambda(z_ю\nu_z + x_ю\nu_x),\ (\Lambda_ю)_z = -\lambda z_ю \nu_y.$$

Главный векторъ реакцій этой связи пропорціоналенъ синусу угла, составляемаго направленіемъ оси $ЮZ'$ съ осью $Y^{овъ}$, и заключается въ плоскости параллельной плоскости XZ; а величина момента $\Lambda_ю$ пропорціональна проэкціи $r_ю$ на плоскость XZ:

$$V = \lambda\sqrt{\nu_x^2 + \nu_z^2} = \lambda\sqrt{1 - \nu_y^2} = \lambda \sin(Z', Y),$$

$$\Lambda_ю = \lambda\sqrt{x_ю^2 + z_ю^2}.$$

6) Разсмотримъ такимъ же образомъ другой механизмъ, изображенный на чертежѣ 98-мъ. Онъ состоитъ также изъ пяти тѣлъ.

Тѣло I есть такой же врестъ, какъ и въ предыдущемъ механизмѣ.

Тѣло II состоитъ изъ двухъ вилокъ B_1B_1 и B_2B_2, неизмѣнно связанныхъ между собою стержнемъ S; ось $Z_3Z'_3$ тѣла III, поддерживаемаго вилкою B_2B_2, параллельна оси $Z_2Z'_2$.

Тѣло III, замѣняющее собою кольцо предыдущаго механизма, есть крестъ, центръ котораго $Ю$ находится въ постоянномъ разстояніи l отъ начала координатъ O, а ось $Z_4Z'_4$ перпендикулярна къ оси $Z_3Z'_3$.

Тѣло IV, состоящее изъ вилки B_4B_4 съ прикрѣпленнымъ къ ней стержнемъ S_4, имѣетъ четыре степени свободы, такъ какъ оно подчинено двумъ условіямъ:

$$x_ю^2 + y_ю^2 + z_ю^2 - l^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (883)$$

$$x_ю \sin ф_4 \cos ж_4 - z_ю \cos ф_4 = 0, \ldots\ldots\ldots (884)$$

гдѣ $ф_4$, $ж_4$ суть углы, опредѣляющіе направленіе оси $ЮZ'_4$; первое изъ этихъ условій выражаетъ, что точка $Ю$ должна быть въ постоянномъ разстояніи отъ точки O, второе же условіе тождественно съ условіемъ (882) предыдущаго примѣра.

Ось $ЮZ$ стержня S_4 перпендикулярна къ оси $ЮZ'_4$; означимъ буквою $ф$ уголъ (см. черт. 99), составляемый направленіемъ оси $ЮZ$ съ осью $Z^{овъ}$, буквою $ж$ — уголъ, составляемый плоскостью $Z'ЮZ$ (черт. 99) съ плоскостью $Z'ЮX'$ и буквою ψ — уголъ, составляемый плоскостью $Z'ЮZ$ съ плоскостью $Z'_4ЮZ$. По извѣстнымъ формуламъ сферической тригонометріи, примѣненнымъ къ сферическому треугольнику $ZZ'Z'_4$, въ которомъ дуга Z'_4Z заключаетъ 90°, получимъ:

$$\cos ф_4 = \sin ф \cos \psi, \ldots\ldots\ldots\ldots (885)$$

$$\sin(ж - ж_4) = \frac{\sin \psi}{\sin ф_4}, \quad \cos(ж - ж_4) = -\operatorname{cotg} ф \operatorname{cotg} ф_4;$$

изъ послѣднихъ двухъ равенствъ выведемъ слѣдующее:

$$\sin ф_4 \cos ж_4 = \sin \psi \sin ж - \operatorname{cotg} ф \cos ф_4 \cos ж,$$

а отсюда, на основаніи перваго (885), получимъ:

$$\sin ф_4 \cos ж_4 = \sin \psi \sin ж - \cos \psi \cos ж \cos ф. \ldots (886)$$

На стержнѣ S нарѣзанъ лѣвовинтовой винтъ, шагъ котораго равенъ h; тѣло V просверлено насквозь и въ отверстіи нарѣзана винтовая гайка,

соотвѣтствующая винту стержня. Вслѣдствіе этого тѣло V, въ относительномъ движеніи по отношенію къ тѣлу IV, можетъ совершать винтовое движеніе шага h вдоль по оси стержня.

Пусть C есть какая либо точка тѣла V, находящаяся на оси стержня, $C\Xi$ — ось, неизмѣнно связанная съ тѣломъ V и выбранная такъ, что если бы точка C совпала бы съ точкою $Ю$, то плоскость $\mathsf{Z}C\Xi$ совпала бы съ плоскостью $\mathsf{Z}Ю\mathsf{Z}_4$ и ось $C\Xi$ — съ осью $Ю\mathsf{Z}_4$ (направленіе $Ю\mathsf{Z}_4$ прямопротивоположно направленію $Ю\mathsf{Z}'_4$); въ этомъ положеніи плоскость $\mathsf{Z}C\Xi$ составляла бы съ плоскостью $\mathsf{Z}ЮZ'_1$ уголъ ψ (см. черт. 99; направленіе $ЮZ'_1$ параллельно направленію отрицательной оси $Z^{\text{овъ}}$).

Для того, чтобы изъ этого положенія перемѣстить точку C тѣла V на разстояніе $\varkappa$ по оси Z отъ точки $Ю$, нужно повернуть тѣло вокругъ оси $Ю\mathsf{Z}$ въ сторону, указанную стрѣлкою (на черт. 98 и 99), на уголъ, равный:

$$\varkappa\,\frac{2\pi}{h};$$

послѣ этого плоскость $\Xi C\mathsf{Z}$ будетъ составлять уголъ:

$$\varkappa\,\frac{2\pi}{h}+\psi=э\,. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(887)$$

съ плоскостью $Z'_1Ю\mathsf{Z}$.

Координаты точки C выразятся въ координатахъ точки $Ю$, въ длинѣ $\varkappa$ и въ косинусахъ угловъ, составляемыхъ направленіемъ оси $Ю\mathsf{Z}$ съ осями координатъ:

$$\left.\begin{aligned} x_c&=x_ю+\varkappa\sin ф\cos ж=x_ю+\varkappa\nu_x,\\ y_c&=y_ю+\varkappa\sin ф\sin ж=y_ю+\varkappa\nu_y,\\ z_c&=z_ю+\varkappa\cos ф=z_ю+\varkappa\nu_z.\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(888)$$

Твердое тѣло V имѣетъ пять степеней свободы абсолютнаго движенія; чтобы получить уравненіе связи, стѣсняющей свободу его движенія, надо исключить величины $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф_4$, $ж_4$, $\varkappa$, ψ изъ равенствъ (883)—(888); исключивъ первыя пять величинъ, получимъ три совокупныя равенства:

$$x_c^2+y_c^2+z_c^2-2\varkappa(x_c\nu_x+y_c\nu_y+z_c\nu_z)+\varkappa^2-l^2=0,\ldots(889)$$

$$\begin{aligned}(x_c-\varkappa\nu_x)(\sin ж\sin\psi-\cos ж\cos\psi\cos ф)&-\\ -(z_c-\varkappa\nu_z)\sin ф\cos\psi=0,\;&\ldots\ldots\ldots\;(884)\end{aligned}$$

$$2\pi\varkappa=h\,(э-\psi),\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(885)$$

которыя, по исключеніи изъ нихъ $\varkappa$ и ψ, дадутъ уравненіе связи, воспроизводимой разсмотрѣннымъ нами механизмомъ *).

7) Если въ предыдущемъ механизмѣ высота хода винта стержня S_4 равна нулю, такъ что тѣло V можетъ свободно вращаться вокругъ оси Z, но точка C должна оставаться въ совпаденіи съ опредѣленною точкою оси $Ю\mathsf{Z}$ стержня S_4, то въ этомъ случаѣ $\varkappa$ постоянно, уголъ произволенъ и независимъ, а связь выражается уравненіемъ (889).

Проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ главнаго вектора и главнаго момента (вокругъ C) реакцій этой связи выразятся такъ:

$$V_x = 2\lambda(x_c - \varkappa\nu_x) = 2\lambda x_ю,\ V_y = 2\lambda y_ю,\ V_z = 2\lambda z_ю,$$
$$(\Lambda_c)_x = 2\lambda(y_c\nu_z - z_c\nu_y)\varkappa,\ (\Lambda_c)_y = 2\lambda(z_c\nu_x - x_c\nu_z)\varkappa,$$
$$(\Lambda_c)_z = 2\lambda(x_c\nu_y - y_c\nu_x)\varkappa;$$

слѣдовательно, главный векторъ направленъ параллельно $\overline{OЮ}$ или $\overline{ЮO}$, а главный моментъ перпендикуляренъ къ поскости $OЮ\mathsf{Z}$, а стало быть и къ направленію главнаго вектора.

§ 131. Примѣры рѣшенія вопросовъ относительно движенія тяжелыхъ тѣлъ по плоскостямъ.

Примѣръ 105. Волчокъ на гладкой горизонтальной плоскости.

Подъ волчкомъ подразумѣваемъ тѣло вращенія, масса котораго расположена симметрично вокругъ оси вращенія, такъ что центръ инерціи его находится на этой оси; тѣло это снабжено остріемъ, находящимся на оси симметріи, которымъ оно опирается на плоскость: $z = 0$.

Ось $Z^{овъ}$ направимъ противоположно направленію силы тяжести и положимъ, что остроконечіе находится на отрицательной оси Z въ разстояніи l отъ центра инерціи, такъ что: $\xi_k = 0$, $\eta_k = 0$, $\zeta_k = -l$.

Аналитическое выраженіе связи, ограничивающей свободу движенія твердаго тѣла, въ настоящемъ случаѣ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$z_c - l\nu_z \geqslant 0 \quad \text{или} \quad z_c - l\cos\vartheta \geqslant 0.$$

Задаваемыя силы суть силы тяжести; главный моментъ ихъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю.

*) Этотъ механизмъ описанъ въ § 201-мъ перваго изданія книги: A Treatise on Natural Philosophy Томсона и Тэта.

Составимъ для этого случая дифференціальныя уравненія движенія по формуламъ (859):

$$Mx_c''=0,\ My_c''=0,\ Mz_c''=-Mg+\lambda$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \phi'}\right)}{dt}=\frac{\partial T}{\partial \phi}+\lambda l\sin\phi;\ \ \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ж'}\right)}{dt}=0;\ \ \frac{dr}{dt}=0,$$

гдѣ

$$T=\frac{M}{2}\left[(x'_c)^2+(y'_c)^2+(z'_c)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\mathfrak{A}_c((ж')^2\sin^2\phi+(\phi')^2)+\mathfrak{C}_c r^2\right],$$

$$r=ж'\cos\phi+э'.$$

Первыя два дифференціальныя уравненія даютъ интегралы:

$$x_c=C_1t+\Gamma_1,\ y_c=C_2t+\Gamma_2,\ \ldots\ldots\ \textbf{(890)}$$

пятое и шестое — интегралы:

$$\mathfrak{A}_c ж'\sin^2\phi+\mathfrak{C}_c r\cos\phi=C_3\ \ldots\ldots\ \textbf{(891)}$$

$$ж'\cos\phi+э'=r=C_4\ \ldots\ldots\ \textbf{(892)}$$

Кромѣ того, такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенціалъ: $-Mgz_c$, а выраженіе связи не заключаетъ времени явнымъ образомъ, то имѣетъ мѣсто законъ живой силы, выражаемый интеграломъ:

$$T=h-Mgz_c;$$

но $x_c'=C_1$, $y_c'=C_2$, и притомъ, пока остріе остается на плоскости:

$$z_c=l\cos\phi,\ \ z_c'=-l\phi'\sin\phi;$$

поэтому послѣдній интегралъ получитъ слѣдующій видъ:

$$(Ml^2\sin^2\phi+\mathfrak{A}_c)(\phi')^2+\mathfrak{A}_c(ж')^2\sin^2\phi=$$

$$=2h-M(C_1^2+C_2^2)-\mathfrak{C}_cC_4^2-2Mgl\cos\phi\ \ldots\ \textbf{(893)}$$

Далѣе должно поступать подобнымъ же образомъ, какъ и въ вопросѣ параграфа 126-го (стр. 592—605). Не входя въ разсмотрѣніе различныхъ видовъ движенія волчка, ограничимся обзоромъ только нижеслѣдующихъ двухъ видовъ:

a. Въ начальный моментъ ($t=0$) уголъ ϕ имѣетъ величину ϕ_0 *) и волчку сообщена угловая скорость $э'_0$ вокругъ оси симметріи; начальныя значенія угловыхъ скоростей ϕ', $ж'$ и линейныхъ скоростей x_c', y_c', z_c' равны нулю.

Въ этомъ случаѣ постоянныя производныя будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$C_1=0,\ C_2=0,\ r=C_4=э_0',\ C_3=\mathfrak{C}_c C_4\cos\phi_0$$

$$2h-\mathfrak{C}_c C_4^2=2Mgl\cos\phi_0.$$

Прецессія выразится такъ:

$$ж'=\frac{\mathfrak{C}_c C_4}{\mathfrak{A}_c}\,\frac{(\cos\phi_0-\cos\phi)}{\sin^2\phi}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{894})$$

Исключивъ прецессію изъ (893) и (894), получимъ дифференціальное уравненіе:

$$(\mathfrak{A}_c+Ml^2\sin^2\phi)\sin^2\phi\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=$$

$$=(\cos\phi_0-\cos\phi)\left[2Mgl\sin^2\phi-\frac{\mathfrak{C}_c^2C_4^2}{\mathfrak{A}_c}(\cos\phi_0-\cos\phi)\right]\ldots(\mathbf{895})$$

Уголъ ϕ можетъ имѣть только такія значенія, которыя дѣлаютъ вторую часть этого уравненія положительною. При ϕ меньшемъ ϕ_0 первый множитель второй части менѣе, а второй — болѣе нуля; при $\phi=\phi_0$ первый множитель обращается въ нуль, второй имѣетъ положительную величину; при дальнѣйшемъ возрастаніи ϕ первый множитель становится положительнымъ и второй продолжаетъ оставаться положительнымъ до тѣхъ поръ, пока не обратится въ нуль; а онъ

*) Предполагается, что этотъ уголъ менѣе того угла, при которомъ волчокъ касается плоскости своею боковою поверхностью.

непремѣнно обратится въ нуль при нѣкоторомъ углѣ ϕ_1, меньшемъ π, потому что при $\phi = \pi$ онъ обращается въ отрицательную величину:

$$-\frac{\mathfrak{C}_c^2 C_4^2}{\mathfrak{A}_c}(\cos\phi_0 + 1).$$

Уголъ ϕ_1 тѣмъ ближе къ ϕ_0, чѣмъ болѣе отношеніе:

$$n = \frac{\mathfrak{C}_c^2 C_4^2}{2\mathfrak{A}_c Mlg}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что вторая часть уравненія (895) обращается въ нуль при $\phi = \phi_0$ и при $\phi = \phi_1$, а при всѣхъ промежуточныхъ углахъ имѣетъ значенія положительныя.

По этому при $\phi = \phi_0$ нутація ϕ' равна нулю, а затѣмъ становится положительною; если ϕ_1 менѣе того угла, при которомъ волчокъ ложится на плоскость, то уголъ ϕ возрастаетъ до ϕ_1; когда онъ достигнетъ этого предѣла, нутація снова обратится въ нуль; послѣ этого нутація становится отрицательною и уголъ ϕ непрерывно уменьшается отъ ϕ_1 до ϕ_0, и т. д.

Изъ равенства (894) видно, что прецессія $\text{ж}'$ обращается въ нуль при $\phi = \phi_0$, а при прочихъ положеніяхъ волчка имѣетъ положительныя значенія (если $C_4 > 0$) и достигаетъ наибольшей величины при $\phi = \phi_1$.

Если ϕ_1 болѣе того угла, при которомъ волчокъ ложится на плоскость, то при первомъ же періодѣ измѣненія угла ϕ волчокъ упадетъ и движеніе его получитъ совершенно иной видъ.

Такъ какъ $z_c = l\cos\phi$, а x_c и y_c постоянны, то кривая линія, описываемая остріемъ волчка, будетъ расположена между двумя концентрическими кругами радіусовъ $\rho_0 = l\sin\phi_0$ и $\rho_1 = l\sin\phi_1$; на внутреннемъ кругѣ находятся точки возврата кривой (черт. 100).

b. Волчокъ можетъ совершать движеніе несопровождаемое нутаціею; для этого необходимо, чтобы $(z_c)_0 = l_0\cos\phi_0$ было двойнымъ корнемъ уравненія $S_1 = 0$, гдѣ S_1 есть многочленъ третьей степени относительно z_c, находящійся во второй части уравненія:

$$(\mathfrak{A}_c + M(l^2 - z_c^2))\left(\frac{dz_c}{dt}\right)^2 = -2Mg\Big[(z_c - b)(l^2 - z_c^2) + \\ + nl(D - z_c)^2\Big]; \ldots (896)$$

здѣсь:

$$b = \frac{2h - M(C_1^2 + C_2^2) - \mathfrak{C}_c C_4^2}{2Mg}, \quad D = \frac{C_3 l}{\mathfrak{C}_c C_4}.$$

Этотъ многочленъ:

$$S_1 = (z_c - b)(l^2 - z_c^2) + nl(D - z_c)^2$$

сходенъ съ многочленомъ R^3S:

$$R^3S = (\mathfrak{z} - b)(R^2 - \mathfrak{z}^2) - F(D - \mathfrak{z})^2$$

второй части дифференціальнаго уравненія (835, A) въ вопросѣ параграфа 126-го; разница только въ томъ, что гдѣ во второмъ многочленѣ стоятъ величины $\mathfrak{z}$, R, F, тамъ въ первомъ многочленѣ стоятъ величины z_c, l, $(-nl)$.

Вслѣдствіе такого сходства вида многочленовъ S_1, R^3S, мы можемъ въ занимающемъ насъ теперь вопросѣ прямо воспользоваться результатами, полученными въ концѣ § 126-го; а именно, мы вправѣ заключить слѣдующее:

Для того, чтобы уголъ наклоненія волчка къ вертикальной линіи оставался постоянно равнымъ ϕ_0 во все время движенія, необходимо, чтобы постоянная D имѣла одно изъ двухъ слѣдующихъ значеній:

$$\frac{D - (z_c)_0}{l^2 - (z_c)_0^2} = \frac{1}{2(z_c)_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2(z_c)_0}{nl}}\right),$$

тогда ось Z будетъ совершать постоянную прецессію, имѣющую одну изъ двухъ слѣдующихъ величинъ:

$$ж_1' = \frac{l\,\mathfrak{C}_c C_4}{2\mathfrak{A}_c (z_c)_0}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2(z_c)_0}{nl}}\right) \ldots\ldots (897, \mathrm{a})$$

$$ж_2' = \frac{l\,\mathfrak{C}_c C_4}{2\mathfrak{A}_c (z_c)_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2(z_c)_0}{nl}}\right) \ldots\ldots (897, \mathrm{b})$$

Если вращеніе волчка вокругъ оси Z настолько быстро, что можно пренебречь квадратами и высшими степенями отношенія $(2(z_c)_0 : nl)$, то, разложивъ корень по восходящимъ степенямъ этого отношенія и отбросивъ высшія степени, получимъ слѣдующія приближенныя выраженія для $ж_1'$ и $ж_2'$:

$$ж_1' = \frac{l\,\mathfrak{C}_c C_4}{\mathfrak{A}_c (z_c)_0} - \frac{Mlg}{\mathfrak{C}_c C_4}; \quad ж_2' = \frac{Mgl}{\mathfrak{C}_c C_4} \ldots\ldots (898)$$

Первая изъ этихъ величинъ прямо пропорціональна угловой скорости вращенія вокругъ оси симметріи, вторая — обратно пропорціональна ей; при весьма большихъ величинахъ C_4 обыкновенно устанавливается прецессія $ж_2'$, такъ какъ для этого требуется малая начальная угловая скорость $(ж_2')_0$ вокругъ оси Z и притомъ тѣмъ меньшая, чѣмъ больше C_4.

При движеніи волчка съ прецессіею $ж_2'$ угловая скорость Ω составляетъ съ осью $\mathbf{Z}$ уголъ, синусъ котораго равенъ:

$$\sin(\Omega, \mathbf{Z}) = \frac{ж'_2 \sin ф_0}{C_4}\left[1 + \left(\frac{ж'_2 \sin ф_0}{C_4}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}};$$

этотъ уголъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше величина C_4; если x_c и y_c постоянны, то остріе волчка описываетъ на гладкой горизонтальной плоскости кругъ радіуса $l \sin ф_0$.

Примѣръ 106-й. Однородный тяжелый круговой цилиндръ кружится на гладкой горизонтальной плоскости, опираясь на нее ребромъ одного изъ своихъ основаній.

Пусть R есть величина радіуса основанія, а $2H$ — высота цилиндра; примемъ центръ инерціи за начало осей Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$.

Очевидно, что относительныя координаты точки прикосновенія периметра нижняго основанія съ горизонтальною плоскостью выразятся такъ:

$$\xi_0 = R\cos э,\ \eta_0 = -R\sin э,\ \zeta_0 = -H,$$

потому что эта точка находится въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось $\mathbf{Z}$.

Подставивъ эти выраженія въ равенство $z_0 = 0$, т. е. въ

$$z_c + \lambda_z \xi_0 + \mu_z \eta_0 + \nu_z \zeta_0 = 0,$$

получимъ уравненіе связи:

$$z_c - R\sin ф - H\cos ф = 0.$$

Здѣсь, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, проэкція центра инерціи на горизонтальную плоскость движется равномѣрно и прямолинейно (или же находится въ покоѣ), — проэкція угловой скорости на ось $\mathbf{Z}$ сохраняетъ постоянную величину, проэкція момента $л_c$ на ось Z постоянна и, наконецъ, имѣетъ мѣсто законъ живой силы. Интегралы (890), (891) и (892) имѣютъ тотъ-же самый видъ, какъ и въ предыдущей за-

дачѣ, а интегралъ, выражающій законъ живой силы, имѣетъ теперь слѣдующій видъ:

$$M(R\cos\phi - H\sin\phi)^2(\phi')^2 + \mathfrak{A}_c\Big[(\varkappa')^2\sin^2\phi + (\phi')^2\Big] + \mathfrak{C}_c C_4^2 =$$
$$= 2h_1 - Mg(R\sin\phi + H\cos\phi).$$

Исключивъ отсюда и изъ интеграла (891) производную $\varkappa'$, получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе для опредѣленія зависимости между ϕ и t:

$$\Big[\mathfrak{A}_c + M(R\cos\phi - H\sin\phi)^2\Big]\sin^2\phi\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 =$$
$$= \Big(2h_1 - \mathfrak{C}_c C_4^2 - Mg(R\sin\phi + H\cos\phi)\Big)\sin^2\phi - \frac{(C_3 - \mathfrak{C}_c C_4\cos\phi)^2}{\mathfrak{A}_c}.$$

Въ этомъ примѣрѣ ограничимся разсмотрѣніемъ только тѣхъ движеній цилиндра, которыя не сопровождаются нутаціею.

Для того, чтобы ϕ было постоянно равно ϕ_0, необходимо, чтобы во все время движенія было: $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$, а слѣдовательно и $z_c'' = 0$; при этихъ условіяхъ дифференціальныя уравненія:

$$Mz_c'' = -Mg + \lambda,\ \mathfrak{A}_c\phi'' = \frac{\partial T}{\partial \phi} - \lambda(R\cos\phi - H\sin\phi)$$

обратятся въ слѣдующія равенства:

$$Mg = \lambda,\ \mathfrak{A}_c(\varkappa')^2\sin\phi_0\cos\phi_0 - \mathfrak{C}_c C_4\varkappa'\sin\phi_0 - \lambda(R\cos\phi_0 - H\sin\phi_0) = 0;$$

исключивъ изъ нихъ λ, получимъ уравненіе, выражающее зависимость между $\varkappa'$ и ϕ_0; это уравненіе даетъ двѣ величины для прецессіи:

$$\varkappa' = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{C}_c C_4}{\mathfrak{A}_c\cos\phi_0}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4M\mathfrak{A}_c g\cos\phi_0}{\mathfrak{C}_c^2 C_4^2\sin\phi_0}(R\cos\phi_0 - H\sin\phi_0)}\right) \ldots \textbf{(899)}$$

Если проэкція центра инерціи на плоскость XY неподвижна, то скорость точки прикосновенія (ξ_0, η_0, ζ_0) ребра основанія съ горизонтальною плоскостью перпендикулярна къ радіусу, соединяющему эту точку съ точкою $(x_c, y_c, 0)$ и величина скорости равна $(R\vartheta' + \varkappa'\rho_0)$; здѣсь

$$\rho_0 = R\cos\phi_0 - H\sin\phi_0,\ \vartheta' = C_4 - \varkappa'\cos\phi_0.$$

Примѣръ 107-й. Однородное тяжелое твердое тѣло, ограниченное поверхностью вращенія, опирается на плоскость, наклоненную подъ угломъ J къ горизонту.

Пусть $\zeta = f(\rho)$ (гдѣ $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$) есть уравненіе поверхности; чтобы получить уравненіе связи, надо исключить ξ_0, η_0, ζ_0 изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\zeta_0 = f(\rho_0),\ z_c + \lambda_z \xi_0 + \mu_z \eta_0 + \nu_z \zeta_0 = 0,$$

$$\xi_0 = -\frac{\lambda_z}{\nu_z}\frac{\rho_0}{f'(\rho_0)},\ \ \eta_0 = -\frac{\mu_z}{\nu_z}\frac{\rho_0}{f'(\rho_0)};$$

окажется, что искомое уравненіе есть результатъ исключенія ρ_0 изъ уравненій:

$$z_c - \frac{\sin^2\phi}{\cos\phi}\frac{\rho_0}{f'(\rho_0)} + \cos\phi f(\rho_0) = 0,\ (f'(\rho_0))^2 = \mathrm{tg}^2\phi, \ldots \textbf{(900)}$$

слѣдовательно уравненіе связи заключаетъ только z_c и ϕ.

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$Mx_c'' = Mg\sin J,\ My_c'' = 0,\ Mz_c'' = -Mg\cos J + \lambda$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial ж'}\right)}{dt} = 0,\ \frac{dr}{dt} = 0,$$

$$\mathfrak{A}_c\phi'' = \mathfrak{A}_c(ж')^2\sin\phi\cos\phi - \mathfrak{C}_c r ж'\sin\phi - \lambda\frac{dz_c}{d\phi};$$

здѣсь предполагается, что начало координатъ находится на наклонной плоскости, что ось $Y^{овъ}$ горизонтальна, ось $X^{овъ}$ направлена по линіи наибольшаго наклона, а ось $Z^{овъ}$ направлена снизу вверхъ.

Интегралы этихъ дифференціальныхъ уравненій суть:

$$(x'_c)^2 = 2g(x_c - a)\sin J + \alpha^2, \qquad y_c = \beta t + b,$$

$$x_c = a + \alpha t + \frac{t^2}{2}g\sin J, \qquad r = C_4$$

$$\mathfrak{A}_c ж'\sin^2\phi + \mathfrak{C}_c r\cos\phi = C_3$$

$$M(z'_c)^2 + \mathfrak{A}\left((ж')^2\sin^2\phi + (\phi')^2\right) = 2h - \mathfrak{C}_c C_4^2 - M\beta^2 -$$

$$- M(\alpha^2 - 2ga\sin J) - 2Mgz_c\cos J.$$

Исключивъ изъ послѣдняго и предпослѣдняго уравненій $ж'$ и выразивъ z_c функціею отъ ϕ, будемъ имѣть дифференціальное уравненіе, заключающее $(\phi')^2$ и ϕ, которое надо интегрировать, чтобы опредѣлить, какъ ϕ измѣняется съ теченіемъ времени.

Примѣръ 108-й. Движеніе тяжелаго однороднаго шара по наклонной негладкой плоскости; принять въ разсчетъ треніе между шаромъ и плоскостью.

Въ этомъ случаѣ выраженіе связи принимаетъ весьма простой видъ: $z_c = l$, гдѣ l есть величина радіуса шара; реакція плоскости направлена къ центру шара и моментъ ея вокругъ центра равенъ нулю.

Треніе между шаромъ и плоскостью приложено къ точкѣ прикосновенія шара къ плоскости и заключается въ этой плоскости; означимъ черезъ F_x и F_y проэкціи его на оси координатъ; проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ момента (вокругъ C) этой силы выразятся такъ:

$$(Л_c)_x = lF_y,\ (Л_c)_y = -lF_x,\ (Л_c)_z = 0.$$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = Mg\sin J + F_x,\ M\frac{d^2y_c}{dt^2} = F_y,\ 0 = -Mg\cos J + \lambda$$

и дифференціальныя уравненія вращенія шара вокругъ центра инерціи (формулы (867):

$$\frac{2}{5}Ml^2\frac{dP}{dt} = lF_y,\ \frac{2}{5}Ml^2\frac{dQ}{dt} = -lF_x,\ \frac{2}{5}Ml^2\frac{dR}{dt} = 0,$$

гдѣ P, Q, R суть проэкціи угловой скорости на неподвижныя оси координатъ.

Послѣднее изъ этихъ уравненій интегрируется непосредственно и даетъ

$$R = C_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(901)}$$

изъ остальныхъ же четырехъ, исключивъ F_x и F_y, получимъ два дифференціальныя уравненія, которыя тоже интегрируются и даютъ слѣдующіе интегралы:

$$\frac{dx_c}{dt} + \frac{2}{5}lQ = gt\sin J + C_2,\ \frac{dy_c}{dt} - \frac{2}{5}lP = C_3 \ldots. \quad \textbf{(902)}$$

Такимъ образомъ, не опредѣливъ еще вида выраженій для силъ F_x, F_y, мы имѣемъ возможность получить три интеграла дифференціальныхъ уравненій движенія. Для дальнѣйшаго же рѣшенія вопроса необходимо условиться относительно того, какъ выражается величина силы тренія.

Въ § 46-мъ на стр. 219 были приведены законы, которымъ, какъ предполагается, слѣдуетъ треніе между матерьяльною точкою, давящею на поверхность, и поверхностью; мы предположимъ, что эти законы примѣняются и къ разсматриваемому нами вопросу, хотя здѣсь тренію

подвергаются послѣдовательно различныя точки тѣла, а не постоянно одна и та же матерьяльная точка, какъ предполагалось въ § 46-мъ.

Мы предположимъ:

1) что сила тренія прилагается къ той точкѣ шара, которою онъ прикасается къ плоскости (а въ то же время равная и противоположная сила прилагается и къ той точкѣ плоскости, къ которой шаръ прикасается); эту перемѣнную точку шара, которою онъ прикасается къ плоскости, мы условимся называть точкою K;

2) направленіе силы тренія противоположно направленію скорости точки K, если скорость ея не равна нулю;

3) величина силы тренія равна $k\sqrt{\lambda^2} = kMg\cos J$, гдѣ k есть отвлеченная дробь, величина которой зависитъ отъ физической природы трущихся тѣлъ; такова величина силы тренія въ тѣхъ случаяхъ, когда скорость точки K не равна нулю;

4) если же скорость точки K равна нулю, то треніе имѣетъ величину: $\varkappa Mg\cos J$, гдѣ $\varkappa$ можетъ имѣть какую угодно величину отъ нуля до k, но не должно превосходить k; направленіе же силы тренія въ этихъ случаяхъ должно опредѣлиться изъ дифференціальныхъ уравненій движенія тѣла на основаніи того условія, что скорость точки K равна нулю.

Предположивъ, что треніе слѣдуетъ этимъ законамъ, мы должны будемъ, при дальнѣйшемъ разсмотрѣніи вопроса о движеніи шара по наклонной плоскости, разсмотрѣть отдѣльно:

a) движенія, при которыхъ скорость точки K равна нулю и

b) движенія, при которыхъ скорость точки K не равна нулю.

Такъ какъ абсолютныя координаты точки K суть: $x_0 = x_c$, $y_0 = y_c$, $z_0 = 0$, то проэкціи на оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ скорости этой точки шара могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ (по формуламъ (142) кинематической части):

$$w_K \cos(w_K, X) = \frac{dx_c}{dt} - lQ;\; w_K \cos(w_K, Y) = \frac{dy_c}{dt} + lP.$$

a) Когда шаръ катится по наклонной плоскости безъ скольженія, т. е. когда скорость точки K равна нулю, тогда:

$$Q = \frac{x'_c}{l}, \quad P = -\frac{y'_c}{l},$$

а на этомъ основаніи интегралы (902) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{7}{5}\,\frac{dx_c}{dt} = gt\sin J + C_2, \quad \frac{7}{5}\,\frac{dy_c}{dt} = C_3;$$

интегрируя, найдемъ:

$$x_c = \frac{5g\sin J}{7}\frac{t^2}{2} + \alpha t + a,\ y_c = \beta t + b, \ldots\ldots \textbf{(903)}$$

гдѣ a и b суть начальныя значенія координатъ центра инерціи, а α и β — начальныя значенія проэкцій скорости центра инерціи на оси $X^{овъ}$ и $У^{овъ}$.

Слѣдовательно, когда шаръ катится безъ скольженія, тогда центръ инерціи его описываетъ параболу, плоскость которой параллельна наклонной плоскости, а ось параллельна оси $X^{овъ}$; ускореніе центра инерціи равно не $g\sin J$, но $\frac{5}{7}$ этой величины.

Изъ полученныхъ выраженій (903) найдемъ:

$$lQ = \alpha + \frac{5}{7}gt\sin J,\ lP = -\beta,\ F_x = -\frac{2}{7}Mg\sin J,\ F_y = 0,$$

слѣдовательно $F = \frac{2}{7}Mg\sin J$; но съ другой стороны, когда скорость точки K равна нулю, тогда треніе не должно быть болѣе $kMg\cos J$, поэтому катаніе шара по наклонной плоскости безъ скольженія возможно только при томъ условіи, чтобы $\frac{2}{7}\sin J$ было не болѣе $k\cos J$, т. е., чтобы $\operatorname{tg} J$ былъ не болѣе $\frac{7}{2}k$. *Шаръ не можетъ катиться по наклонной плоскости безъ скольженія, если уголъ наклоненія ея къ горизонту болѣе* $\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{2}k\right)$.

Чтобы вполнѣ опредѣлить движеніе тѣла, надо интегрировать дифференціальныя уравненія:

$$э'\cos ж \sin ф - ф'\sin ж = -\frac{\beta}{l} = P_0$$

$$э'\sin ж \sin ф + ф'\cos ж = \frac{\alpha}{l} + \frac{5}{7}\frac{g\sin J}{l}t$$

$$э'\cos ф + ж' = C_1 = R_0.$$

b) Когда шаръ скользитъ по плоскости, тогда проэкціи силы тренія на оси $X^{овъ}$ и $У^{овъ}$ выражаются такъ:

$$F_x = -kMg\cos J\cos(w_K, X),\ F_y = -kMg\cos J\cos(w_K, У).$$

Эти выраженія должно подставить въ первыя два дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи, причемъ величины P и Q должно исключить при посредствѣ интеграловъ (902). Получатся дифференціальныя уравненія:

$$x_c'' = g\sin J - \left(x_c' - \frac{5}{7}gt\sin J - \frac{5}{7}C_2\right)\frac{kg\cos J}{\frac{2}{7}w_K},$$

$$y_c'' = -\left(y_c' - \frac{5}{7}C_3\right)\frac{kg\cos J}{\frac{2}{7}w_K},$$

которыя можно упростить посредствомъ слѣдующей подстановки:

$$x_c - \frac{5}{14} g t^2 \sin J - \frac{5}{7} C_2 t = x_\mu,\ y_c - \frac{5}{7} C_3 t = y_\mu,$$

$$C_2 = \alpha + \frac{2}{5} l Q_0,\ C_3 = \beta - \frac{2}{5} l P_0,$$

(α и β суть начальныя значенія проэкцій скорости центра инерціи на оси $X^{\text{ов}ъ}$ и $Y^{\text{ов}ъ}$; P_0 и Q_0 — начальныя значенія проэкцій угловой скорости на тѣ же оси).

Послѣ такой подстановки послѣднія дифференціальныя уравненія получатъ слѣдующій видъ:

$$x_\mu'' = \frac{2}{7} g \sin J - kg \cos J \frac{x'_\mu}{v_\mu},\ y_\mu'' = -kg \cos J \frac{y'_\mu}{v_\mu} \ldots . (904)$$

Величины x_μ и y_μ суть координаты нѣкоторой воображаемой точки μ, которая въ моментъ $t = 0$ совпадаетъ съ точкою K; скорость v_μ этой точки всегда параллельна скорости w_K и равняется двумъ седьмымъ ея. *Дифференціальныя уравненія (904) выражаютъ, что воображаемая точка μ движется по наклонной плоскости такъ, какъ двигалась бы по ней матерьяльная точка, если бы ускореніе силы тяжести было равно $\frac{2}{7} g$, а коэфиціентъ тренія былъ бы $\frac{7}{2} k$.*

Если въ начальный моментъ ($t = 0$) проэкція скорости w_K на ось $Y^{\text{ов}ъ}$ равна нулю, то тогда y'_μ будетъ равна нулю во все время движенія, потому что

$$y'_\mu = (y'_\mu)_0 + (y_\mu'')_0 t + (y_\mu''')_0 \frac{t^2}{1.2} + \ldots . ;$$

но изъ уравненій (904) найдемъ, что начальныя значенія всѣхъ производныхъ отъ y_μ равны нулю, поэтому тогда движеніе точки μ будетъ совершаться параллельно оси X и положеніе ея въ какой либо моментъ времени выразится такъ:

$$x_\mu = a + \frac{2}{7}\left(\alpha - l Q_0\right) t + \left(\frac{2}{7} g \sin J \mp kg \cos J\right) \frac{t^2}{2},\ y_\mu = b,$$

гдѣ верхній знакъ долженъ быть взятъ въ томъ случаѣ, когда $(\alpha - l Q_0)$ есть величина положительная, а нижній — въ томъ случаѣ, когда эта разность отрицательная.

Положимъ, что $(\alpha - l Q_0)$ менѣе нуля; тогда скорость x'_μ, направленная по отрицательной оси $X^{\text{ов}ъ}$, постепенно уменьшается, пока не обратится въ нуль, что произойдетъ въ моментъ:

$$t_1 = -\frac{\alpha - l Q_0}{\left(\sin J + \frac{7}{2} k \cos J\right) g};$$

до этого момента центръ инерціи шара будетъ совершать параболическое движеніе по закону:

$$x_c = a + \alpha t + (\sin J + k\cos J)\frac{gt^2}{2},\ y_c = \beta t + b,$$

причемъ проэкція угловой скорости на оси $X^{ов}$ и $Z^{ов}$ будутъ оставаться постоянными, а проэкція угловой скорости на ось $Y^{ов}$ будетъ уменьшаться по слѣдующему закону:

$$Q = Q_0 - \frac{5}{2}\frac{k\cos J}{l}gt;\ (P = P_0,\ R = R_0).$$

Во время этого движенія сила тренія направлена параллельно положительному направленію оси $X^{ов}$ и имѣетъ величину: $Mkg \cos J$.

Въ моментъ $t = t_1$ направленіе силы тренія измѣняется въ прямо-противоположное и начинается новое движеніе, при которомъ начальная скорость w_K равна нулю.

Если $\operatorname{tg} J$ менѣе $\frac{7}{2}k$, то новое движеніе будетъ катаніемъ шара безъ скольженія, причемъ сила тренія будетъ направлена параллельно отрицательной оси $X^{ов}$ и будетъ равна $\frac{2}{7}Mg\sin J$.

Если же $\operatorname{tg} J$ болѣе $\frac{7}{2}k$, то движеніе центра шара послѣ момента t_1 станетъ совершаться по слѣдующему закону:

$$x_c = a + \alpha t + \frac{g\sin J}{2}t^2 + \frac{gk\cos J}{2}(4tt_1 - 2t_1^2 - t^2),\ y_c = b + \beta t,$$

а вращеніе шара будетъ совершаться такъ:

$$P = P_0,\ Q = Q_0 + \frac{5}{2}kg\cos J(t - 2t_1),\ R = R_0;$$

при этомъ величина силы тренія равна $kMg\cos J$, а направленіе ея параллельно отрицательной оси $X^{ов}$.

Перейдемъ теперь къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ начальное значеніе скорости y'_μ не равно нулю.

Чтобы составить интегралы дифференціальныхъ уравненій (904), воспользуемся тѣмъ обстоятельствомъ, что вопросъ о движеніи тяжелой матерьяльной точки по шероховатой наклонной плоскости сводится къ вопросу о движеніи свободной матерьяльной точки при дѣйствіи на нее постоянной силы и сопротивленія среды, имѣющаго постоянную величину; на основаніи этого замѣчанія, приведеннаго уже въ примѣрѣ 28-мъ на стр. 221-й, мы получимъ интегралы дифференціальныхъ уравненій (904) въ видѣ формулъ страницы 144-й (задача 13), если замѣнимъ въ нихъ: g — величиною $\frac{2}{7}g\sin J$, k — величиною $\varkappa = \frac{7}{2}k\operatorname{cotg} J$; кромѣ того, надо предположить, что постоянная сила дѣйствуетъ по оси $X^{ов}$,

а не по оси $Y^{ов}$ (какъ въ задачѣ 13-й) и должно принять во вниманіе начальныя значенія координатъ x_μ и y_μ и производныхъ x'_μ, y'_μ. По этимъ формуламъ координаты x_μ и y_μ выражаются функціями вспомогательной перемѣнной величины η, которая означаетъ тангенсъ половины угла, составляемаго направленіемъ скорости точки μ съ осью $X^{ов}$; зависимость между перемѣнною η и временемъ выражается равенствомъ:

$$t + \Gamma_1 = -\frac{7A\eta^{\varkappa-1}}{2g\sin J}\left(\frac{1}{\varkappa-1} + \frac{\eta^2}{\varkappa+1}\right), \ldots\ldots (905,a)$$

гдѣ:

$$\eta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \ \varkappa = \frac{7}{2}k\operatorname{cotg}J,$$

φ есть уголъ, составляемый направленіемъ скорости v_μ съ осью $Y^{ов}$, A есть постоянная величина, опредѣляемая по начальнымъ значеніямъ: скорости $v_\mu = \frac{2}{7}w_K$ и перемѣнной η:

$$7A(1 + \eta_0^2)\eta_0^{\varkappa-1} = 2(w_K)_0,$$

Γ_1 есть другая постоянная, опредѣляемая изъ формулы (905,a) по начальному значенію η_0 перемѣнной η.

Скорость w_K въ какой либо моментъ движенія выражается функціею отъ η по формулѣ:

$$w_K = \frac{7}{2}A(1 + \eta^2)\eta^{\varkappa-1} \ldots\ldots\ldots (905,b)$$

Координаты центра инерціи шара выразятся слѣдующими функціями отъ t и η:

$$x_c = \frac{1}{7}(5\alpha + 2lQ_0)t + \frac{5}{7}\frac{g\sin J}{2}t^2 -$$
$$- \Gamma_2 - \frac{7A^2\eta^{2\varkappa-2}}{2g\sin J}\left(\frac{1}{2\varkappa-2} - \frac{\eta^4}{2\varkappa+2}\right), \ldots\ldots\ldots (905,c)$$

$$y_c = \frac{1}{7}(5\beta - 2lP_0)t - \Gamma_3 - \frac{7A^2\eta^{2\varkappa-1}}{g\sin J}\left(\frac{1}{2\varkappa-1} + \frac{\eta^2}{2\varkappa+1}\right); \ldots (905,d)$$

постоянныя Γ_2 и Γ_3 должны быть опредѣлены изъ тѣхъ же формулъ по начальнымъ значеніямъ x_c, y_c и η.

Проэкціи угловой скорости на оси координатъ должны быть опредѣлены изъ формулъ (901) и (902).

Чтобы составить себѣ нѣкоторое понятіе о движеніи, выражаемомъ этими формулами, мы должны предварительно убѣдиться въ томъ, что

перемѣнная η непрерывно убываетъ, если начальное значеніе ея положительное; это лучше всего видно изъ слѣдующаго выраженія:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2}{7}\frac{\eta}{v_\mu} g \sin J.$$

Непрерывно-убывающая перемѣнная η приближается къ нулю; если $\varkappa > 1$, то, какъ видно изъ равенства (905, a), η обращается въ нуль въ моментъ $t = -\Gamma_1$, если же $\varkappa < 1$, то приближеніе ея къ нулю продолжается безъ конца.

Если $\varkappa > 1$, т. е. $\operatorname{tg} J < \frac{7}{2}k$, то при $t = -\Gamma_1$, когда η обратится въ нуль, скорость точки K тоже обратится въ нуль, какъ видно изъ формулы (905, b), причемъ координаты центра инерціи получатъ конечныя значенія a_2 и b_2 (эти значенія получимъ изъ формулъ (905, c, d), если сдѣлаемъ въ нихъ t равнымъ $-\Gamma_1$, а η равнымъ нулю); начиная съ момента $t = -\Gamma_1$ шаръ начнетъ катиться по наклонной плоскости безъ скольженія (см. *a*).

Если $\varkappa < 1$, т. е. $\operatorname{tg} J > \frac{7}{2}k$, то, по мѣрѣ возрастанія t до безконечности и приближенія η къ нулю, скорость точки K будетъ возростать до безконечности, какъ видно изъ (905, b); изъ (905, c) и (905, d) видно, что x_c и y_c тоже возростаетъ неограниченно.

Примѣръ 109. Движеніе тяжелаго однороднаго шара по горизонтальной шероховатой плоскости.

Дифференціальныя уравненія движенія отличаются отъ уравненій предыдущаго примѣра тѣмъ, что теперь $\sin J = 0$, $\cos J = 1$.

Интегралы (901), (902) въ настоящемъ случаѣ будутъ:

$$R = R_0,\ x'_c + \frac{2}{5} lQ = C_2,\ y'_c - \frac{2}{5} lP = C_3 \ldots (\mathbf{902}, \text{bis})$$

Начнемъ со случаевъ:

(*b*), когда шаръ скользитъ по плоскости. Дифференціальныя уравненія (904) при $J = 0$ получатъ слѣдующій видъ:

$$x_\mu'' = -kg\frac{x'_\mu}{v_\mu},\ y_\mu'' = -kg\frac{y'_\mu}{v_\mu}; \ldots\ldots (\mathbf{904}, \text{bis})$$

изъ нихъ слѣдуетъ:

$$\frac{x''_\mu}{x'_\mu} = \frac{y''_\mu}{y'_\mu};$$

интегрируя это уравненіе два раза, найдемъ:

$$x'_\mu = y'_\mu \operatorname{tg} \varphi_0,\ x_\mu - a = (y_\mu - b)\, t \operatorname{tg} \varphi_0,$$

т. е. точка μ движется прямолинейно.

Возьмемъ направленіе движенія точки μ (т. е. направленіе скорости точки K) за ось $X^{\text{овъ}}$; въ такомъ случаѣ $\beta = -lP_0$, $C_3 = \frac{7}{5}\beta$, $x''_\mu = -kg$, а потому:

$$x_c = a + \frac{5}{7}\left(\alpha + \frac{2}{5}lQ_0\right)t + \frac{2}{7}\left(\alpha - lQ_0\right)t - kg\frac{t^2}{2},\; y_c = \beta t.$$

Слѣдовательно, *пока шаръ скользитъ по плоскости*, *центръ его описываетъ параболу:*

$$x_c - a = \frac{\alpha}{\beta}y_c - \frac{kg}{2\beta^2}y_c^2,$$

ось которой параллельна и прямопротивоположна скорости точки K въ начальный моментъ.

Описывая эту параболу, центръ инерціи достигъ бы вершины ея въ моментъ $t_2 = \frac{\alpha}{kg}$.

При этомъ движеніи проэкціи угловой скорости на оси $X^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$ постоянны, а проэкція на ось $Y^{\text{овъ}}$ возрастаетъ равномѣрно:

$$P = -\frac{\beta}{l};\; Q = Q_0 + \frac{5}{2l}kgt,\; R = R_0.$$

Вслѣдствіе этого разность $(x'_c - lQ)$ непрерывно убываетъ:

$$x'_c - lQ = \alpha - lQ_0 - \frac{7}{2}kgt$$

и въ моментъ t_1:

$$t_1 = \frac{2}{7}\,\frac{(\alpha - lQ_0)}{kg}$$

обратится въ нуль; затѣмъ съ этого момента начинается:

(a) катаніе шара безъ скольженія, причемъ центръ инерціи движется по прямой линіи:

$$x_c = a_1 + \alpha_1(t - t_1),\; y_c = \beta t,$$

а проэкціи угловой скорости на всѣ три оси остаются постоянными:

$$P = -\frac{\beta}{l},\; Q = \frac{\alpha_1}{l},\; R = R_0;$$

здѣсь:

$$\alpha_1 = \frac{5}{7}\left(\alpha + \frac{2}{5} lQ_0\right) = \frac{5}{7} C_2 = kg(t_2 - t_1),$$

$$a_1 = a + \frac{2}{49}\frac{(\alpha - lQ_0)(6\alpha + lQ_0)}{kg}.$$

Когда шаръ катится безъ скольженія, треніе равно нулю.

Если $\beta = 0$, то движеніе центра шара совершается по прямой линіи; сначала это движеніе равнозамедленное, а, начиная съ момента t_1 шаръ катится равномѣрно; если Q_0 есть величина отрицательная и α_1 менѣе нуля, то равномѣрная часть движенія совершается въ возвратномъ направленіи.

§ 132. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, имѣющаго менѣе пяти степеней свободы.

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, связаннаго нѣсколькими связями:

$$в_1(x_ю, y_ю, z_ю, ф, ж, э) = 0,$$

$$в_2(x_ю, y_ю, z_ю, ф, ж, э) = 0,$$

. . . .

могутъ быть получены на тѣхъ же основаніяхъ, какъ и въ параграфѣ 129-мъ; во вторыхъ частяхъ этихъ шести уравненій будетъ заключаться столько множителей λ_1, λ_2, ..., сколькимъ связямъ подчинено тѣло. Если число связей менѣе шести, то, исключивъ эти множители, получимъ столько дифференціальныхъ уравненій, сколько тѣло имѣетъ степеней свободы.

§ 133. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Твердое тѣло, одна изъ точекъ котораго неподвижна (назовемъ эту точку — точкою *Ю*), связано тремя связями:

$$x_ю = \text{постоянн.},\quad y_ю = \text{постоянн.},\quad z_ю = \text{постоянн.}$$

и имѣетъ три степени свободы.

Дифференціальныя уравненія вида 861, a, b, c, d, e, f (см. § 129) въ этихъ случаяхъ будутъ:

$$Mx''_c = B_x + \lambda_1,\ My''_c = B_y + \lambda_2,\ Mz''_c = B_z + \lambda_3, \ldots \textbf{(906, a)}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_{ю}\frac{dq}{dt} &= (\mathfrak{B}_{ю} - \mathfrak{C}_{ю})\,qr + (Л_{ю})_{\xi}, \\ \mathfrak{B}_{ю}\frac{dp}{dt} &= (\mathfrak{C}_{ю} - \mathfrak{A}_{ю})\,rp + (Л_{ю})_{\eta}, \\ \mathfrak{C}_{ю}\frac{dr}{dt} &= (\mathfrak{A}_{ю} - \mathfrak{B}_{ю})\,pq + (Л_{ю})_{\zeta}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(906, b)}$$

если за оси Ξ, Υ, Z взять главныя оси эллипсоида инерціи точки $Ю$.

Здѣсь λ_1 означаетъ величину реакціи связи $x_ю =$ постоянн.; эта реакція направлена параллельно положительной оси $X^{овъ}$, если $\lambda_1 > 0$; λ_2 и λ_3 суть величины реакцій двухъ прочихъ связей $y_ю =$ постоянн. и $z_ю =$ постоянн.; первая реакція направлена параллельно оси $У^{овъ}$, вторая — параллельно оси $Z^{овъ}$.

Точка пересѣченія плоскостей $x_ю =$ постоянн., $y_ю =$ постоянн., $z_ю =$ постоянн., т. е. та точка пространства, съ которою неизмѣнно связана опредѣленная точка твердаго тѣла (напримѣръ, въ настоящемъ случаѣ точка $Ю$), называется *точкою неподвижной опоры* твердаго тѣла; величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можно разсматривать какъ *проэкціи реакціи опоры* на оси $X^{овъ}$, $У^{овъ}$ и $Z^{овъ}$, а величины $(-\lambda_1)$, $(-\lambda_2)$, $(-\lambda_3)$ суть проэкціи на тѣ же оси *давленія твердаго тѣла на точку опоры*.

Изъ предыдущихъ уравненій:

$$-\lambda_1 = B_x - Mx''_c,\quad -\lambda_2 = B_y - My''_c,\quad -\lambda_3 = B_z - Mz''_c$$

видно, что давленіе твердаго тѣла на точку опоры есть геометрическая разность силъ: B и $M\dot{w}_c$, гдѣ $\dot{w}_c$ означаетъ ускореніе центра инерціи твердаго тѣла.

Дифференціальныя уравненія (906, b) вращательнаго движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки опоры сходны по виду съ Эйлеровыми дифференціальными уравненіями (762) (стр. 544) вращенія свободнаго твердаго тѣла вокругъ центра инерціи; различіе

состоитъ въ томъ, что теперь центромъ моментовъ силъ служитъ точка *Ю*, а осями Ξ, Υ, Ζ — главныя оси инерціи тѣла въ этой точкѣ *Ю*, между тѣмъ, какъ при составленіи уравненій (762) центромъ моментовъ силъ служилъ центръ инерціи тѣла, а осями Ξ, Υ, Ζ — главныя *центральныя* оси инерціи тѣла.

По причинѣ такого сходства, нижеслѣдующіе два вопроса могутъ быть рѣшены такъ, какъ показано въ §§ 120 и 126.

Примѣръ 110. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, если главный моментъ (вокругъ этой точки) приложенныхъ силъ равенъ нулю.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (906, bis) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A}_ю \frac{dp}{dt} = (\mathfrak{B}_ю - \mathfrak{C}_ю) qr, \quad \mathfrak{B}_ю \frac{dq}{dt} = (\mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю) rp,$$

$$\mathfrak{C}_ю \frac{dr}{dt} = (\mathfrak{A}_ю - \mathfrak{B}_ю) pq;$$

а потому вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки совершается по тому же закону, по какому свободное твердое тѣло вращается по инерціи вокругъ своего центра инерціи; разница только въ томъ, что теперь, вмѣсто главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$, будутъ входить моменты инерціи $\mathfrak{A}_ю$, $\mathfrak{B}_ю$, $\mathfrak{C}_ю$ твердаго тѣла вокругъ главныхъ осей инерціи въ неподвижной точкѣ *Ю*.

Примѣръ 111. Центръ инерціи *C* твердаго тѣла не совпадаетъ съ неподвижною точкою *Ю*; эллипсоидъ инерціи для точки *Ю* есть эллипсоидъ вращенія вокругъ оси *ЮС*; движеніе тѣла подъ вліяніемъ силы тяжести.

Возьмемъ ось $Z^{овъ}$ по направленію силы тяжести, а за ось Ζ примемъ ось симметріи *ЮС*; означимъ черезъ l разстояніе центра инерціи отъ точки *Ю*.

Потенціалъ силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ элементамъ тѣла, выразится такъ:

$$U = g \iiint \sigma z dO = Mgz_c = Mlg \cos \vartheta;$$

это выраженіе совершенно сходно съ выраженіемъ (810); различіе заключается только въ томъ, что тамъ косинусъ помноженъ на Ak, а здѣсь — на Mlg, поэтому все сказанное въ § 126-мъ примѣняется къ настоящему примѣру съ надлежащею замѣною величинъ Ak, $\mathfrak{A}_c$ — величинами Mlg, $\mathfrak{A}_ю$.

Между прочимъ можемъ замѣтить, что если ω будетъ равно нулю, то ось Z будетъ совершать то же самое движеніе, какое совершаетъ нить математическаго маятника, имѣющаго слѣдующую длину:

$$R = \frac{\mathfrak{A}_ю g}{Mlg} = \frac{\mathfrak{A}_c}{Ml} + l, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(907)}$$

по формулѣ (837) параграфа 126-го.

Примѣръ 112. Центръ инерціи тѣла неподвиженъ; масса его имѣетъ ось симметріи (Z) и перпендикулярную къ ней плоскость симметріи (плоскость $\Xi\Upsilon$). Тѣло притягивается по закону тяготѣнія однороднымъ неподвижнымъ шаромъ массы M_1, центръ котораго находится на отрицательной оси $Z^{овъ}$ въ весьма большомъ разстояніи L отъ центра инерціи притягиваемаго тѣла. Имѣется въ виду пренебрегать четвертыми и высшими степенями отношеній между размѣрами тѣла и разстояніемъ L (какъ въ примѣрѣ 103-мъ, стр. 582 — 583).

Изъ формулъ (814 bis) и (821) слѣдуетъ, что силы притяженія, приложенныя къ первому тѣлу, имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = \varepsilon M_1 \left(\frac{M}{L} + \frac{\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c - 3(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)\cos^2 \phi}{2L^3} \right),$$

такъ какъ въ настоящемъ случаѣ:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c, \ \lambda = \lambda_z, \ \mu = \mu_z, \ \nu = \nu_z = \cos \phi.$$

По формуламъ (818) стр. 585 мы найдемъ, что проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ главнаго момента притяженій (вокругъ C) равны:

$$Л_x = -\frac{3\varepsilon M_1}{L^3} (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c) \nu_y \nu_z, \ Л_y = \frac{3\varepsilon M_1}{L^3} (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c) \nu_z \nu_x, \ Л_z = 0;$$

а по формуламъ (817) стр. 585 или (819) проэкціи того же момента на оси Ξ, Υ, Z равны:

$$Л_\xi = \frac{3\varepsilon M_1}{L^3} (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c) \mu_z \nu_z, \ Л_\eta = -\frac{3\varepsilon M_1}{L^3} (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c) \nu_z \lambda_z, \ Л_\zeta = 0.$$

Такъ какъ проэкція главнаго момента силъ на ось $Z^{\text{овъ}}$ равна нулю то проэкція на ту же ось главнаго момента количествъ движенія тѣла имѣетъ постоянную величину; далѣе, такъ какъ проэкція главнаго момента силъ на ось Z равна нулю, то третье изъ дифференціальныхъ уравненій (906, b) дастъ: r = постоянному; кромѣ того, въ настоящемъ случаѣ имѣетъ мѣсто законъ живой силы. Такимъ образомъ оказываются слѣдующіе три интеграла:

$$\mathfrak{A}_c ж' \sin^2\vartheta + \mathfrak{C}_c \omega \cos\vartheta = C_1, \quad r = \omega,$$

$$\mathfrak{A}_c\left[(\vartheta')^2 + (ж')^2 \sin^2\vartheta\right] = 2h_1 - \frac{3\varepsilon M_1}{L^3}(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)\cos^2\vartheta.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе этого вопроса можетъ быть произведено по тому же методу, который примѣненъ въ § 126, но съ надлежащими измѣненіями.

Къ числу тѣхъ движеній, которыя можетъ совершать твердое тѣло при условіяхъ данныхъ въ этомъ примѣрѣ, принадлежатъ вращенія, несопровождаемыя нутаціею. При данномъ углѣ ϑ и при данной угловой скорости ω возможны два такія движенія, если величина:

$$n = \left[1 - \frac{12\varepsilon M_1 \mathfrak{A}_c(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{C}_c^2\omega^2}\cos^2\vartheta\right]$$

имѣетъ знакъ положительный; величины прецессій при этихъ двухъ движеніяхъ равны:

$$ж'_1 = \frac{\mathfrak{C}_c\omega}{2\mathfrak{A}_c\cos\vartheta}(1 + \sqrt{n}); \quad ж'_2 = \frac{\mathfrak{C}_c\omega}{2\mathfrak{A}_c\cos\vartheta}(1 - \sqrt{n}).$$

§ 134. Общій взглядъ на тѣ случаи, въ которыхъ ось симметріи тѣла совершаетъ постоянную прецессію, не имѣя нутаціи.

При изложеніи предыдущихъ примѣровъ мы неоднократно обращали вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ ось симметріи твердаго тѣла вращенія совершаетъ постоянную прецессію, не имѣя нутаціи; въ настоящемъ параграфѣ мы сдѣлаемъ нѣсколько общихъ замѣчаній относительно вращеній этого рода.

Положимъ, что масса твердаго тѣла имѣетъ ось симметріи (ось Z), такъ что для всякой точки этой оси эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія вокругъ нея же.

Это тѣло вращается вокругъ неподвижной точки $Ю$, находящейся на оси симметріи*), и вращается такъ, что уголъ, составляемый осью $Ю\mathsf{Z}$ съ неподвижною осью $ЮZ$, остается постояннымъ, а плоскость $\mathsf{Z}ЮZ$ вращается вокругъ оси $ЮZ$ равномѣрно (съ постоянною угловою скоростью $ж'$).

При этихъ условіяхъ мгновенная ось вращенія должна будетъ заключаться въ плоскости $\mathsf{Z}ЮZ$; означимъ черезъ β уголъ $\mathsf{Z}Ю\Omega$ (черт. 101), составляемый направленіемъ мгновенной оси $Ю\Omega$ съ осью $Ю\mathsf{Z}$; положительныя значенія этого угла будемъ отсчитывать отъ оси $Ю\mathsf{Z}$ въ сторону, гдѣ находится ось $ЮZ$.

На основаніи извѣстнаго кинематическаго правила соединенія угловыхъ скоростей, имѣемъ слѣдующія соотношенія:

$$ж' = \Omega \frac{\sin\beta}{\sin ф}, \quad \omega = \Omega\cos\beta, \quad \sqrt{p^2+q^2} = \Omega\sin\beta.$$

Главный моментъ вокругъ точки $Ю$ количествъ движенія какого либо твердаго тѣла имѣетъ проэкціями на оси Ξ, Υ, Z слѣдующія величины:

$$(л_ю)_\xi = \mathfrak{A}_ю p, \quad (л_ю)_\eta = \mathfrak{B}_ю q, \quad (л_ю)_\zeta = \mathfrak{C}_ю r; \; . \; . \; . \; . \; (908)$$

основываясь на этихъ выраженіяхъ и разсуждая такъ, какъ на стр. 551—552, убѣдимся, что направленіе главнаго момента количествъ движенія перпендикулярно къ касательной плоскости, проведенной къ эллипсоиду инерціи:

$$\mathfrak{A}_ю\xi^2 + \mathfrak{B}_ю\eta^2 + \mathfrak{C}_ю\zeta^2 = м\,.\,д^4$$

въ точкѣ пересѣченія его мгновенною осью вращенія.

Если $\mathfrak{A}_ю = \mathfrak{B}_ю$, то эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія вокругъ оси Z, а потому тогда *направленіе главнаго момента количествъ движенія будетъ заключаться въ одной плоскости съ направленіемъ мгновенной оси и съ осью* Z.

Если мгновенная ось находится въ плоскости $\mathsf{Z}ЮZ$, то въ той же плоскости будетъ заключаться и направленіе главнаго момента количествъ движенія.

---

*) $\mathfrak{A}_ю = \mathfrak{B}_ю$.

Означимъ черезъ γ уголъ $\mathsf{Z}ЮG$ (черт. 101, 102), составляемый направленіемъ $ЮG$ главнаго момента количествъ движенія съ осью Z; положительныя значенія этого угла будемъ также отсчитывать отъ оси $Ю\mathsf{Z}$ въ ту сторону, гдѣ находится ось $ЮZ$; изъ вышесказаннаго слѣдуетъ:

$$л_ю \cos\gamma = \mathfrak{C}_ю\Omega\cos\beta,\quad л_ю \sin\gamma = \mathfrak{A}_ю\Omega\sin\beta; \quad \ldots (909)$$

а отсюда получимъ, во первыхъ, выраженіе для $л_ю$:

$$л_ю = \Omega\sqrt{\mathfrak{A}^2_ю \sin^2\beta + \mathfrak{C}^2_ю \cos^2\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots (910)$$

во вторыхъ, выраженіе для $tg\gamma$:

$$tg\gamma = \frac{\mathfrak{A}_ю}{\mathfrak{C}_ю} tg\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (911)$$

и, въ третьихъ, выраженіе для проэкціи главнаго момента количествъ движенія на направленіе мгновенной оси:

$$л_ю \cos(\gamma - \beta) = \Omega I,\quad I = \mathfrak{A}_ю \sin^2\beta + \mathfrak{B}_ю \cos^2\beta \ldots (912)$$

Такъ какъ величины угловой скорости Ω и угла β — постоянны, то изъ выраженій (910) и (911) слѣдуетъ, что главный моментъ количествъ движенія долженъ имѣть постоянную величину (означимъ эту постоянную черезъ G) и долженъ составлять постоянный уголъ γ съ осью Z.

Кромѣ того, изъ равенства (911) видно, что:

$\gamma < \beta$, если $\mathfrak{C}_ю > \mathfrak{A}_ю$, т. е. если эллипсоидъ инерціи — сжатый по оси вращенія (черт. 102); напротивъ:

$\gamma > \beta$, если $\mathfrak{A}_ю > \mathfrak{C}_ю$, т. е. если эллипсоидъ инерціи растянутъ по оси вращенія (черт. 101).

Дифференціальныя уравненія вращенія тѣла вокругъ неподвижной точки:

$$\frac{d(л_ю)_x}{dt} = (Л_ю)_x,\quad \frac{d(л_ю)_y}{dt} = (Л_ю)_y,\quad \frac{d(л_ю)_z}{dt} = (Л_ю)_z$$

выражаютъ, что *скорость точки, описывающей годографъ главнаго момента количествъ движенія, равна и параллельна главному моменту силъ, приложенныхъ къ тѣлу* (сравн. § 96 стр. 456).

Въ разсматриваемыхъ нами теперь случаяхъ годографъ главнаго момента количествъ движеній есть кругъ радіуса:

$$G \sin(\text{ф} - \gamma) \text{ или } G \sin(\gamma - \text{ф}),$$

смотря потому, который изъ угловъ больше: *ф* или γ; центръ этого круга находится на оси $Z^{\text{овъ}}$ въ разстояніи $G \cos(\text{ф} - \gamma)$ отъ точки *Ю*, и плоскость его перпендикулярна къ этой оси.

Скорость точки, описывающей этотъ годографъ, параллельна линіи *ЮN* (см. чертежъ на стр. 55-й кинематической части) и равна:

$$\text{ж}' G \sin(\text{ф} - \gamma);$$

эта скорость направлена параллельно положительному направленію *ЮN*, если *ж'* и $\sin(\text{ф}-\gamma)$ имѣютъ одинаковые знаки, и параллельно отрицательному направленію этой линіи, если знаки величинъ *ж'* и $\sin(\text{ф} - \gamma)$ противоположны.

Слѣдовательно, главный моментъ $Л_{ю}$ силъ долженъ быть направленъ вдоль по линіи *ЮN*, а величина его должна быть равна:

$$Л_{ю} = \text{ж}' G \sin(\text{ф} - \gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots (913)$$

$Л_{ю}$ направленъ вдоль по положительному направленію *ЮN*, если *ж'* и $\sin(\text{ф} - \gamma)$ имѣютъ одинаковые знаки, и вдоль по противоположному направленію, если *ж'* и $\sin(\text{ф} - \gamma)$ имѣютъ противоположные знаки.

Равенство (913) можетъ быть преобразовано на основаніи соотношеній:

$$G \cos\gamma = \mathfrak{C}_{ю}\Omega \cos\beta = \mathfrak{C}_{ю}\omega,$$

$$G \sin\gamma = \mathfrak{A}_{ю}\Omega \sin\beta = \mathfrak{A}_{ю}\text{ж}' \sin \text{ф}$$

въ слѣдующій видъ:

$$Л_{ю} = \mathfrak{C}_{ю}\omega \text{ж}' \sin\text{ф} - \mathfrak{A}_{ю}(\text{ж}')^2 \sin\text{ф} \cos\text{ф} \ldots\ldots (914)$$

И такъ, *для того, чтобы тѣло вращалось съ постоянною угловою скоростью з' вокругъ оси* **Z** *и чтобы притомъ ось* **Z** *составляла постоянный уголъ ф съ осью* $Z^{\text{овъ}}$, *а вмѣстѣ съ тѣмъ*

плоскость ZЮZ вращалась бы вокругъ оси Z^овъ съ постоянною угловою скоростью $ж'$, необходимо, чтобы:

главный моментъ $Л_ю$ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, былъ направленъ по линiи ЮN параллельно скорости точки, описывающей годографъ количествъ движенiя,

и чтобы главный моментъ $Л_ю$ этихъ силъ имѣлъ величину постоянную и равную (914) или:

$$Л_ю = \mathfrak{C}_ю ж' э' \sin ф + (\mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю)(ж')^2 \sin ф \cos ф \ldots \textbf{(914, bis)}$$

§ 135. Усилiе, потребное для измѣненiя направленiя оси симметрiи тѣла, вращающагося по инерцiи вокругъ этой оси.

Представимъ себѣ твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку *Ю* и имѣющее ось симметрiи *ЮZ*, проходящую черезъ ту же точку, такъ что моменты инерцiи этого тѣла вокругъ всѣхъ экваторiальныхъ осей, проходящихъ черезъ точку *Ю*, равны между собою.

Пусть это тѣло вращается по инерцiи вокругъ оси *ЮZ* съ угловою скоростью ω; если къ тѣлу не приложено никакихъ силъ, то направленiе оси Z остается неизмѣннымъ въ пространствѣ.

Требуется опредѣлить, какую силу надо приложить къ точкѣ *K*, находящейся на оси Z въ разстоянiи l отъ точки *Ю*, для того, чтобы сообщить этой оси данную угловую скорость въ данной плоскости.

Примемъ за ось *ЮZ* какое либо направленiе въ этой плоскости, а эту самую плоскость возьмемъ за плоскость *ZЮX*; слѣдовательно, $ж$ будетъ равно нулю, а такъ какъ ось *ЮZ* должна оставаться въ плоскости *ZЮX*, то $ж'$ и $ж''$ тоже должны быть равны нулю. Силу, приложенную къ точкѣ *K*, разложимъ на три составляющiя: на составляющую *R* по направленiю *ЮK*, на составляющую *Ф* по направленiю, проведенному изъ точки *K* въ плоскости *ZЮX* перпендикулярно къ *ЮK* (въ сторону возрастающаго $ф$), и на составляющую *У* параллельно оси *У*^овъ.

Возьмемъ Лагранжевы уравненiя (769) стр. 548 и примѣнимъ ихъ къ настоящему случаю, положивъ: $\mathfrak{B}_ю$ равнымъ $\mathfrak{A}_ю$, $ж, ж'$ и $ж''$

равными нулю, $Л_y$ — равнымъ $l\Phi$, $Л_z$ — равнымъ $Уl \sin \phi$ и $Л_x$ — равнымъ ($- Уl \cos \phi$); получимъ:

$$\mathfrak{A}_{ю}\phi'' = l\Phi; \; - \mathfrak{C}_{ю} r \phi' \sin \phi = l У \sin \phi; \; \frac{dr}{dt} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что r остается постоянною, что Φ пропорціональна угловому ускоренію ϕ'' и что:

$$У = - \mathfrak{C}_{ю} \frac{r}{l} \phi'; \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(915)}$$

слѣдовательно, *для того, чтобы вращать ось* $ЮZ$ *въ какой либо плоскости съ постоянною угловою скоростью, необходимо приложить къ точкѣ* K *силу, перпендикулярную къ этой плоскости; величина этой силы пропорціональна величинамъ угловыхъ скоростей* ϕ' *и* $r = \vartheta' = \omega$, *а направленіе ея противоположно направленію угловой скорости* ϕ'.

Положимъ, напримѣръ, что вращающееся тѣло (черт. 103) состоитъ изъ стальнаго стержня, латуннаго кольца съ круговымъ сѣченіемъ и латунной пластинки, соединяющей кольцо съ осью; размѣры этихъ частей слѣдующіе:

Стальной стержень есть круговой цилиндръ 6-ти сантиметровъ длины и 4-хъ миллиметровъ въ діаметрѣ; меридіональное сѣченіе кольца есть кругъ, радіусъ котораго = 1 сантиметру, а центръ отстоитъ отъ оси вращенія на 2 сантиметра; пластинка, соединяющая кольцо съ осью, есть цилиндръ съ цилиндрическою выемкою, которою онъ насаженъ на ось; высота цилиндра 2 миллиметра, наружный радіусъ — 1 сантиметръ, внутренній — 2 миллиметра.

Удѣльный вѣсъ стали — 7,82, латуни — 8,39.

По этимъ даннымъ вычислимъ величины массъ частей тѣла и моментовъ инерціи вокругъ оси $ЮZ$.

Масса стержня	$= 7{,}82 \,.\, \pi \,.\, 6\,(0{,}2)^2$ грамм.	$=$ 5,89 грамм.
Масса кольца	$= 8{,}39 \,.\, 2\pi 2 \,.\, \pi \,.\, 1^2$ грамм.	$=$ 331,11 грамм.
Масса пластинки	$= 8{,}39 \,.\, 0{,}2 \,.\, \pi\,(1^2 - (0{,}2)^2)$ гр.	$=$ 5,06 грамм.
Масса всего тѣла $=$		342,06 грамм.

Моментъ инерціи стержня $= 5,89 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,2)^2$ грамм. (сант.)^2 =
= 0,118 грам. (сант.)^2;

кольца $= 331,11 (2^2 + \frac{3}{4} \cdot 1^2)$ гр. (сант.)^2 = 1572,773 гр. (сант.)^2;

пластинки = $5,06 \cdot \frac{1}{2} (1^2 + (0,2)^2)$ гр. (сант.)^2 = 2,631 гр. (сант.)^2.

Моментъ инерціи всего тѣла ($\mathfrak{C}_{ю}$) = 1575,522 гр. (сант.)^2.

Пусть это тѣло вращается вокругъ оси *ЮZ*, дѣлая 100 оборотовъ въ секунду, такъ что:

$$\omega = 2\pi \cdot 100 \frac{1}{\text{секунд.}} = 628,318 \frac{1}{\text{секунд.}}$$

Спрашивается, какую силу надо приложить къ точкѣ *K* (точка *Ю* неподвижна) для того, чтобы ось *ЮK* совершала по 20 полныхъ оборотовъ въ минуту; по предыдущей формулѣ (915) величина силы равна

$$= \mathfrak{C} \frac{\omega}{l} \varphi' = 1575,522 \cdot \frac{628,318}{6} \cdot \frac{4\pi}{6} \cdot \frac{\text{гр. сант.}}{(\text{сек.})^2} =$$

$$= 345486 \text{ динамъ.}$$

Полагая $g = 981 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2}$, найдемъ, что вѣсъ тѣла равенъ 335560 динамъ; слѣдовательно, сила *У* болѣе вѣса тѣла.

Если точка K будетъ удерживаема плоскостью ZЮX, то, при возростаніи угла φ, эта точка будетъ производить давленіе на плоскость по направленію положительной оси Уовъ, а, при уменьшеніи угла φ, — давленіе по направленію отрицательной оси Уовъ; величина давленія выражается формулою (915).

Въ существованіи такого давленія можно убѣдиться на опытѣ при помощи слѣдующаго прибора (черт. 104).

Твердое тѣло, изображенное на чертежѣ 103-мъ, имѣетъ на концахъ оси симметріи по одному коническому углубленію; этими углубленіями тѣло вставлено между остроконечіями двухъ винтовъ *A* и *B* (черт. 104), ввинченныхъ въ кольцо *RR*; въ тѣло стержня *ab* ввинченъ или вдѣланъ небольшой штифтикъ *c*.

Тѣло приводится въ быстрое вращательное движеніе помощію шнурка съ петлею на концѣ.

Захвативъ кольцо RR одною рукою близъ винта A, другою — близъ винта B, и сообщивъ кольцу небольшое угловое движеніе въ его плоскости, можно почувствовать вышесказанное боковое давленіе, если тѣло M (черт. 104) приведено въ быстрое вращательное движеніе вокругъ оси AB; чѣмъ это вращеніе быстрѣе, тѣмъ давленіе замѣтнѣе.

§ 136. Приборы, служащіе для демонстрированія вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки подъ вліяніемъ силы тяжести.

Для повѣрки законовъ вращенія твердаго тѣла, разсмотрѣнныхъ въ примѣрѣ 111-мъ и въ § 126, могутъ служить слѣдующіе приборы: гироскопическіе вѣсы Фесселя и Плюкера, приборъ Фуко и волчокъ особаго устройства.

Въ гироскопѣ Фесселя и Плюкера вращающееся тѣло M (черт. 105) вставлено между остріями винтовъ A и B, ввинченныхъ въ кольцо RR, придѣланное къ цилиндрическому стержню SS. Остроконечія винтовъ A и B находятся на продолженіи оси стержня SS, такъ что ось вращенія тѣла M и ось стержня SS находятся на одной прямой. Стержень SS продѣтъ черезъ отверстіе муфты N, имѣющей шипы L и L_1, которые входятъ въ гнѣзда вилки V; эта вилка придѣлана къ верхней части стержня PP, который вставленъ въ особую подставку съ тяжелымъ основаніемъ EE (эта подставка означена пунктиромъ на чертежѣ). Стержень PP можетъ свободно вращаться въ трубкѣ TT подставки, опираясь остріемъ D въ дно этой трубки; съ другой стороны муфта N можетъ свободно вращаться вокругъ общей оси шиповъ L и L_1, такъ что ось стержня SS можетъ получить произвольное направленіе. Стержень SS можетъ скользить въ муфтѣ N, но онъ закрѣпляется въ ней нажимнымъ винтомъ n; кругъ G, надѣтый на стержень и закрѣпляемый на немъ нажимнымъ винтомъ g, служитъ какъ для уравновѣшенія вѣса тѣла M и кольца RR, такъ и для того, чтобы, перемѣщеніемъ этого груза вдоль по стержню, перенести общій центръ тяжести тѣла M, кольца RR, стержня SS и груза G по ту или по другую сторону оси LL_1, т. е. въ сторону кольца RR или въ противоположную.

Этотъ приборъ служитъ главнымъ образомъ для показанія прецессіональной части движенія быстро вращающагося тѣла. Для этого поступаютъ такъ: уравновѣшиваютъ противовѣсъ G съ кольцомъ RR; затѣмъ, помощью шнурка, сообщаютъ тѣлу M быстрое вращательное движеніе вокругъ его оси симметріи; если теперь передвинуть противовѣсъ G ближе къ муфтѣ N и, закрѣпивъ его винтомъ g въ новомъ положеніи, предоставить снарядъ самому себѣ, то замѣчается слѣдующее: послѣ нѣсколькихъ порывистыхъ колебаній, стержень SS приметъ нѣкоторое наклонное положеніе къ горизонту и вмѣстѣ съ вилкою V и стержнемъ PP получитъ вращательное движеніе вокругъ вертикальной оси этого послѣдняго; это прецессіональное движеніе тѣмъ медленнѣе, чѣмъ быстрѣе вращеніе тѣла M вокругъ его оси симметріи и чѣмъ меньше передвинутъ противовѣсъ G; если противовѣсъ G передвинуть въ противоположную сторону, далѣе отъ муфты, то получится прецессіональное движеніе противоположнаго знака.

Приборъ Фуко есть ни что иное, какъ снарядъ, описанный въ предыдущемъ параграфѣ и изображенный на чертежѣ 104-мъ; на кольцѣ, надъ однимъ изъ винтовъ A или B, сдѣлано коническое углубленіе, изображенное точкою y на чертежѣ 104-мъ; этимъ углубленіемъ кольцо накладывается на остріе какого либо заостреннаго вертикальнаго стержня, прикрѣпленнаго къ тяжелой подставкѣ.

Если тѣло M не вращается, то, при наложеніи кольца RR углубленіемъ y на остріе стержня, придется поддерживать кольцо рукою, чтобы оно не упало; если же тѣлу M предварительно сообщено быстрое вращеніе вокругъ его оси симметріи, то можно отнять руку и кольцо не упадетъ, а будетъ вращаться на остріѣ, совершая прецессіональное движеніе тѣмъ медленнѣе, чѣмъ быстрѣе вращается тѣло M.

Если тѣло M вращается вокругъ оси AB (черт. 106) въ сторону, означенную оперенною стрѣлкою, то прецессія оси AB будетъ совершаться въ сторону, означенную неоперенною стрѣлкою BN. Въ самомъ дѣлѣ, сила тяжести сообщаетъ точкѣ B движеніе по направленію BG, а, слѣдовательно, тѣлу M и кольцу RR угловую скорость вокругъ оси AY; какъ только это движеніе начнетъ зарождаться

ось AB получитъ стремленіе вращаться въ сторону, означенную неоперенною стрѣлкою *); это стремленіе, не встрѣчая никакого препятствія, произведетъ вышесказанное прецессіональное движеніе.

Кольцо не падаетъ потому, что прецессіональное движеніе въ означенную на чертежѣ 106-мъ сторону служитъ причиною образованія давленія, направленнаго параллельно оси AZ**); это давленіе, противодѣйствующее силѣ тяжести, тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе угловая скорость прецессіональнаго движенія; когда прецессія достигнетъ надлежащей величины, сказанное давленіе уравновѣсится съ дѣйствіемъ силы тяжести.

Эти два прибора служатъ только для показанія спеціальныхъ случаевъ вращательнаго движенія тѣла при большихъ угловыхъ скоростяхъ; приборъ же слѣдующаго устройства можетъ служить для показанія по крайней мѣрѣ пяти категорій случаевъ вращенія тѣла вокругъ неподвижной точки.

Приборъ состоитъ изъ волчка (черт. 107), опирающагося нижнимъ остріемъ A въ малое коническое или сферическое углубленіе, сдѣланное въ верхней части столбика S, укрѣпленнаго на неподвижной подставкѣ. Волчокъ представленъ на чертежѣ въ разрѣзѣ; онъ состоитъ изъ кольца MM съ конусомъ KK, сидящимъ плотно на стальной оси AB. Центръ тяжести волчка находится внѣ оси AB, примѣрно въ точкѣ $Ц$, такъ что положеніе, изображенное на чертежѣ, есть положеніе устойчивое.

Этотъ волчокъ имѣетъ то преимущество передъ предыдущими приборами, что онъ не обремененъ другими тѣлами, неучаствующими во вращеніи вокругъ оси симметріи, но участвующими во вращеніи вокругъ неподвижной точки. Кромѣ того, онъ представляетъ еще одно удобство: можно устроить такъ, что остріе B будетъ вычерчивать кривую линію на закопченной бумагѣ; на чертежахъ 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114 приведены точныя копіи нѣкоторыхъ кривыхъ, начерченныхъ подобнымъ волчкомъ.

---

*) На основаніи правила, приведеннаго и отпечатаннаго курсивомъ въ концѣ предыдущаго параграфа.

**) На основаніи того же правила.

Эти кривыя отличаются отъ теоретическихъ кривыхъ, изображенныхъ на чертежахъ 93 *a*, 94 *a*, 95 *a*, 92 *a*, 96 *a* тѣмъ, что каждая изъ послѣднихъ заключается между двумя концентрическими кругами, тогда какъ первыя имѣютъ видъ спиралей вслѣдствіе уменьшенія размаховъ волчка отъ сопротивленія воздуха.

Кривыя эти получены при слѣдующихъ условіяхъ:

Когда волчокъ не вращается и стоитъ неподвижно, то, отклонивъ его изъ положенія равновѣсія толчкомъ, даннымъ въ верхнюю часть стержня *AB*, приведемъ волчокъ въ качательное движеніе, тождественное съ качаніемъ простаго математическаго маятника въ вертикальной плоскости; при этомъ остріе *B* будетъ чертить на закопченной бумагѣ прямую линію, а размахи будутъ уменьшаться вслѣдствіе сопротивленія воздуха и тренія острія о бумагу; если же, передъ сообщеніемъ толчка, волчку было сообщено слабое вращеніе вокругъ оси *AB*, то остріе будетъ чертить кривую линію, изображенную на чертежѣ 108; соотвѣтствующая ей теоретическая кривая изображена на чертежѣ 93 *a*.

Если оси *AB* вращающагося волчка будетъ сообщена угловая скорость вокругъ вертикальной оси въ сторону возрастающихъ *ж*, то получатся кривыя вида, изображеннаго на черт. 109 (сравнить черт. 94, *a*), или вида, изображеннаго на чертежѣ 111-мъ (сравнить черт. 92, *a*); если же оси *AB* сообщена угловая скорость въ сторону противоположную, то остріе чертитъ кривыя такія, какъ на чертежахъ 112 и 113 (сравнить черт. 96, *a*). Если вращающееся тѣло будетъ отклонено за остріе *B* и затѣмъ пущено безъ всякаго толчка, то получится одна изъ кривыхъ вида, изображеннаго на чертежѣ 110 (сравнить чертежъ 95, *a*).

Если волчку сообщена значительная скорость вращенія вокругъ оси симметріи и ось его *AB* отклонена отъ вертикальной оси, то остріе вычерчиваетъ спираль съ зазубринами, изображенную на чертежѣ 114-мъ; подобныя же спирали вычерчиваетъ свободный конецъ оси и въ приборахъ Фесселя и Фуко.

§ 137. Твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку опоры, опирается кромѣ того своею поверхностью на поверхность другаго неподвижнаго тѣла. Периметрическое вращеніе.

Если твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку опоры, должно опираться своею поверхностью на поверхность другаго неподвижнаго твердаго тѣла, то оно имѣетъ двѣ степени свободы, если прикасающіяся поверхности могутъ скользить одна по другой; если же оно можетъ только катиться по неподвижной поверхности, не скользя по ней, то тогда имѣетъ только одну степень свободы.

При рѣшеніи какого либо подобнаго вопроса слѣдуетъ прежде всего составить аналитическое выраженіе условія, что движущееся тѣло опирается на поверхность неподвижнаго тѣла; какъ составить такое выраженіе — показано въ § 130.

Затѣмъ надо составить дифференціальныя уравненія вращательнаго движенія тѣла, причемъ выраженія проэкцій момента реакцій связи на оси координатъ должны быть составлены по формуламъ (864) и (869) параграфа 129-го. Если соприкасающіяся поверхности предполагаются шероховатыми, то нужно въ дифференціальныя уравненія ввести проэкціи на оси координатъ момента силы тренія. Въ тѣхъ случаяхъ, когда движеніе сопровождается скольженіемъ трущихся поверхностей, сила тренія, приложенная къ каждой скользящей точкѣ движущагося тѣла, противоположна скорости этой точки и равна давленію въ этой точкѣ, умноженному на коэфиціентъ тренія между поверхностями. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда движущееся твердое тѣло катится по неподвижной поверхности безъ скольженія, направленіе и величину тренія въ точкѣ прикосновенія должно считать неизвѣстными; извѣстно только, что сила тренія направлена въ общей касательной плоскости къ двумъ соприкасающимся поверхностямъ; кромѣ того, тогда надо присоединить еще условіе, выражающее, что мгновенная ось проходитъ черезъ точку прикосновенія; это условіе выразится такъ:

$$\zeta_0 q - \eta_0 r = 0, \quad \xi_0 r - \zeta_0 p = 0, \quad \eta_0 p - \xi_0 q = 0,$$

гдѣ ξ_0, η_0, ζ_0 суть относительныя координаты точки прикосновенія движущагося тѣла.

Для примѣра, разсмотримъ вопросъ о такъ называемомъ периметрическомъ вращеніи.

Примѣръ 112. Твердое однородное тѣло, ограниченное поверхностью вращенія, имѣетъ неподвижную точку на оси симметріи; центръ инерціи его не совпадаетъ съ неподвижною точкою. Неподвижная поверхность, на которую опирается наружная поверхность движущагося тѣла, такова, что точка взаимнаго прикосновенія поверхностей находится въ постоянномъ разстояніи R отъ неподвижной точки $Ю$. Предполагается, что движущееся тѣло подвержено дѣйствію силы тяжести. Обратить вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ движеніе можетъ быть опредѣлено вполнѣ.

При заданномъ условіи, нѣкоторый опредѣленный кругъ поверхности вращающагося тѣла прикасается къ периметру нѣкоторой сферической неподвижной фигуры, образуемой пересѣченіемъ неподвижной поверхности со сферою радіуса R; пусть ρ есть радіусъ вышесказаннаго круга, а ζ_0 — разстояніе его плоскости отъ точки $Ю$; $(\rho^2 + \zeta_0{}^2 = R^2)$; означимъ черезъ β величину угла, подъ которымъ радіусъ ρ виденъ изъ точки $Ю$ $(\rho = R \sin\beta,\ \zeta_0 = R\cos\beta)$. Условимся обозначать этотъ кругъ буквою Q, а сферическую кривую — буквою S.

Прежде всего выразимъ условіе взаимнаго прикосновенія сказанныхъ кривыхъ. Проведемъ сферу радіуса равнаго единицѣ, имѣющую центромъ точку $Ю$; означимъ черезъ Z, Z и K (черт. 115) — точки пересѣченія этой сферы осями $ЮZ$ (направлена снизу вверхъ), $Ю\mathsf{Z}$ и радіусомъ, проведеннымъ изъ $Ю$ къ точкѣ прикосновенія вышесказанныхъ кривыхъ; пусть φ и ψ суть сферическія координаты точки K, а

$$\varphi = f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (916)$$

— уравненіе конической поверхности, вершиною которой служитъ точка $Ю$, а направляющею — периметръ неподвижной кривой S.

Такъ какъ дуга $K\mathsf{Z}$ постоянно равна β, то (см. черт. 115):

$$\cos\beta = \cos\varphi\cos\phi + \sin\varphi\sin\phi\cos(\psi - ж); \ldots (917)$$

кромѣ того, дуга $\mathsf{Z}K$ должна быть ортогональна къ сферической кривой $K\sigma$ (черт. 115), образуемой пересѣченіемъ конической поверхности (916) со сферою; это выразится такъ:

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi d\psi} = tg\iota, \ldots\ldots\ldots\ldots (918, a)$$

гдѣ ε есть уголъ, составляемый продолженіемъ дуги $\mathsf{Z}K$ съ дугою KZ; выразивъ $tg\varepsilon$ по формуламъ сферической тригонометріи въ углахъ φ, ϕ и $(\psi - ж)$, можемъ представить предыдущее равенство подъ слѣдующимъ видомъ:

$$f'(\psi)\left(\sin\varphi\cos\phi - \sin\phi\cos\varphi\cos(\psi - ж)\right) +$$
$$+ \sin\varphi\sin\phi\sin(\psi - ж) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{918})$$

Аналитическое выраженіе связи получится по исключеніи угловъ φ и ψ изъ равенствъ (916), (917), (918).

Кромѣ того, равенство (917) можетъ быть представлено еще и подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\zeta_0 = x_0\nu_x + y_0\nu_y + z_0\nu_z; \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{917}\ \text{bis})$$

(x_0, y_0, z_0 суть абсолютныя координаты точки прикосновенія круга Q къ сферической кривой S, а ξ_0, η_0, ζ_0 — координаты этой точки относительно осей Ξ, Υ, Z, неизмѣнно связанныхъ съ движущимся твердымъ тѣломъ:

$$x_0 = R\sin\varphi\cos\psi = \xi_0\lambda_x + \eta_0\mu_x + \zeta_0\nu_x,$$
$$y_0 = R\sin\varphi\sin\psi = \xi_0\lambda_y + \eta_0\mu_y + \zeta_0\nu_y,$$
$$z_0 = R\cos\varphi \qquad\quad = \xi_0\lambda_z + \eta_0\mu_z + \zeta_0\nu_z).$$

Равенство (918) можно также представить иначе. Вообразимъ себѣ точку μ, движущуюся по периметру сферической кривой S такимъ образомъ, чтобы она всегда совпадала съ точкою прикосновенія круга Q къ этой кривой; очевидно, что x_0, y_0, z_0 будутъ абсолютными, а ξ_0, η_0, ζ_0 — относительными координатами точки μ; производныя x'_0, y'_0, z'_0 будутъ выражать проэкціи на оси X, Y, Z абсолютной скорости v_0 этой точки, а производныя ξ'_0, η'_0, ζ'_0 (по времени) будутъ выражать проэкціи на оси Ξ, Υ, Z относительной скорости u_0 этой точки по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу. Выразимъ теперь, что скорость v_0 перпендикулярна къ оси Z (она перпендикулярна къ плоскости, заключающей эту ось); получимъ:

$$\frac{dx_0}{dt}\nu_x + \frac{dy_0}{dt}\nu_y + \frac{dz_0}{dt}\nu_z = 0; \ldots\ldots (\mathbf{918},\ \text{bis})$$

не трудно убѣдиться, что это есть ни что иное, какъ другая форма равенства (918); стоитъ только выразить x_0, y_0, z_0 въ углахъ φ и ψ, а косинусы ν_x, ν_y, ν_z — въ углахъ ϕ и $ж$.

Взявъ производную отъ (917, bis) по t и принявъ во вниманіе равенство (918, bis), будемъ имѣть:

$$x_0\nu'_x + y_0\nu'_y + z_0\nu'_z = 0;$$

замѣнивъ производныя отъ косинусовъ ихъ выраженіями по формуламъ (120) стр. 105 кинематической части, получимъ:

$$q(x_0\lambda_x + y_0\lambda_y + z_0\lambda_z) - p(x_0\mu_x + y_0\mu_y + z_0\mu_z) = 0, \; . \; \mathbf{(919)}$$

или:

$$q\xi_0 - p\eta_0 = 0, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbf{(919, a)}$$

$$\frac{p}{\xi_0} = \frac{q}{\eta_0} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbf{(919\ b)}$$

Это равенство, полученное такимъ образомъ чрезъ однократное дифференцированіе уравненія связи (917, bis) по t, можно получить гораздо проще при помощи слѣдующаго соображенія:

Такъ какъ кругъ Q долженъ всегда касаться къ неподвижной сферической кривой S, то скорость той точки движущагося твердаго тѣла, которою оно прикасается къ кривой S, должна быть либо перпендикулярна къ тому радіусу круга Q, который направляется къ точкѣ прикосновенія, либо равна нулю; поэтому, во всякомъ случаѣ, проэкція на ось Z скорости этой точки должна быть нуль, т. е.:

$$\eta_0 p - \xi_0 q = 0.$$

Кромѣ этой формулы (919), которою намъ придется воспользоваться при изслѣдованіи вопроса, мы выведемъ теперь-же еще и другія формулы и выраженія, необходимыя намъ для той же цѣли.

a) Изъ равенства (919, *a*) можемъ прямо заключить, что:

$$\xi_0\theta_\eta - \eta_0\theta_\xi = 0, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbf{(920)}$$

а отсюда видно, что проэкціи на оси Ξ, Υ, Z момента реакціи вокругъ точки *Ю* равны:

$$(\Lambda_ю)_\xi = -\lambda\eta_0, \; (\Lambda_ю)_\eta = \lambda\xi_0, \; (\Lambda_ю)_\zeta = 0 \; \ldots\ldots \; \mathbf{(921)}$$

b) Для опредѣленія множителя λ намъ послужитъ равенство:

$$\xi_0\frac{dq}{dt} - \eta_0\frac{dp}{dt} = p\frac{d\eta_0}{dt} - q\frac{d\xi_0}{dt}, \; \ldots\ldots\ldots \; \mathbf{(922)}$$

получаемое изъ равенства (919 *a*) чрезъ дифференцированіе по t.

c) Производныя отъ η_0 и ξ_0 по t суть проэкціи на оси Υ и Ξ скорости u_0 относительнаго движенія точки μ по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу; но изъ кинематики относительнаго движенія слѣдуетъ:

$$u_0 \cos(u_0, \Xi) = v_0 \cos(v_0, \Xi) - (\zeta_0 q - \eta_0 r),$$

$$u_0 \cos(u_0, \Upsilon) = v_0 \cos(v_0, \Upsilon) - (\xi_0 r - \zeta_0 p);$$

подставимъ эти выраженія во вторую часть равенства (922). Означимъ черезъ $\mathfrak{o}$ величину и направленіе проэкціи угловой скорости движущагося тѣла на плоскость $\Xi\Upsilon$, такъ что:

$$\mathfrak{o}^2 = p^2 + q^2, \quad \mathfrak{o}\cos(\mathfrak{o}, \Xi) = p, \quad \mathfrak{o}\cos(\mathfrak{o}, \Upsilon) = q,$$

тогда вторая часть равенства (922) получитъ слѣдующій видъ:

$$v_0 \mathfrak{o}\left[\cos(\mathfrak{o}, \Xi)\cos(v_0, \Upsilon) - \cos(\mathfrak{o}, \Upsilon)\cos(v_0, \Xi)\right] +$$
$$+ \zeta_0 \mathfrak{o}^2 - r\mathfrak{o}\rho_0 \cos(\mathfrak{o}, \rho_0).$$

Изъ равенства (919, *b*) слѣдуетъ, что $\mathfrak{o}$ направлена либо вдоль по ρ_0 (*EP*, черт. 116), либо противоположно ρ_0; въ первомъ случаѣ $\cos(\mathfrak{o}, \rho_0)$ равенъ $+1$, во второмъ (-1). Далѣе, скорость v_0 перпендикулярна къ ρ_0, а слѣдовательно и къ $\mathfrak{o}$, а потому первый членъ предыдущаго выраженія равенъ $\mp v_0 \mathfrak{o}$ (въ томъ случаѣ, который представленъ на чертежѣ 116-мъ, надо взять знакъ минусъ).

Вслѣдствіе всего вышесказаннаго, равенству (922) можно дать слѣдующій видъ:

$$\xi_0 q' - \eta_0 p' = -v_0 \mathfrak{o} + \zeta_0 \mathfrak{o}^2 - r\mathfrak{o}\rho_0 \ldots\ldots \quad (923)$$

для случая, изображеннаго на чертежѣ 116-мъ.

d) По формуламъ сферической тригонометріи, примѣнивъ ихъ къ сферическому треугольнику *ZZK* (черт. 115), и на основаніи равенства (918, *a*), найдемъ слѣдующія выраженія:

$$\cos \vartheta = \cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi\cos\varepsilon =$$
$$= \cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\frac{d\psi}{d\sigma}\sin^2\varphi, \ldots\ldots\ldots \quad (924)$$

$$\sin\vartheta\sin(\psi - \text{ж}) = \sin\beta\frac{d\psi}{d\sigma}f'(\psi), \ldots\ldots\ldots \quad (925)$$

$$\sin\vartheta\cos(\psi - \text{ж}) = \cos\beta\sin\varphi + \sin\beta\frac{d\psi}{d\sigma}\sin\varphi\cos\psi, \ldots \quad (926)$$

гдѣ:

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = \sqrt{\sin^2\varphi + (f'(\psi))^2}.$$

e) Дуга ZK (черт. 115) сохраняетъ постоянную длину и. всегда ортогональна къ кривой $K\sigma$, а поэтому она ортогональна также и къ той кривой линіи, которую описываетъ точка Z, поэтому:

$$\frac{1}{\sin \phi}\frac{d\phi}{d\text{ж}} = \frac{\phi'}{\text{ж}'\sin\phi} = \operatorname{tg} \varepsilon_1; \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (927)$$

но такъ какъ:

$$\mathfrak{v}^2 = (\phi')^2 + (\text{ж}')^2 \sin^2\phi,$$

то изъ равенства (927), при помощи формулъ сферической тригонометріи, получимъ:

$$\phi' = \mathfrak{v} \sin \varepsilon_1 = \mathfrak{v} \sin \varphi \frac{\sin(\psi - \text{ж})}{\sin \beta}, \ldots \ldots \ldots (928)$$

$$\text{ж}'\sin\phi = \mathfrak{v}\cos\varepsilon_1 = \frac{\mathfrak{v}}{\sin\beta}(\cos\varphi\sin\phi - \sin\varphi\cos\phi\cos(\psi - \text{ж})) \ldots (929)$$

f) Изъ равенствъ (928) и (925) слѣдуетъ:

$$-\frac{d\cos\phi}{dt} = \mathfrak{v}\frac{d\psi}{d\sigma} f'(\psi)\sin\varphi; \ldots \ldots \ldots \quad (930)$$

равенство же (929) можно представить еще такъ:

$$\text{ж}'\sin^2\phi = \mathfrak{v}(\cos\varphi\sin\beta + \cos\beta\frac{d\psi}{d\sigma}\sin^2\varphi) \ldots (929, a)$$

g) Возьмемъ производную по t отъ $\cos \phi$, выраженнаго формулою (924); по сравненіи найденнаго такимъ образомъ выраженія съ выраженіемъ (930), получимъ слѣдующую зависимость между $\frac{d\sigma}{dt}$ и $\mathfrak{v}$:

$$H\frac{d\sigma}{dt} = \mathfrak{v}\sin\varphi, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (931)$$

гдѣ:

$$H = \sin\phi\cos(\psi - \text{ж}) + \frac{\sin\beta\sin\varphi}{f'(\psi)}\ \frac{d\sigma}{d\psi}\ \frac{d\left(\sin\varphi\frac{d\psi}{d\sigma}\right)}{d\sigma}.$$

h) Слѣдуетъ замѣтить, что

$$v_0 = \pm R\frac{d\sigma}{dt}.$$

Перейдемъ теперь къ составленію дифференціальныхъ уравненій вращенія тѣла.

Положимъ, что центръ инерціи тѣла находится на отрицательной части оси Z, въ разстояніи γ отъ точки *Ю*; потенціалъ силы тяжести выразится такъ: $Mg\gamma\cos\mathit{\Phi}$ (ось $\mathsf{Z}^{\text{овъ}}$ направлена противоположно силѣ тяжести, т. е. вверхъ), а проэкціи на оси $\Xi, \Upsilon, \mathsf{Z}$ главнаго момента силъ тяжести будутъ:

$$-Mg\gamma\mu_z,\ Mg\gamma\lambda_z,\ 0.$$

Разсматриваемая въ настоящемъ вопросѣ связь — неудерживающая, потому что кругъ Q можетъ отдѣлиться отъ кривой S, такъ что дуга $\mathsf{Z}K$, ортогональная къ кривой σ, можетъ сдѣлаться болѣе β; слѣдовательно, выраженіе связи слѣдуетъ писать такъ:

$$\cos\beta - \cos\mathit{\Phi}\cos\varphi - \sin\mathit{\Phi}\sin\varphi\cos(\psi - ж) \geqslant 0,$$

а условіе возможныхъ варьяцій положеній твердаго тѣла — такъ:

$$\eta_0\theta_\xi - \zeta_0\theta_\eta \geqslant 0;$$

поэтому проэкціи на оси $\Xi, \Upsilon, \mathsf{Z}$ момента реакціи связи выразятся такъ:

$$\lambda\eta_0,\ \ -\lambda\xi_0,\ \ 0,$$

причемъ надо имѣть въ виду, что множитель λ не долженъ быть отрицательнымъ.

Моментъ силы реакціи равенъ $\lambda\rho_0$, точка приложенія ея есть точка P прикосновенія поверхностей; направленіе ея — есть направленіе общей нормали N (черт. 117), а величина ея равна:

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda\rho_0}{R\sin a},$$

гдѣ a есть уголъ, составляемый нормалью N съ продолженіемъ длины *ЮР* (которая равна R).

Слѣдуетъ еще принять въ разсчетъ силу тренія въ точкѣ P. Эта сила, приложенная къ точкѣ P движущагося тѣла, направлена во всякомъ случаѣ по общей касательной къ кривымъ S и Q.

Если вращающееся тѣло скользитъ по периметру кривой S, то направленіе силы тренія противоположно направленію скорости скользящей точки P, и величина силы равна:

$$F = k\mathfrak{N} = k\frac{\lambda\rho_0}{R\sin a},$$

гдѣ k — коэфиціентъ тренія.

Означимъ черезъ w_0 величину и направленіе скорости точки P твердаго тѣла; какъ извѣстно:

$$w_0\cos(w_0, \Xi) = q\zeta_0 - r\eta_0,\ w_0\cos(w_0, \Upsilon) = r\xi_0 - p\zeta_0,$$
$$w_0\cos(w_0, \mathrm{Z}) = p\eta_0 - q\xi_0.$$

Если w_0 не равна нулю, то проэкціи силы тренія на оси Ξ, Υ, Z будутъ:

$$-F\cos(w_0, \Xi),\quad -F\cos(w_0, \Upsilon),\ 0,$$

а моменты ея вокругъ этихъ осей выразятся такъ:

$$\zeta_0 F\cos(w_0, \Upsilon),\ -\zeta_0 F\cos(w_0, \Xi),\ -\xi_0 F\cos(w_0, \Upsilon), + \eta_0 F\cos(w_0, \Xi).$$

Если же вращающееся тѣло катится по неподвижному тѣлу безъ скольженія, то величина силы F заранѣе не извѣстна, но, во всякомъ случаѣ, она не можетъ быть болѣе $k\mathfrak{N}$; неизвѣстно также, какъ направлена сила тренія: вдоль ли по скорости v_0, или противоположно ей; все это можетъ быть опредѣлено только послѣ того, какъ законъ движенія сдѣлается извѣстнымъ.

Во всякомъ случаѣ, если означимъ черезъ F_ξ и F_η проэкціи силы тренія на оси Ξ и Υ, то моменты ея вокругъ осей Ξ, Υ, Z выразятся такъ:

$$-\zeta_0 F_\eta,\ \zeta_0 F_\xi,\ (\xi_0 F_\eta - \eta_0 F_\xi).$$

Дифференціальныя уравненія вращенія будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} = (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})qr - Mg\gamma\mu_z + \lambda\eta_0 - \zeta_0 F_\eta, \ldots (932, a)$$

$$\mathfrak{A}\frac{dq}{dt} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})rp + Mg\gamma\lambda_z - \lambda\xi_0 + \zeta_0 F_\xi, \ldots (932, b)$$

$$\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} = \xi_0 F_\eta - \eta_0 F_\xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (932, c)$$

Сначала остановимся на случаяхъ катанія безъ скольженія; тогда $w_0 = 0$, т. е.

$$\frac{p}{\xi_0} = \frac{q}{\eta_0} = \frac{r}{\zeta_0} = \frac{\mathfrak{o}}{\rho_0} = \frac{\Omega}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(933)}$$

Помноживъ первое изъ уравненій (932) на p, второе — на q, третье — на r, сложивъ всѣ уравненія, принявъ во вниманіе равенства (919, a), (933) и имѣя въ виду, что:

$$q\lambda_z - p\mu_z = -\phi' \sin\phi = \frac{d\cos\phi}{dt},$$

получимъ дифференціальное уравненіе:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{o}\frac{d\mathfrak{o}}{dt} + \mathfrak{C}r\frac{dr}{dt} = Mg\gamma\frac{d\cos\phi}{dt},$$

которое интегрируется; интегралъ его:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{o}^2 + \mathfrak{C}r^2 = 2\,(Mg\gamma\cos\phi + h) \ldots\ldots\ldots \textbf{(934)}$$

выражаетъ законъ живой силы.

Изъ интеграла (934), на основаніи равенствъ (933), получимъ слѣдующее выраженіе величины квадрата угловой скорости:

$$\Omega^2 = \frac{2R^2(Mg\gamma\cos\phi + h)}{\mathfrak{A}\rho_0{}^2 + \mathfrak{C}\zeta_0{}^2} \ldots\ \ldots\ldots \textbf{(935)}$$

Слѣдовательно, *когда вращающееся тѣло катится по периметру S безъ скольженія, тогда угловая скорость уменьшается при увеличеніи угла ϕ и, обратно, увеличивается при уменьшеніи его по простому, сравнительно, закону, выражаемому формулою (935).*

Для того, чтобы такое движеніе могло совершаться въ дѣйствительности, необходимо, чтобы твердое тѣло не могло нигдѣ отдѣлиться отъ периметра S и чтобы величина силы тренія нигдѣ не превышала бы величины произведенія $k\mathfrak{N}$; чтобы имѣть возможность судить объ этомъ, надо получить выраженія для λ и F.

Выраженіе для λ получимъ слѣдующимъ образомъ: помножимъ уравненіе (932, a) на η_0 и придадимъ сюда уравненіе (932, b), помноженное на $(-\xi_0)$; принявъ въ разсчетъ, что:

$$p\xi_0 + q\eta_0 = \mathfrak{o}\rho_0,\ \ \lambda_z\xi_0 + \mu_z\eta_0 = z_0 - \zeta_0\cos\phi,$$

$$\eta_0 p' - \xi_0 q' = q\xi_0' - p\eta_0' = v_0\mathfrak{o}$$

и что:

$$\xi_0 F_\xi + \eta_0 F_\eta = 0,$$

такъ какъ сила тренія перпендикулярна къ ρ_0, получимъ:

$$\mathfrak{A} v_0 \mathfrak{o} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\, \mathfrak{o}^2 \zeta_0 + Mg\gamma(z_0 - \zeta_0 \cos\phi) = \lambda\rho^2 \ldots \textbf{(936)}$$

Величину и направленіе силы тренія можно опредѣлить изъ уравненія (932, c); вторая часть этого уравненія выражаетъ моментъ силы тренія вокругъ оси **Z**, такъ что:

$$\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} = \rho_0 F;$$

но $r:\zeta_0 = \Omega : R$, поэтому на основаніи равенствъ (935), (930) получимъ:

$$F = -\frac{\mathfrak{C} Mg\gamma\zeta_0}{\mathfrak{A}\rho_0^2 + \mathfrak{C}\zeta_0^2} \sin\varphi\, f'(\psi)\frac{d\psi}{d\sigma} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(937)}$$

Изъ этого выраженія видно, что сила тренія равна нулю въ тѣхъ мѣстахъ кривой S, гдѣ $f'(\psi) = 0$. Въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ $f'(\psi) > 0$, получается отрицательное значеніе для F; это означаетъ, что въ этихъ мѣстахъ сила тренія имѣетъ отрицательный моментъ вокругъ оси **Z**. Напротивъ, въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ $f'(\psi) < 0$, сила тренія имѣетъ противоположное направленіе.

Выраженіе (936) послужитъ для того, чтобы опредѣлить, въ какихъ мѣстахъ периметра S движущееся тѣло отдѣлится отъ сферической кривой; это будетъ тамъ, гдѣ выраженіе:

$$\lambda\rho_0^2 = \left(\mathfrak{A} R\frac{\sin\varphi}{H} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\zeta_0\right)\frac{2\rho_0^2(Mg\gamma\nu_z + h)}{\mathfrak{A}\rho_0^2 + \mathfrak{C}\zeta_0^2} +$$
$$+ Mg\gamma(z_0 - \zeta_0\nu_z) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(936, a)}$$

обращается въ нуль, переходя отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ.

Съ другой стороны это же самое выраженіе и выраженіе (937) послужатъ для того, чтобы опредѣлить, въ какихъ мѣстахъ движущееся тѣло начнетъ скользить по периметру S; это будетъ тамъ, гдѣ абсолютная величина F будетъ болѣе $k\mathfrak{R}$.

Положимъ, что кривая S есть кругъ: $\varphi = \alpha$; въ этомъ случаѣ:

$$f(\psi) = \alpha,\ f'(\psi) = 0,\ ж = \psi,\ \sin\varphi \frac{d\psi}{d\sigma} = 1,\ H = \sin(\alpha \pm \beta),$$

$$ф = \alpha \pm \beta,\ F = 0,$$

$$\lambda\rho_0^2 = \left(\mathfrak{A}R\frac{\sin\alpha}{\sin ф} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\zeta_0\right)\mathfrak{v}^2 \pm Mg\gamma\rho_0 \sin ф;$$

верхніе знаки относятся къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ кругъ Q находится на той сторонѣ круга S, гдѣ $\varphi > \alpha$.

Изъ того обстоятельства, что при катаніи по периметру круга $\varphi = \alpha$ величина силы F равна нулю, слѣдуетъ, что катящееся тѣло не начнетъ скользить по периметру.

Изъ выраженія же для λ слѣдуетъ, что катящееся тѣло не покинетъ периметра, если угловая скорость $\mathfrak{v}$ будетъ удовлетворять условію:

$$\mathfrak{v}^2 > -\frac{Mg\gamma\rho_0 \sin^2 ф}{\mathfrak{A}R\sin\alpha + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\zeta_0 \sin ф} \dots\dots\dots \mathbf{(938,a)}$$

при $ф = \alpha + \beta$, или условію:

$$\mathfrak{v}^2 > +\frac{Mg\gamma\rho_0 \sin^2 ф}{\mathfrak{A}R\sin\alpha + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\zeta_0 \sin ф} \dots\dots\dots \mathbf{(938,b)}$$

при $ф = \alpha - \beta$; стало быть, въ первомъ случаѣ катящееся тѣло не сойдетъ съ периметра $\varphi = \alpha$ ни при какой угловой скорости $\mathfrak{v}$; во второмъ же случаѣ, т. е., если $ф = \alpha - \beta$, тѣло не сойдетъ съ периметра только при угловыхъ скоростяхъ $\mathfrak{v}$ не меньшихъ корня квадратнаго второй части неравенства (938, b).

Возьмемъ иной случай: положимъ, что центръ круга S находится не на оси $Z^{овъ}$, а имѣетъ слѣдующія координаты: $\psi = 0$, $\varphi = \varkappa$; въ такомъ случаѣ координата φ точки прикосновенія (черт. 118) выразится такъ:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\varkappa - \sin\alpha\sin\varkappa\cos u,$$

гдѣ u есть сферическій уголъ, обозначенный на чертежѣ 118-мъ; между нимъ и длиною дуги σ существуетъ зависимость:

$$u\sin\alpha = \sigma;$$

величина $\cos ф$ выразится такъ:

$$\cos ф = \cos\varkappa\cos(\alpha \pm \beta) - \sin\varkappa\sin(\alpha \pm \beta)\cos u,$$

гдѣ верхніе знаки относятся къ случаю катанія круга Q внѣ круга S, нижніе — къ случаю катанія внутренняго.

Изъ соотношеній между синусами угловъ сферическихъ треугольниковъ ZKZ и ZKC (см. чертежъ 118-й) получимъ равенство:

$$\sin\varphi \sin\phi \sin(\text{ж} - \psi) = \sin\beta \sin\varkappa \sin u,$$

съ помощью котораго изъ равенствъ (925) и (930) выведемъ слѣдующее:

$$\frac{d\cos\phi}{dt} = \mathfrak{o} \sin\varkappa \sin u;$$

затѣмъ, изъ равенствъ, приведенныхъ въ концѣ предыдущей страницы, получимъ:

$$v_0 = R\frac{d\sigma}{dt} = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha \pm \beta)}\,\mathfrak{o}.$$

Вслѣдствіе этого величины $\lambda\rho_0^2$ и F (936, a) (937) выразятся слѣдующими формулами:

$$\lambda\rho_0^2 = \left(\mathfrak{A}\frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha\pm\beta)} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\zeta_0\right)\mathfrak{o}^2 \pm$$

$$\pm Mg\gamma\rho_0(\cos\varkappa\sin(\alpha\pm\beta) + \sin\varkappa\cos(\alpha\pm\beta)\cos u), \ldots \textbf{(939)}$$

$$F = \frac{\mathfrak{C}\,Mg\gamma\zeta_0}{\mathfrak{A}\rho_0^2 + \mathfrak{C}\zeta_0^2}\sin\varkappa\sin u \ldots\ldots\ldots \textbf{(940)}$$

Разсмотримъ случай наружнаго катанія. Означимъ черезъ ω_1 то значеніе, которое имѣетъ $\mathfrak{o}$ тогда, когда кругъ Q прикасается къ самой верхней точкѣ круга S, т. е., при $u = \pi$, гдѣ $\phi = \alpha + \beta - \varkappa$. Взявъ въ формулѣ (939) верхніе знаки, дадимъ ей слѣдующій видъ:

$$\lambda\rho_0^2 = B\cos^2\frac{u}{2} + A\sin^2\frac{u}{2},$$

гдѣ:

$$A = D\omega_1^2 + Mg\gamma\rho_0\sin(\alpha + \beta - \varkappa),$$

$$D = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}(\mathfrak{A}\sin\alpha + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\cos\beta\sin(\alpha+\beta)),$$

$$B = D\omega_1^2 - K,\; K = Mg\gamma\rho_0(E\sin\varkappa + G\sin(\alpha+\beta)),$$

$$E = \frac{2D\rho_0}{R^2 I}\sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$G = \frac{2D\rho_0}{R^2 I}\sin\varkappa - \cos\varkappa, \quad R^2 I = \mathfrak{A}\rho_0^2 + \mathfrak{C}\zeta_0^2.$$

Очевидно, A есть величина положительная. Если и B тоже величина положительная, т. е., если $D\omega_1^2$ болѣе K, то λ будетъ положительнымъ при всякихъ u; стало быть кругъ Q тогда нигдѣ не сойдетъ съ периметра S.

Если же $D\omega_1^2$ менѣе K, то λ будетъ имѣть положительныя значенія только для тѣхъ u, которыя не менѣе u_1 и не болѣе $(2\pi - u_1)$, гдѣ u_1 есть уголъ, опредѣляемый равенствомъ:

$$\operatorname{tg}^2\frac{u_1}{2} = \frac{K - D\omega_1^2}{A};$$

поэтому въ такихъ случаяхъ оконечность тѣла будетъ двигаться слѣдующимъ образомъ (см. черт. 119-й): отъ a черезъ b до c кругъ Q катится по периметру S, въ точкѣ c онъ отдѣляется отъ S и оконечность тѣла, двигаясь на свободѣ, описываетъ дугу cfa нѣкотораго круга, имѣющаго центръ на вертикальной линіи OZ, пока опять не приляжетъ къ периметру въ точкѣ a; затѣмъ катаніе по периметру повторяется снова.

Надо еще узнать, вездѣ ли кругъ Q будетъ катиться безъ скольженія по периметру круга S. Чистое катаніе возможно только тамъ, гдѣ абсолютная величина силы F (940) менѣе $k\mathfrak{N}$. Составимъ выраженіе разности $(k\mathfrak{N} - F)$ или разности:

$$A\sin^2\frac{u}{2} + B\cos^2\frac{u}{2} - 2Mg\gamma\rho_0 C\sin\varkappa\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$$

$$C = \frac{\mathfrak{C}\zeta_0\sin a}{RIk}$$

и представимъ это выраженіе подъ слѣдующимъ видомъ:

$$A\left(\sin\frac{u}{2} - Mg\gamma\rho_0\cdot\frac{C}{A}\sin\varkappa\cos\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{N}{A}\cos^2\frac{u}{2}, \ldots \quad \textbf{(941)}$$

гдѣ

$$N = AB - (Mg\gamma\rho_0 C\sin\varkappa)^2.$$

Легко убѣдиться, что

$$\sin(\alpha+\beta-\varkappa)=E\sin\varkappa-G\sin(\alpha+\beta),$$

а потому N выразится такъ:

$$N=(D\omega_1^2-Mg\gamma\rho_0 G\sin(\alpha+\beta))^2-(Mg\gamma\rho_0\sin\varkappa)^2(E^2+C^2).\,\,(942)$$

Изъ выраженій (941) и (942) оказывается, что катаніе будетъ совершаться безъ скольженія по всему периметру, если N болѣе нуля, т. е., $D\omega_1{}^2$ не только болѣе K, но еще и болѣе слѣдующей величины:

$$L=Mg\gamma\rho_0\left[(\sin\varkappa)\sqrt{E^2+C^2}+G\sin(\alpha+\beta)\right].$$

Если $D\omega_1{}^2$ болѣе K, но менѣе L, то катаніе будетъ совершаться безъ скольженія только по той части периметра, на которой u не менѣе u_2 и не болѣе $(2\pi-u_2)$, гдѣ u_2 есть уголъ, опредѣляемый равенствомъ:

$$\operatorname{tg}\frac{u_2}{2}=Mg\gamma\rho_0\,\frac{C}{A}\sin\varkappa+\frac{\sqrt{-N}}{A}.$$

Если $D\omega_1{}^2$ менѣе K, то уголъ u_2 оказывается больше угла u_1; слѣдовательно, отъ u_1 до u_2 и отъ $(2\pi-u_2)$ до $(2\pi-u_1)$ катаніе круга Q по периметру должно сопровождаться скольженіемъ.

Обратимся теперь къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ движущееся тѣло скользитъ по периметру S, не отдѣляясь отъ него.

Предварительно измѣнимъ видъ нѣкоторыхъ предыдущихъ формулъ, а именно тѣхъ, которыя заключаютъ съ себѣ выраженіе $(p\xi_0+q\eta_0)=$ $=\mathfrak{o}\rho_0\cos(\mathfrak{o},\rho_0)$ или $\cos(\mathfrak{o},\rho_0)$; этотъ косинусъ равняется $(+1)$ въ тѣхъ случаяхъ, когда катаніе не сопровождается скольженіемъ, такъ какъ тогда мгновенная ось должна проходить черезъ точку прикосновенія; въ тѣхъ же случаяхъ, когда тѣло скользитъ по периметру S, не отдѣляясь отъ него, угловая скорость $\mathfrak{o}$ можетъ быть направлена вдоль по ρ_0 или противоположно ρ_0, т. е. косинусъ $\cos(\mathfrak{o},\rho_0)$ можетъ быть равенъ плюсъ единицѣ или минусъ единицѣ.

Условимся обозначать произведеніе: $\mathfrak{o}\cos(\mathfrak{o},\rho_0)$ знакомъ ω, причемъ будемъ имѣть въ виду, что $\omega=\pm\mathfrak{o}$.

При такомъ условіи:

$$p\xi_0 + q\eta_0 = \omega\rho_0,$$

а потому формулу (923) слѣдуетъ писать такъ:

$$p'\eta_0 - q'\xi_0 = v_0\omega + r\rho_0\omega - \omega^2\zeta \ldots\ldots \quad \mathbf{(923, \text{bis})}$$

Далѣе, формула (927) справедлива во всякомъ случаѣ, но формулы (928) и (929) придется нѣсколько исправить, а именно онѣ должны быть написаны такъ:

$$ф' = \omega \sin \varepsilon_1, \ldots \mathbf{(928\ \text{bis})}, \quad ж' \sin ф = \omega \cos \varepsilon_1 \ {}^{*}) \ldots \mathbf{(929\ \text{bis})}$$

Поэтому въ формулахъ (930), (929, a), (931) величина $\mathfrak{o}$ должна быть замѣнена величиною ω, а произведеніе $\lambda\rho_0^2$ выразится такъ:

$$\lambda\rho_0^2 = \mathfrak{A} R\omega^2 \frac{\sin\varphi}{H} - \mathfrak{A}\omega^2\zeta_0 + \mathfrak{C} r\omega\rho_0 + Mg\gamma(z_0 - \zeta_0 \cos ф) . \mathbf{(936, \text{bis})}$$

Въ случаяхъ скольженія дифференціальное уравненіе (932, c) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} = -\rho_0 \frac{F}{w_0}(r\rho_0 - \zeta_0\omega), \ldots\ldots \mathbf{(932, c, \text{bis})}$$

---

*) Величины $ф'$ и $ж' \sin ф$ можно разсматривать двояко: либо какъ проэкціи линейной скорости точки Z (черт. 115 и 120; длина ЮZ равна единицѣ), либо какъ проэкціи угловой скорости $\mathfrak{o}$; въ первомъ смыслѣ $ф'$ выражаетъ проэкцію скорости точки Z на координатную ось β полярныхъ координатъ этой точки, а $ж' \sin ф$ — проэкцію этой скорости на ось γ (на чертежѣ 120-мъ эти проэкціи изображены длинами $\overline{Ze_1}$ и $\overline{Zb_1}$); во второмъ смыслѣ $ф'$ представляется длиною $\overline{ЮE}$, отложенною по направленію $ЮN$ (когда $ф' > 0$) или по направленію противоположному (когда $ф' < 0$), угловая же скорость $ж' \sin ф$ представляется длиною $\overline{ЮB}$, отложенною по направленію $ЮQ'$ параллельному и противоположному β (когда $ж' \sin ф > 0$) или по направленію $ЮQ$, (когда $ж' \sin ф < 0$). Отложимъ отъ точки Z длины $\overline{Zb}$ и $\overline{Ze}$ равныя и параллельныя длинамъ $\overline{ЮB}$ и $\overline{ЮE}$; діагональ $\overline{Zy}$ прямоугольника, построеннаго на этихъ длинахъ, будетъ равна и параллельна $\mathfrak{o}$ и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ перпендикулярна къ скорости $\overline{Zy_1}$ точки Z, такъ что сферическій уголъ (yZb), т. е. ε_1, равенъ сферическому углу (y_1Zb_1).

На чертежѣ 120-мъ изображенъ тотъ случай, когда $\cos(\mathfrak{o}, \rho_0) = 1$; тогда $ф' = \mathfrak{o} \sin \varepsilon_1$ и $ж' \sin ф = \mathfrak{o} \cos \varepsilon_1$; если же $\cos(\mathfrak{o}, \rho_0) = -1$, то $ф'$ будетъ равна $(-\mathfrak{o} \sin \varepsilon_1)$ и $ж' \sin ф = -\mathfrak{o} \cos \varepsilon_1$.

гдѣ w есть абсолютная величина разности $(r\rho_0 - \zeta_0\omega)$, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}\frac{dr}{dt} &= -\rho_0 F, \text{ если } (r\rho_0 - \zeta_0\omega) > 0 \\ \mathfrak{C}\frac{dr}{dt} &= \rho_0 F, \text{ если } (r\rho_0 - \zeta_0\omega) < 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (943)$$

Изъ двухъ другихъ дифференціальныхъ уравненій (932, a) (932, b) и изъ равенства:

$$p\frac{d\xi_0}{dt} + q\frac{d\eta_0}{dt} = 0$$

составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\mathfrak{A}\frac{d\omega}{dt}\rho_0 = Mg\gamma(\lambda_z\eta_0 - \mu_z\xi_0) + \zeta_0\rho_0\frac{F}{w_0}(r\rho_0 - \zeta_0\omega), \ldots\ldots (944)$$

гдѣ первый членъ второй части можетъ быть преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$\lambda_z\eta_0 - \mu_z\xi_0 = \frac{\eta_0}{q}(\lambda_z q - \mu_z p) = -\frac{\rho_0\Phi'\sin\Phi}{\omega}.$$

Изъ дифференціальныхъ уравненій (944) и (932, c, bis) составимъ слѣдующее уравненіе:

$$\mathfrak{A}\rho_0\frac{d\omega}{dt} + \mathfrak{C}\zeta_0\frac{dr}{dt} = Mg\gamma\frac{\rho_0}{\omega}\frac{d\cos\Phi}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (945)$$

Для рѣшенія вопроса о скольженіи тѣла по данному периметру, надо интегрировать дифференціальныя уравненія (943) и (945).

Мы имѣемъ возможность рѣшить вопросъ для того случая, когда периметръ S есть кругъ $\varphi = \alpha$; тогда $\Phi =$ постоянному, а потому интегралъ уравненія (945) будетъ таковъ:

$$\mathfrak{A}\rho_0\omega + \mathfrak{C}\zeta_0 r = C \ldots\ldots\ldots\ldots (946)$$

Если кругъ Q внѣ круга S, то $\Phi = (\alpha + \beta)$, $H = \sin(\alpha + \beta)$; исключивъ изъ выраженія (936 bis) и интеграла (946) величину r, получимъ слѣдующее выраженіе для $\lambda\rho_0^2$:

$$\lambda\rho_0^2 = -\mathfrak{A}R\frac{\operatorname{tg}\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\omega^2 + C\omega\operatorname{tg}\beta + Mg\gamma\rho_0\sin(\alpha+\beta).$$

Это выраженіе показываетъ, что λ болѣе нуля только при такихъ значеніяхъ ω, которыя заключаются въ предѣлахъ:

$$\omega_1 = \frac{C\sin(\alpha+\beta)}{2\mathfrak{A}R\cos\alpha}\left(1+\sqrt{1+4Mg\gamma\zeta_0\frac{R}{C^2}\mathfrak{A}\cos\alpha}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{C\sin(\alpha+\beta)}{2\mathfrak{A}R\cos\alpha}\left(1-\sqrt{1+4Mg\gamma\zeta_0\frac{R}{C^2}\mathfrak{A}\cos\alpha}\right);$$

при этихъ значеніяхъ величины ω, множитель λ обращается въ нуль. Если $C>0$, то ω_1 есть величина положительная, а ω_2—отрицательная; если же $C<0$, то, обратно, $\omega_1<0$ и $\omega_2>0$.

Изъ выраженія (936 bis) легко вывести величины значеній разности $(r\rho_0-\omega\zeta_0)$ при $\omega=\omega_1$ и $\omega=\omega_2$; мы найдемъ:

$$(r_1\rho_0-\omega_1\zeta_0)=\frac{-1}{\mathfrak{C}\omega_1\sin(\alpha+\beta)}\Big[\big(\mathfrak{A}R\sin\alpha+(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\zeta_0\sin(\alpha+\beta)\big)\omega_1^2+$$

$$+Mg\gamma\rho_0\sin^2(\alpha+\beta)\Big]\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{947})$$

и подобное же выраженіе для $(r_2\rho_0-\omega_2\zeta_0)$, заключающее ω_2 вмѣсто ω_1.

Если $\mathfrak{C}>\mathfrak{A}$, то очевидно, что при $C>0$:

$$(r_1\rho_0-\omega_1\zeta_0)<0,\quad (r_2\rho_0-\omega_2\zeta_0)>0;$$

при непрерывномъ возростаніи ω отъ ω_2 до ω_1, разность $(r\rho_0-\omega\zeta_0)$ непрерывно убываетъ *), поэтому, при нѣкоторомъ $\omega=\omega_n$, она будетъ равна нулю; соотвѣтственное значеніе величины r означимъ черезъ r_n.

$$\omega_n=\frac{C\rho_0}{IR^2};\quad r_n=\frac{C\zeta_0}{IR^2}.$$

Тѣлу, прикасающемуся къ периметру окружности $\varphi=\alpha$, могутъ быть сообщены произвольныя начальныя угловыя скорости ω_0 и r_0; родъ движенія, воспринимаемаго тѣломъ, зависитъ отъ величины ω_0 и отъ величины разности $(r_0\rho_0-\omega_0\zeta_0)$.

Если $(r_0\rho_0-\omega_0\zeta_0)=0$, то катаніе будетъ совершаться безъ скольженія, каково бы ни было ω_0.

Если $(r_0\rho_0-\omega_0\zeta_0)$ не равно нулю, а ω_0 не находится внутри предѣловъ ω_1 и ω_2, то тѣло отдѣлится отъ периметра круга $\varphi=\alpha$.

---

*) $(r\rho_0-\omega\zeta_0)=\dfrac{(C\rho_0-IR^2\omega)}{\mathfrak{C}\zeta_0}$.

Если ω_0 менѣе ω_1, но болѣе $\omega_н$ и притомъ $(r_0\rho_0 - \omega_0\zeta_0) < 0$, то тогда движеніе тѣла должно удовлетворять второму изъ дифференціальныхъ уравненій (943); исключивъ изъ него r при помощи интеграла (946), получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k\cos\alpha}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}(\omega_1-\omega)(\omega-\omega_2),$$

или

$$\frac{d\omega}{\omega_1-\omega} + \frac{d\omega}{\omega-\omega_2} = -\,ndt,$$

$$n = \frac{kC}{\mathfrak{A}R\sin\alpha}\sqrt{1+4Mg\gamma\zeta_0\frac{R}{C^2}\mathfrak{A}\cos\alpha}.$$

Интегрируя это уравненіе и введя начальное ω_0 вмѣсто новой постоянной произвольной, получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{(\omega_1-\omega_0)(\omega_0-\omega_2)(1-e^{-nt})}{\omega_1-\omega_0+(\omega_0-\omega_2)e^{-nt}}.$$

Угловая скорость ω уменьшается по этой формулѣ до тѣхъ поръ, пока не сдѣлается равною $\omega_н$, послѣ чего движеніе обращается въ катаніе безъ скольженія.

Если ω_0 менѣе $\omega_н$, но болѣе ω_2 и притомъ $(r_0\rho_0 - \omega_0\zeta_0) > 0$, то движеніе должно удовлетворять первому изъ дифференціальныхъ уравненій (943); рѣшеніе — слѣдующее:

$$\omega - \omega_0 = \frac{(\omega_1-\omega_0)(\omega_0-\omega_2)(1-e^{-nt})}{\omega_0-\omega_2+(\omega_1-\omega_0)e^{-nt}}.$$

Угловая скорость увеличивается по этой формулѣ до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ величины $\omega_н$, послѣ чего движеніе обращается въ катаніе безъ скольженія.

Подобнымъ же образомъ можетъ быть разсмотрѣнъ и случай $\varphi = \alpha - \beta$.

§ 138. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ постоянной неподвижной оси. Дифференціальное уравненіе вращенія и выраженія реакцій связей.

Твердое тѣло, имѣющее возможность свободно вращаться вокругъ данной постоянной неподвижной оси, но не могущее перемѣщаться вдоль этой оси, имѣетъ только одну степень свободы, а, слѣдовательно, его движеніе ограничено пятью удерживающими связями.

За эти связи можно принять: три связи, закрѣпляющія одну изъ точекъ *Ю* твердаго тѣла, находящуюся на постоянной оси, и двѣ связи, дѣлающія направленіе постоянной оси (оси **Z**) неизмѣннымъ въ пространствѣ.

Эти пять связей выразятся такъ:

$$x_ю = \text{постоян.},\quad y_ю = \text{постоян.},\quad z_ю = \text{постоян.},$$

$$\nu_x = \text{постоян.},\quad \nu_y = \text{постоян.}$$

Послѣднія два равенства могутъ быть замѣнены двумя другими, имъ эквивалентными; напримѣръ, можно взять еще другую точку тѣла на оси **Z** и выразить, что двѣ абсолютныя координаты этой точки остаются постоянными; пусть эта точка *K* находится въ разстояніи l отъ точки *Ю* (ея относительныя координаты суть: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = l$); выразимъ, что координаты x_K, y_K постоянны:

$$x_K = x_ю + l\nu_x = \text{постоян.},\quad y_K = y_ю + l\nu_y = \text{пост.}$$

Чтобы составить дифференціальное уравненіе и выраженія реакцій связей, представимъ себѣ, что твердое тѣло разсматривается какъ неизмѣняемая система точекъ и примѣнимъ къ нему начало д'Аламбера.

Возьмемъ равенство (567) стр. 383, присоединимъ къ первой части его сумму:

$$\lambda_1\delta x_ю + \lambda_2\delta y_ю + \lambda_3\delta z_ю + \lambda_4\delta x_K + \lambda_5\delta y_K,$$

выразимъ варьяціи координатъ всѣхъ точекъ по формуламъ (750) стр. 539 и затѣмъ приравняемъ нулю коэфиціенты у варьяцій $\delta x_ю$, $\delta y_ю$, $\delta z_ю$, θ_x, θ_y, θ_z; получимъ требуемыя выраженія и уравненіе; но, для упрощенія тѣхъ равенствъ, которыя намъ нужны, мы еще предположимъ, что точка *Ю* находится въ началѣ неподвижныхъ координатъ и что ось **Z** совпадаетъ съ осью *Z*, т. е. въ полученныхъ равенствахъ сдѣлаемъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, x_K, y_K равными нулю, z_K рав-

нымъ l, а, кромѣ того, примемъ во вниманіе, что всѣ z остаются постоянными, тогда равенства будутъ таковы:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2}=B_x+\lambda_1+\lambda_4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (948, a)$$

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2}=B_y+\lambda_2+\lambda_5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (948, b)$$

$$0=B_z+\lambda_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (948, c)$$

$$-\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i \frac{d^2y_i}{dt^2}=Л_x-l\lambda_5, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (948, d)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i \frac{d^2x_i}{dt^2}=Л_y+l\lambda_4, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (948\ e)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)=Л_z \ldots\ldots\ldots \quad (948, f)$$

Послѣднее равенство есть дифференціальное уравненіе вращенія тѣла, а первыя пять служатъ для опредѣленія величинъ реакцій связей.

Первыя части равенствъ (948, d, e, f) суть производныя по времени отъ проэкцій на оси $X^{овъ}$, $У^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ главнаго момента количествъ движенія вокругъ начала координатъ; можно выразить величины этихъ проэкцій по формуламъ (658, a, b, c) стр. 471-й, причемъ слѣдуетъ принять въ разсчетъ, что въ настоящемъ случаѣ $x'_ю$, $y'_ю$, $z'_ю$, P и Q равны нулю, такъ какъ тѣло можетъ только вращаться вокругъ оси Z, и что $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$ равны нулю, такъ какъ точка $Ю$ находится въ началѣ абсолютныхъ координатъ; поэтому:

$$л_x=-S_{zx}R,\ л_y=-S_{yz}R,\ л_z=I_zR,$$

гдѣ

$$I_z=\sum_{i=1}^{i=n}m_i(x_i^2+y_i^2),\ S_{zx}=\sum_{i=1}^{i=n}m_iz_ix_i,\ S_{yz}=\sum_{i=1}^{i=n}m_iy_iz_i.$$

Величины S можно выразить въ *произведеніяхъ инерціи* $D_ю$ и $E_ю$ и въ тригонометрическихъ функціяхъ угла $э$, составляемаго плоскостью $Z\Xi$ съ плоскостью ZX; такъ какъ:

$$z_i = \zeta_i,\ x_i = \xi_i \cos э - \eta_i \sin э,\ y_i = \xi_i \sin э + \eta_i \cos э,$$

то найдемъ, что:

$$S_{zx} = E_ю \cos э - D_ю \sin э,\ S_{yz} = E_ю \sin э + D_ю \cos э.$$

Что касается до I_z, то очевидно, что $I_z = C_ю$ (см. (662, c) стр. 474-я); кромѣ того $R = э'$.

Поэтому три послѣднія равенства (948, d, e, f) могутъ быть представлены такъ:

$$-(E_ю \cos э - D_ю \sin э) э'' + (E_ю \sin э + D_ю \cos э)(э')^2 = Л_x - l\lambda_5 \quad \mathbf{(948, d)}$$

$$-(E_ю \sin э + D_ю \cos э) э'' - (E_ю \cos э - D_ю \sin э)(э')^2 = Л_y + l\lambda_4 \quad \mathbf{(948, e)}$$

$$C_ю э'' = Л_z \quad \mathbf{(948, f)}$$

Наконецъ можно еще преобразовать и первыя части двухъ первыхъ равенствъ (948, a, b); для упрощенія предположимъ, что плоскость $Z\Xi$ проведена черезъ центръ инерціи тѣла, такъ что $\eta_c = 0$, а ξ_c и ζ_c не равны нулю; тогда эти два равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$-M\xi_c (э'' \sin э + (э')^2 \cos э) = B_x + \lambda_1 + \lambda_4, \quad \mathbf{(948, a)}$$

$$M\xi_c (э'' \cos э - (э')^2 \sin э) = B_y + \lambda_2 + \lambda_5. \quad \mathbf{(948, b)}$$

§ 139. Давленія вращающагося тѣла на точки опоры его постоянной оси. Условія, при которыхъ ось твердаго тѣла можетъ быть свободною постоянною осью вращенія.

Изъ равенствъ (948, $a - e$) можемъ опредѣлить проэкціи на оси $X^{ов}$, $Y^{ов}$, $Z^{ов}$ реакцій, оказываемыхъ опорами точекъ $Ю$ и K или давленій, производимыхъ этими точками твердаго тѣла на ихъ

опоры; третье изъ этихъ равенствъ даетъ величину проэкціи главнаго вектора $\mathfrak{D}$ этихъ давленій на ось $Z^{овъ}$:

$$\mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D},Z) = -\lambda_3 = B_z, \ldots\ldots\ldots\ldots (949, a)$$

а изъ равенствъ (948 *a*, *b*) мы можемъ получить выраженія проэкцій этого главнаго вектора $\mathfrak{D}$ на оси X и $У$ или на оси Ξ и Υ, а именно:

$$\mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D},\Xi) = -((\lambda_1+\lambda_4)\cos\vartheta + (\lambda_2+\lambda_5)\sin\vartheta) =$$

$$= B\cos(B,\Xi) + M\xi_c(\vartheta')^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (949, b)$$

$$\mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D},\Upsilon) = -((\lambda_2+\lambda_5)\cos\vartheta - (\lambda_1+\lambda_4)\sin\vartheta) =$$

$$= B\cos(B,\Upsilon) - M\xi_c\vartheta'' \ldots\ldots\ldots\ldots (949, c)$$

Изъ этихъ формулъ видно, что главный векторъ давленій вращающагося тѣла на точки опоры постоянной оси есть геометрическая сумма трехъ силъ:

a) Силы равной и параллельной главному вектору B задаваемыхъ силъ.

b) Силы $M\xi_c(\vartheta')^2$, равной и параллельной центробѣжной силѣ, которую имѣла бы масса M, если бы она была сосредоточена въ центрѣ инерціи тѣла; эту часть давленія иногда называютъ *центробѣжною силою тѣла.*

c) Силы $M\xi_c\vartheta''$, направленной параллельно отрицательной оси Υ, если $\vartheta''>0$, и имѣющей направленіе параллельное положительной оси Υ, если $\vartheta''<0$.

Здѣсь умѣстно замѣтить, что геометрическая сумма двухъ силъ *b* и *c* противоположна ускоренію центра инерціи тѣла, а по величинѣ равняется произведенію изъ величины этого ускоренія на массу тѣла.

Слѣдовательно, главный векторъ давленій, производимыхъ вращающимся тѣломъ на точки опоры его постоянной оси, есть геометрическая сумма, составленная изъ главнаго вектора задаваемыхъ силъ и изъ фиктивой силы инерціи всей массы тѣла, какъ бы сосредоточенной въ ея центрѣ инерціи.

Главный моментъ (вокругъ $Ю$) давленій тѣла на точки опоры заключается въ плоскости $\Xi\Upsilon$; изъ равенствъ (948, d, e) мы найдемъ, что проэкціи этого главнаго момента $\mathfrak{L}$ на оси Ξ и Υ выражаются такъ:

$$\mathfrak{L}\cos(\mathfrak{L}, \Xi) = Л_\xi + E_ю \vartheta'' - D_ю (\vartheta')^2, \ldots\ldots\ldots \mathbf{(949, d)}$$

$$\mathfrak{L}\cos(\mathfrak{L}, \Upsilon) = Л_\eta + D_ю \vartheta'' + E_ю (\vartheta')^2, \ldots\ldots\ldots \mathbf{(949, e)}$$

гдѣ $Л_\xi$ и $Л_\eta$ суть проэкціи главнаго момента задаваемыхъ силъ на оси Ξ и Υ.

Слѣдовательно, главный моментъ (вокругъ точки Ю) давленій, производимыхъ вращающимся тѣломъ на точки опоры его постоянной оси, есть геометрическая сумма, составленная изъ трехъ линейныхъ моментовъ:

a) изъ проэкціи главнаго момента задаваемыхъ силъ на плоскость $\Xi\Upsilon$,

b) изъ линейнаго момента, равнаго

$$(\vartheta')^2 \sqrt{D_ю^2 + E_ю^2},$$

и направленнаго въ плоскости $\Xi\Upsilon$ по линіи, составляющей съ положительными осями Ξ и Υ углы, косинусы которыхъ равны:

$$\frac{-D_ю}{\sqrt{D_ю^2 + E_ю^2}}, \quad \frac{E_ю}{\sqrt{D_ю^2 + E_ю^2}};$$

c) третій составляющій линейный моментъ равенъ

$$\vartheta'' \sqrt{D_ю^2 + E_ю^2}$$

и направленъ перпендикулярно ко второму; косинусы угловъ, составляемыхъ его направленіемъ съ положительными осями Ξ и Υ, равны:

$$\frac{E_ю}{\sqrt{D_ю^2 + E_ю^2}}, \quad \frac{D_ю}{\sqrt{D_ю^2 + E_ю^2}}.$$

Изъ вышеизложеннаго видно, что *если твердое тѣло вращается вокругъ постоянной оси подъ вліяніемъ такихъ силъ, главный векторъ которыхъ равенъ нулю, а главный моментъ*

(вокругъ $Ю$) *направленъ по этой оси, то оно не производитъ никакихъ давленій на точки опоры этой оси только при соблюденіи слѣдующихъ условій относительно положенія ея въ тѣлѣ:*

1) ξ_c *должно быть равно нулю, т. е. центръ инерціи тѣла долженъ быть на оси вращенія,*

2) $D_ю$ *и* $E_ю$ *должны быть равны нулю, т. е. ось вращенія должна быть одною изъ главныхъ осей инерціи тѣла.*

При этихъ условіяхъ ось вращенія можетъ быть свободною, такъ что точки опоры нужны только на случай появленія такихъ постороннихъ силъ, которыя будутъ стремиться вывести ось вращенія изъ первоначальнаго положенія.

Если центръ инерціи тѣла не находится на оси вращенія, то при вращеніи является центробѣжная сила, стремящаяся сорвать ось съ подшипниковъ въ сторону положенія центра инерціи; кромѣ того, если вращеніе не равномѣрно, то является еще давленіе противоположное вращательной части ускоренія центра инерціи.

Если только соблюдено первое условіе ($\xi_c = 0$), но несоблюдено второе (т. е. $D_ю$ и $E_ю$ не равны нулю), то вращающееся тѣло стремится повернуться вокругъ нѣкоторой оси, перпендикулярной къ постоянной оси, и давленія, производимыя на точки опоры тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе величины $D_ю$ и $E_ю$.

§ 140. Примѣры опредѣленія закона вращенія твердаго тѣла вокругъ постоянной оси подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Физическій маятникъ.

Для опредѣленія закона вращенія надо интегрировать дифференціальное уравненіе (948, *f*).

Примѣръ 113-й. Однородный круговой цилиндръ (радіусъ основанія R, масса M) можетъ вращаться вокругъ его оси симметріи, которая, посредствомъ двухъ точекъ опоры, удерживается въ горизонтальномъ положеніи; на боковую поверхность цилиндра намотана (весьма большое число разъ) безконечно-тонкая и вполнѣ гибкая нерастяжимая нить, свободная часть которой виситъ вертикально внизъ (черт. 121) и имѣетъ на концѣ своемъ тяжелую матерьяльную точку

массы m. Опредѣлить законъ вращенія цилиндра, предполагая, что въ начальный моментъ онъ былъ въ покоѣ.

Въ этомъ случаѣ дифференціальное уравненіе (948, f) будетъ слѣдующее:

$$M\frac{R^2}{2}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=mgR,$$

а потому законъ вращенія будетъ такой:

$$\vartheta=\frac{mg}{MR}t^2+\vartheta_0,$$

т. е. вращеніе совершается равномѣрно-ускоренно.

Примѣръ 114-й. Какое либо тяжелое твердое тѣло вращается вокругъ горизонтальной постоянной оси подъ вліяніемъ силы тяжести. Опредѣлить законъ вращенія.

Предположимъ, что за начало координатъ взята точка пересѣченія горизонтальной оси $Z^{\text{овъ}}$ съ тою вертикальною плоскостью, въ которой остается, при вращеніи, центръ инерціи тѣла; ось $X^{\text{овъ}}$ опустимъ вертикально внизъ. Моментъ силъ тяжести всѣхъ частей тѣла вокругъ оси $Z^{\text{овъ}}$ выразится въ такомъ случаѣ такъ: $-Mgy_c=$ $=-Mg\xi_c\sin\vartheta$, а потому дифференціальное уравненіе вращенія будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$C_{ю}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-Mg\xi_c\sin\vartheta.$$

Первый интегралъ этого дифференціальнаго уравненія, т. е.:

$$\frac{1}{2}C_{ю}(\vartheta')^2=Mg\xi_c\cos\vartheta+h\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\mathbf{(950)}$$

выражаетъ законъ живой силы, который въ настоящемъ случаѣ имѣетъ мѣсто, такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенціалъ, а въ уравненія связей время не входитъ явнымъ образомъ.

Введя вмѣсто h начальныя значенія ϑ_0 и ϑ'_0 угла ϑ и угловой скорости ϑ', дадимъ уравненію (950) слѣдующій видъ:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=(\vartheta'_0)^2+\frac{2g}{l}(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0),\,.\,.\,.\,.\,.\,\mathbf{(950,}\,\text{bis}\mathbf{)}$$

гдѣ:

$$l = \frac{C_\omega}{M\xi_c}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (951)$$

сравнивъ его съ уравненіемъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (\varphi'_0)^2 + \frac{2g}{R}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

выражающимъ законъ живой силы въ движеніи простаго круговаго математическаго маятника (примѣръ 33-й, стр. 235—241), мы увидимъ, что если въ первомъ (т. е. въ (950, bis)) замѣнить уголъ ϑ угломъ φ, а величину l длиною R, то получимъ послѣднее уравненіе; при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что l имѣетъ измѣренія длины, такъ какъ это есть отношеніе момента инерціи къ произведенію изъ массы на длину.

На этомъ основаніи мы можемъ составить себѣ слѣдующее понятіе о законѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ горизонтальной оси подъ вліяніемъ силы тяжести:

Если отложимъ отъ начала координатъ по оси Ξ *длину* l (*951*), *то точка Ц твердаго тѣла, находящаяся на концѣ этой длины, будетъ совершать то же самое движеніе, какое совершаетъ тяжелая точка круговаго математическаго маятника длины* l *при начальномъ углѣ отклоненія* $\varphi_0 = \vartheta_0$ *и при начальной скорости* v_0, *равной* $l\vartheta'_0$.

Твердое тѣло, находящееся въ тѣхъ условіяхъ, при которыхъ мы разсматриваемъ его движеніе въ настоящемъ примѣрѣ, т. е. имѣющее возможность свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси, не проходящей черезъ центръ инерціи, и подверженное дѣйствію силы тяжести, называется *физическимъ маятникомъ*. Длина l называется *приведенною длиною физическаго маятника* или *длиною маятника математическаго, эквивалентнаго данному физическому маятнику;* точка *Ц* называется *центромъ качаній*, соотвѣтствующимъ данной оси привѣса, т. е. оси вращенія тѣла; линія, проведенная черезъ центръ качанія параллельно оси привѣса, называется *осью качаній*, соотвѣтствующею оси привѣса.

Разстоянiе l оси качанiя отъ оси привѣса выражается формулою (951), которую можно представить въ иномъ видѣ; выразимъ моментъ инерцiи $C_ю$ вокругъ оси качанiя по формулѣ (671) стр. 481-й, тогда получимъ:

$$l = \frac{C_c}{M\xi_c} + \xi_c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(951,}\ \mathrm{bis})$$

гдѣ C_c есть моментъ инерцiи физическаго маятника вокругъ оси, параллельной оси качанiй и проведенной черезъ центръ инерцiи. Изъ этой формулы, во первыхъ, видно, что длина l болѣе ξ_c, т. е., что центръ качанiй отстоитъ отъ оси привѣса далѣе, чѣмъ центръ инерцiи; во вторыхъ, на основанiи этой формулы можно заключить, что ось привѣса и ось качанiй взаимны, такъ что, если маятникъ будетъ подвѣшенъ за ось качанiй, то новою осью качанiй станетъ прежняя ось привѣса; въ самомъ дѣлѣ, разстоянiе новой оси качанiй отъ новой оси привѣса будетъ слѣдующее:

$$l_1 = \frac{C_c}{M(l-\xi_c)} + (l - \xi_c);$$

но такъ какъ:

$$l - \xi_c = \frac{C_c}{M\xi_c},$$

то окажется, что:

$$l_1 = \xi_c + \frac{C_c}{M\xi_c} = l.$$

Продолжительность одного качанiя (одного размаха) физическаго маятника выражается формулою:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\beta}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\beta}{2} + \ldots \right], \ldots \mathbf{(952)}$$

полученною нами на стр. 239 при разсмотрѣнiи законовъ движенiя математическаго круговаго маятника; β есть уголъ наибольшаго отклоненiя (оси Ξ) отъ вертикальной линiи.

При ничтожно-малыхъ углахъ β продолжительность одного полнаго размаха равна:

$$\pi \sqrt{\frac{C_ю}{M\xi_c g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(953)}$$

Ту же самую продолжительность будутъ имѣть размахи того же твердаго тѣла, подвѣшеннаго за ось качаній.

Осью привѣса даннаго твердаго тѣла можетъ быть произвольная прямая линія, взятая въ тѣлѣ или неизмѣнно-связанная съ нимъ; каждой оси привѣса соотвѣтствуетъ опредѣленная ось качанія, которая параллельна оси привѣса и заключается въ одной плоскости съ нею и съ центромъ инерціи, но находится по другую сторону этого центра. Означимъ черезъ y разстояніе оси привѣса отъ центра инерціи, черезъ x — разстояніе оси качанія отъ него же, черезъ I_c — моментъ инерціи вокругъ центральной оси, параллельной оси привѣса, и черезъ r — плечо инерціи тѣла вокругъ той же центральной оси (см. стр. 491-ю); по формулѣ (951, bis) будемъ имѣть слѣдующую зависимость между этими величинами:

$$xy = \frac{I_c}{M} = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (954)$$

Сумма разстояній x и y даетъ приведенную длину l физическаго маятника для качаній вокругъ выбранной оси привѣса, а эту длину можно выразить по формулѣ (953), такъ что будемъ имѣть еще другую зависимость:

$$x + y = g\frac{\tau^2}{\pi^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (955)$$

между x, y и продолжительностью τ малыхъ размаховъ маятника вокругъ выбранной оси привѣса или вокругъ оси качаній.

Равенства (954) и (955) показываютъ, что x и y суть два корня уравненія второй степени:

$$X^2 - \frac{\tau^2}{\pi^2} gX + r^2 = 0,$$

такъ что если даны: направленіе оси привѣса въ твердомъ тѣлѣ и величина продолжительности малыхъ качаній и требуется найти положеніе оси привѣса въ тѣлѣ, то слѣдуетъ прежде всего опредѣлить величину плеча инерціи r вокругъ центральной оси параллельной данному направленію и затѣмъ опредѣлить знакъ разности:

$$(\tau^2 g)^2 - 4\pi^4 r^2;$$

если окажется, что знакъ этой разности отрицательный, то это будетъ значить, что корни предыдущаго уравненія мнимые и что тѣло не можетъ совершать размаховъ столь краткой продолжительности вокругъ осей даннаго направленія; если же

$$\tau^2 > \frac{2\pi^2 r}{g},$$

то мы найдемъ двѣ системы осей привѣса: однѣ суть производящія кругового цилиндра радіуса x, другія — производящія цилиндра радіуса y; осью этихъ цилиндровъ служитъ центральная ось даннаго направленія.

§ 141. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, содержащія проэкціи количествъ движенія и ихъ моментовъ на подвижныя оси, не связанныя съ твердымъ тѣломъ, но имѣющія начало въ центрѣ инерціи его.

До сихъ поръ мы относили твердое тѣло либо къ неподвижнымъ осямъ координатъ, либо къ осямъ неизмѣнно съ нимъ связаннымъ; но въ нѣкоторыхъ вопросахъ выгоднѣе бываетъ относить тѣло къ осямъ хотя и подвижнымъ, но не связаннымъ съ тѣмъ же тѣломъ.

Мы составимъ теперь дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла при осяхъ координатъ, проходящихъ черезъ центръ инерціи тѣла, но измѣняющихъ свои направленія независимо отъ тѣла.

Пусть эти оси суть $C\mathfrak{X}$, $C\mathfrak{Y}$, $C\mathfrak{Z}$; онѣ взаимно-ортогональны и какъ бы неизмѣнно связаны съ нѣкоторою воображаемою неизмѣняемою средою, имѣющею собственное вращеніе, независимое отъ вращенія тѣла.

Введемъ слѣдующія обозначенія:

Проэкціи угловой скорости этой воображаемой неизмѣняемой среды на оси $C\mathfrak{X}$, $C\mathfrak{Y}$, $C\mathfrak{Z}$ означимъ знаками: ω_1, ω_2, ω_3, а проэкціи на тѣ же оси угловой скорости твердаго тѣла — буквами нѣмецкаго алфавита $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$.

Проэкціи на тѣ же оси скорости v_c центра инерціи твердаго тѣла будемъ обозначать, для краткости, буквами нѣмецкаго алфавита $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{a} = v_c \cos(v_c, \mathfrak{X}), \quad \mathfrak{b} = v_c \cos(v_c, \mathfrak{Y}), \quad \mathfrak{c} = v_c \cos(v_c, \mathfrak{Z}).$$

Проекціи на оси $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ моментовъ (вокругъ центра инерціи) силъ, реакцій и количествъ движенія мы будемъ обозначать такъ: $Л_1$, $Л_2$, $Л_3$, Λ_1, Λ_2, Λ_3, $л_1$, $л_2$, $л_3$; такъ что:

$$Л_1 = Л_c \cos(Л_c, \mathfrak{X}), \quad Л_2 = Л_c \cos(Л_c, \mathfrak{Y}), \text{ и т. д.}$$

Проэкціи на тѣ же оси главнаго вектора силъ и главнаго вектора реакцій обозначимъ черезъ B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, V_3.

Припомнимъ теперь значеніе шести дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла. Три уравненія движенія центра инерціи выражаютъ, что произведеніе изъ ускоренія центра инерціи, умноженнаго на массу тѣла, равняется геометрической суммѣ изъ главнаго вектора задаваемыхъ силъ и главнаго вектора реакцій. Три уравненія моментовъ могутъ быть разсматриваемы, какъ аналитическія выраженія того, что скорость точки, чертящей годографъ главнаго момента (вокругъ центра инерціи) количествъ движенія твердаго тѣла, равняется геометрической суммѣ изъ главнаго момента задаваемыхъ силъ и главнаго момента реакцій.

Новыя дифференціальныя уравненія получимъ, выразивъ равенство проэкцій вышесказанныхъ величинъ на оси $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; а такъ какъ эти оси измѣняютъ свои направленія, то проэкціи на нихъ скорости центра инерціи и главнаго момента количествъ движенія выразятся, на основаніи формулы (293) кинематической части, такъ:

$$\dot{v}_c \cos(\dot{v}_c, \mathfrak{X}) = \frac{d(v\cos(v,\mathfrak{X}))}{dt} - \omega_3 v \cos(v, \mathfrak{Y}) + \omega_2 v \cos(v, \mathfrak{Z}); \ldots$$

. . . .

Поэтому новыя дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующія:

$$M\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt} - \omega_3\mathfrak{b} + \omega_2\mathfrak{c}\right) = B_1 + V_1 \ldots\ldots\ldots \quad (956, \mathrm{a})$$

$$M\left(\frac{d\mathfrak{b}}{dt} - \omega_1\mathfrak{c} + \omega_3\mathfrak{a}\right) = B_2 + V_2 \ldots\ldots\ldots \quad (956, \mathrm{b})$$

$$M\left(\frac{d\mathfrak{c}}{dt} - \omega_2\mathfrak{a} + \omega_1\mathfrak{b}\right) = B_3 + V_3 \ldots\ldots\ldots \quad (956, \mathrm{c})$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} - \omega_3\lambda_2 + \omega_2\lambda_3 = Л_1 + \Lambda_1 \ldots\ldots\ldots \quad (956, \mathrm{d})$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} - \omega_1\lambda_3 + \omega_3\lambda_1 = Л_2 + \Lambda_2 \ldots\ldots\ldots \quad (956, \mathrm{e})$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} - \omega_2\lambda_1 + \omega_1\lambda_2\,{}^{*)} = Л_3 + \Lambda_3 \ldots\ldots\ldots \quad (956, \mathrm{f})$$

---

*) Моменты количествъ движенія λ_1, λ_2, λ_3 могутъ быть выражены такъ:

$$\lambda_1 = (\lambda_c)_x \cos(\mathfrak{X}, X) + (\lambda_c)_y \cos(\mathfrak{X}, Y) + (\lambda_c)_z \cos(\mathfrak{X}, Z),$$

или такъ:

$$\lambda_1 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{p} - \mathfrak{S}_{12}\mathfrak{q} - \mathfrak{S}_{13}\mathfrak{r},$$

гдѣ входятъ моменты и произведенія инерціи вокругъ новыхъ осей.

§ 142. Движеніе однороднаго шара по данной поверхности.

Вышеприведенною формою дифференціальныхъ уравненій мы воспользуемся для рѣшенія нѣсколькихъ вопросовъ о движеніи твердаго однороднаго шара по различнымъ поверхностямъ, предполагая, что задаваемыя силы, за исключеніемъ силы тренія, приводятся къ одной равнодѣйствующей, приложенной къ центру шара, такъ что главный моментъ ихъ вокругъ этой точки равенъ нулю.

Предполагая, что шаръ постоянно прикасается къ данной поверхности, представимъ себѣ ту параллельную ей поверхность, въ которой остается центръ C шара; нормаль къ послѣдней возьмемъ за ось $C\mathfrak{Z}$, а два какія либо направленія въ касательной плоскости за оси $C\mathfrak{X}$ и $C\mathfrak{Y}$.

Реакція поверхности направлена по оси $\mathfrak{Z}$, мы ее означимъ черезъ λ; проэкціи силы тренія на оси $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ означимъ черезъ F_1 и F_2, а величину радіуса шара — буквою R.

Моментъ инерціи шара вокругъ какой либо центральной оси равенъ двумъ пятымъ MR^2, а потому проэкціи на оси $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ главнаго момента количествъ движенія вокругъ центра инерціи суть:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2}{5} MR^2\mathfrak{p}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{2}{5} MR^2\mathfrak{q}, \quad \mathcal{A}_3 = \frac{2}{5} MR^2\mathfrak{r}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія шара вида (956) будутъ слѣдующія:

$$M\frac{d\mathfrak{a}}{dt} - M\omega_3\mathfrak{b} = B_1 + F_1, \quad \ldots \quad (957,\mathfrak{a})$$

$$M\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + M\omega_3\mathfrak{a} = B_2 + F_2, \quad \ldots \quad (957,\mathfrak{b})$$

$$M(\omega_1\mathfrak{b} - \omega_2\mathfrak{a}) = B_3 + \lambda, \quad \ldots \quad (957,\mathfrak{c})$$

$$\frac{2}{5} MR^2\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \omega_2\mathfrak{r} - \omega_3\mathfrak{q}\right) = -RF_2, {}^{*}) \quad \ldots \quad (957,\mathfrak{d})$$

$$\frac{2}{5} MR^2\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \omega_3\mathfrak{p} - \omega_1\mathfrak{r}\right) = \quad RF_1, {}^{*}) \quad \ldots \quad (957,\mathfrak{e})$$

$$\frac{2}{5} MR^2\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \omega_1\mathfrak{q} - \omega_2\mathfrak{p}\right) = 0 \quad \ldots \quad (957,\mathfrak{f})$$

Если опредѣлено, что скольженіе между шаромъ и поверхностью можетъ совершаться безъ всякаго противодѣйствія, то силы F_1 и F_2 должны быть положены равными нулю.

Если же существованіе силы тренія допускается, то надо имѣть въ виду, что катаніе шара можетъ сопровождаться скольженіемъ или совершаться безъ скольженія.

Когда шаръ скользитъ по поверхности, направленіе силы тренія противоположно скорости скользящей точки, а величина силы равна $k\lambda$, гдѣ k — коэфиціентъ тренія.

Когда же шаръ катится по поверхности безъ скольженія, тогда скорость точки прикосновенія его къ поверхности равна нулю, т. е.:

$$\mathfrak{a} + R\mathfrak{q} = 0, \quad \mathfrak{b} - R\mathfrak{p} = 0,$$

такъ что вмѣсто пяти искомыхъ величинъ останется только три, для опредѣленія которыхъ будемъ имѣть три дифференціальныя уравненія, а именно послѣднее (957, f) и два другія:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \omega_3\mathfrak{p} = -\frac{5}{7}\frac{B_1}{MR} + \frac{2}{7}\omega_1\mathfrak{r} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(958, a)}$$

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \omega_3\mathfrak{q} = \quad \frac{5}{7}\frac{B_2}{MR} - \frac{2}{7}\omega_2\mathfrak{r} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(958, b)}$$

Угловыя скорости ω_1, ω_2, ω_3 выражаются функціями линейныхъ скоростей $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, но выражаются различнымъ образомъ, смотря по тому, какія направленія будутъ взяты за оси $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Если за эти оси возьмемъ касательныя къ линіямъ кривизны той поверхности, въ которой остается центръ шара, то ω_1, ω_2, ω_3 выразятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{K}_2, \quad \omega_2 = -\mathfrak{a}\mathfrak{K}_1, \\ &\omega_3 = \mathfrak{a}\mathfrak{K}_1 \operatorname{tg}(\rho_1, \mathfrak{Z}) - \mathfrak{b}\mathfrak{K}_2 \operatorname{tg}(\rho_2, \mathfrak{Z}), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(959)}$$

гдѣ $\mathfrak{K}_1$ есть кривизна того главнаго сѣченія поверхности, которое заключаетъ въ себѣ ось $\mathfrak{X}$, а ρ_1 означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны той линіи кривизны, которой касательная есть ось $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{K}_2$ **) есть кривизна другаго главнаго сѣченія, а ρ_2 означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны другой линіи кривизны, имѣющей касательною ось $\mathfrak{Y}$.

---

*) Предполагая, что ось $\mathfrak{Z}$ направлена къ точкѣ прикосновенія шара съ поверхностью.

**) Кривизна имѣетъ положительное значеніе, если центръ кривизны находится на положительной сторонѣ оси $\mathfrak{Z}$.

Для того, чтобы вывести эти выраженія, вообразимъ себѣ, кромѣ движущихся осей $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, еще другія неподвижныя оси координатъ X, Y, Z, составимъ выраженія косинусовъ угловъ между тѣми и другими осями и затѣмъ вычислимъ выраженія для ω_1, ω_2, ω_3 по формуламъ (113) стр. 102-й кинематической части.

Предположимъ, что уравненіе поверхности, по которой движется центръ инерціи, рѣшено относительно z:

$$F(x, y) - z = 0;$$

воспользуемся обозначеніями, принятыми на стр. 187 и приведенною тамъ формулою (295).

Величины a_x и a_y означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями X и Y какимъ либо направленіемъ, проведеннымъ черезъ разсматриваемую точку поверхности въ касательной къ ней плоскости, поэтому эти косинусы должны удовлетворять уравненію:

$$pa_x + qa_y - \sqrt{1 - a_x^2 - a_y^2} = 0,$$

которое можно представить еще и такъ:

$$(1 + p^2)\,a_x^2 + 2pqa_x\,a_y + (1 + q^2)\,a_y^2 = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathbf{960})$$

Направленіе $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ опредѣляется тѣмъ, что для нихъ трichленъ

$$ra_x^2 + 2sa_xa_y + ta_y^2$$

получаетъ наибольшее или наименьшее значеніе. Поступая по извѣстнымъ правиламъ, мы найдемъ, что значенія косинусовъ a_x и a_y, опредѣляющихъ направленія осей $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, должны удовлетворять, кромѣ уравненія (960), еще и слѣдующему уравненію:

$$\frac{ra_x + sa_y}{(1+p^2)a_x + pqa_y} = \frac{sa_x + ta_y}{pqa_x + (1+q^2)a_y} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathbf{961})$$

Это уравненіе есть уравненіе второй степени относительно частнаго $\varkappa = (a_x : a_y)$, корни его обозначимъ черезъ $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, предполагая, что $\varkappa_1$ соотвѣтствуетъ оси $\mathfrak{X}$, а $\varkappa_2$ — оси $\mathfrak{Y}$; кромѣ того, означимъ черезъ k_1 и k_2 слѣдующія выраженія:

$$k_1 = \sqrt{(1 + p^2)\,\varkappa_1^2 + 2pq\varkappa_1 + 1 + q^2}$$

$$k_2 = \sqrt{(1 + p^2)\,\varkappa_2^2 + 2pq\varkappa_2 + 1 + q^2},$$

тогда косинусы угловъ, составляемыхъ осями $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ съ осями X, Y, Z, выразятся такъ:

$$\mathfrak{l}_x = \frac{\varkappa_1}{k_1},\ \mathfrak{l}_y = \frac{1}{k_1},\ \mathfrak{l}_z = \frac{p\varkappa_1 + q}{k_1},$$

$$\mathfrak{m}_x = \frac{\varkappa_2}{k_2},\ \mathfrak{m}_y = \frac{1}{k_2},\ \mathfrak{m}_z = \frac{p\varkappa_2 + q}{k_2};$$

$$\mathfrak{n}_x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \mathfrak{n}_y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \mathfrak{n}_z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \dots \mathbf{(962)}$$

Для упрощенія дальнѣйшихъ выводовъ мы можемъ предположить, что неподвижныя оси X, Y, Z совпадаютъ съ положеніемъ, которое имѣютъ подвижныя оси $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ въ разсматриваемый моментъ; для этого положенія неизмѣняемой среды:

$$\mathfrak{l}_x = 1,\ \mathfrak{m}_y = 1,\ \mathfrak{n}_z = 1,\ \sqrt{1+p^2+q^2} = -1;$$

прочіе шесть косинусовъ равны нулю, далѣе:

$$p = 0,\ q = 0,\ s = 0,\ \varkappa_1 = \infty,\ \varkappa_2 = 0,\ k_1 = \varkappa_1,\ k_2 = 1, \dots \mathbf{(963)}$$

$$\mathfrak{K}_1 = r,\ \mathfrak{K}_2 = t;$$

тогда изъ формулъ (113) и трехъ слѣдующихъ за ними на страницѣ 102-й кинематической части получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = -\mathfrak{m}_y \mathfrak{n}'_y = -\mathfrak{n}'_y,\ \ \omega_2 = \mathfrak{l}_x \mathfrak{n}'_x = \mathfrak{n}'_x, \\ \omega_3 = \mathfrak{m}_y \mathfrak{l}'_y = -\mathfrak{l}_x \mathfrak{m}'_x = \mathfrak{l}'_y = -\mathfrak{m}'_x. \end{array}\right\} \dots\dots\dots \mathbf{(964)}$$

Такъ какъ всѣ девять косинусовъ предполагаются выраженными въ функціяхъ отъ x и отъ y, то производныя отъ нихъ по времени выразятся такъ:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{n}'_x = \frac{\partial \mathfrak{n}_x}{\partial x}\mathfrak{a} + \frac{\partial \mathfrak{n}_x}{\partial y}\mathfrak{b},\quad \mathfrak{n}'_y = \frac{\partial \mathfrak{n}_y}{\partial x}\mathfrak{a} + \frac{\partial \mathfrak{n}_y}{\partial y}\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{l}'_y = \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial x}\mathfrak{a} + \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial y}\mathfrak{b} = -\mathfrak{m}'_x = -\frac{\partial \mathfrak{m}_x}{\partial x}\mathfrak{a} - \frac{\partial \mathfrak{m}_x}{\partial y}\mathfrak{b}; \end{array}\right\} \dots\dots \mathbf{(965)}$$

а составляя выраженія частныхъ производныхъ отъ косинусовъ по x и

но y и принимая во вниманіе значенія (963) величинъ $p, q, \ldots k_2$, найдемъ, что

$$\frac{\partial \mathfrak{n}_x}{\partial x} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{(pr+qs)p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = -r = -\mathfrak{K}_1,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{n}_x}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \mathfrak{n}_y}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial \mathfrak{n}_y}{\partial y} = -t = -\mathfrak{K}_2;$$

поэтому:

$$\omega_1 = \mathfrak{K}_2 \mathfrak{b}, \ \omega_2 = -\mathfrak{K}_1 \mathfrak{a}.$$

Мы найдемъ сейчасъ, какія значенія имѣютъ остальныя производныя:

$$\frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial x} = -\frac{\partial \mathfrak{m}_x}{\partial x}, \ \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial y} = -\frac{\partial \mathfrak{m}_x}{\partial y}.$$

По формуламъ (286) стр. 247-й кинематической части, косинусъ угла, составляемаго главною нормалью первой линіи кривизны съ осью $Y^{овъ}$, выразится такъ:

$$\cos(\rho_1, Y) = \rho_1 \frac{d\left(\frac{dy}{ds_1}\right)}{ds_1} = \rho_1 \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial x},$$

потому что для этой кривой $ds_1 = dx$ и $\frac{dy}{ds_1} = \mathfrak{l}_y$; косинусъ же угла, составляемаго главною нормалью второй линіи кривизны съ осью $X^{овъ}$, выразится такъ:

$$\cos(\rho_2, X) = \rho_2 \frac{\partial \mathfrak{m}_x}{\partial y} = -\rho_2 \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial y};$$

далѣе, на основаніи извѣстной зависимости между радіусами кривизны нормальнаго и косаго сѣченія поверхности (см. стр. 186):

$$\cos(\rho_1, Z) = \rho_1 \mathfrak{K}_1, \quad \cos(\rho_2, Z) = \rho_2 \mathfrak{K}_2,$$

поэтому:

$$\frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial x} = \mathfrak{K}_1 \operatorname{tg}(\rho_1, Z); \quad \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial y} = -\mathfrak{K}_2 \operatorname{tg}(\rho_2, Z);$$

затѣмъ нетрудно уже получить послѣднюю изъ формулъ (959).

Если оси $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ направлены по касательнымъ къ линіямъ кривизны, такъ что ω_1, ω_2, ω_3 выражаются формулами (959), то тогда равенства (957, c) и (957, f) получатъ слѣдующій видъ:

$$\lambda = -B_3 + M(\mathfrak{b}^2\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{K}_1) \ldots\ldots\ldots (957, \mathfrak{c}_1)$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\mathfrak{q}\mathfrak{b}\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{K}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (957, \mathfrak{f}_1)$$

Когда катаніе шара совершается безъ скольженія, то послѣднее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{R}(\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (957, \mathfrak{f}_2)$$

Отсюда слѣдуетъ, 1) что если шаръ катится безъ скольженія по поверхности другаго шара, то $\mathfrak{r}$ равно постоянному, 2) что если шаръ катится безъ скольженія по какой либо другой поверхности, то $\mathfrak{r}$ можетъ быть постояннымъ только тогда, когда постоянно либо $\mathfrak{a} = 0$, либо $\mathfrak{b} = 0$, т. е., когда центръ шара остается постоянно на одной и той же линіи кривизны.

Разсмотримъ теперь какой видъ получаютъ дифференціальныя уравненія движенія шара въ томъ случаѣ, когда за ось $\mathfrak{X}$ возьмемъ касательную къ траэкторіи центра инерціи шара.

Въ этомъ случаѣ $\mathfrak{b} = 0$,

$$\mathfrak{l}_x = \frac{dx}{ds}, \quad \mathfrak{l}_y = \frac{dy}{ds}, \quad \mathfrak{l}_z = \frac{dz}{ds},$$

а косинусы $\mathfrak{n}_x$, $\mathfrak{n}_y$, $\mathfrak{n}_z$ выражаются, по прежнему, формулами (962).

Если предположить, что неподвижныя оси X, Y, Z совпадаютъ съ положеніемъ, которое имѣютъ подвижныя оси въ разсматриваемый моментъ, то для этого положенія неизмѣняемой среды косинусы $\mathfrak{l}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{n}_z$ равны единицѣ, а прочіе косинусы равны нулю; поэтому ω_1, ω_2, ω_3 выражаются и въ этомъ случаѣ формулами (964).

Далѣе, въ выраженіяхъ (965) надо положить $\mathfrak{b}$ равнымъ нулю, поэтому:

$$\omega_1 = -\frac{\partial \mathfrak{n}_y}{\partial x}\mathfrak{a}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \mathfrak{n}_x}{\partial x}\mathfrak{a}, \quad \omega_3 = \frac{\partial \mathfrak{l}_y}{\partial x}\mathfrak{a}.$$

При составленіи выраженій этихъ производныхъ надо принять во вниманіе, что $p = 0$ и $q = 0$; получимъ:

$$\frac{\partial \mathfrak{n}_x}{\partial x} = -r, \quad \frac{\partial \mathfrak{n}_y}{\partial x} = -s.$$

Означимъ черезъ ρ величину и направленіе радіуса кривизны траэкторіи; по извѣстной формулѣ:

$$\cos(\rho, У) = \rho \frac{d^2y}{ds^2} = \rho \frac{d\mathfrak{l}_y}{dx}.$$

По формулѣ (295) стр. 187 найдемъ, что r выражаетъ кривизну $\mathfrak{K}$ нормальнаго сѣченія, касательнаго къ траэкторіи; далѣе изъ формулы, приведенной на 2-й и 3-й строкахъ страницы 202-й, слѣдуетъ, что $(-s)$ выражаетъ величину завитія геодезической кривой, касательной къ оси $X(\varphi = 0)$, а, слѣдовательно, и къ траэкторіи (означимъ величину этого завитія буквою σ); наконецъ, по формулѣ (324) на страницѣ 203-й и по формулѣ (368) на стр. 223-й:

$$\frac{\cos(\rho, \mathfrak{Y})}{\rho} = \frac{\sin(\rho, \mathfrak{Z})}{\rho} = \frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{K}\operatorname{tg}(\rho, \mathfrak{Z}),$$

гдѣ $\mathfrak{g}$ есть радіусъ геодезической кривизны траэкторіи.

На основаніи всего этого получимъ слѣдующія выраженія:

$$\omega_1 = -\sigma v,\ \ \omega_2 = -\mathfrak{K}v,\ \ \omega_3 = \frac{v}{\mathfrak{g}}, \dots\dots\dots (966)$$

гдѣ v означаетъ величину скорости центра инерціи шара, такъ что $v = \mathfrak{a}$.

Примѣнимъ такое расположеніе осей $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ къ случаямъ катанія безъ скольженія; такъ какъ тогда

$$\mathfrak{q} = -\frac{v}{R},\quad \mathfrak{p} = 0,$$

то уравненія (958, a, b) получатъ такой видъ:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7}\frac{B_1}{M} + \frac{2}{7}R\sigma v\mathfrak{r}, \dots\dots\dots (958, \mathfrak{a}_1)$$

$$\frac{v^2}{\mathfrak{g}} = \frac{5}{7}\frac{B_2}{M} + \frac{2}{7}R\mathfrak{K}v\mathfrak{r}, \dots\dots\dots (958, \mathfrak{b}_1)$$

а уравненія (957, f) и (957, c) — слѣдующій:

$$R\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -v^2\sigma \dots\dots\dots (958, \mathfrak{f}_1)$$

$$+ Mv^2\mathfrak{K} = B\cos(B, \mathfrak{Z}) + \lambda \dots\dots\dots (958, \mathfrak{c}_1)$$

Сравнивъ уравненія (958, a_1) и (958, b_1) съ уравненіями (957, a) и (957, b), мы найдемъ выраженія величинъ проэкцій силы тренія на касательную къ траэкторіи и на ось $\mathfrak{Y}$:

$$F\cos(F,\mathfrak{X}) = -\frac{2}{7}(B\cos(B,\mathfrak{X}) - MR\sigma v\mathfrak{r}),$$

$$F\cos(F,\mathfrak{Y}) = -\frac{2}{7}(B\cos(B,\mathfrak{Y}) - MR\mathfrak{K}v\mathfrak{r}).$$

Положимъ, что $B=0$; спрашивается, не будетъ ли центръ шара описывать тогда геодезическую линію?

Изъ уравненія (958, b_1) видно, что геодезическая кривизна траэкторіи будетъ только тогда равна нулю, когда $\mathfrak{r}=0$; но изъ уравненія (958,f_1) видно, что $\mathfrak{r}$ можетъ быть постояннымъ только тамъ, гдѣ $\sigma=0$, т. е., гдѣ геодезическая линія не имѣетъ завитія.

Слѣдовательно, если шаръ катится по какой либо поверхности безъ скольженія и притомъ, если къ нему не приложено никакихъ другихъ силъ, за исключеніемъ силы тренія, то центръ инерціи его можетъ описывать геодезическую линію только при томъ условіи, чтобы она была плоскою.

Обратимся къ разсмотрѣнію частныхъ случаевъ.

Примѣръ 115-й. Данная поверхность есть шаръ радіуса ($R_1 - R$) и подвижный шаръ прикасается къ нему снаружи.

Въ этомъ случаѣ за линіи кривизны поверхности шара радіуса R_1 можно принять систему меридіановъ и систему параллельныхъ круговъ; положеніе центра инерціи движущагося шара будемъ выражать въ сферическихъ координатахъ φ и ψ.

Ось $\mathfrak{Z}$ направимъ внутрь неподвижной сферы, ось $\mathfrak{X}$ по касательной къ меридіану, въ сторону убывающихъ φ, а ось $\mathfrak{Y}$ по касательной къ параллельному кругу, въ сторону возрастающихъ ψ; тогда $\mathfrak{a} = -R_1\varphi'$, $\mathfrak{b} = R_1\psi'\sin\varphi$, далѣе:

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 = \frac{1}{R_1},\ \ \mathrm{tg}(\rho_1,\mathfrak{Z}) = 0,\ \ \mathrm{tg}(\rho_2,\mathfrak{Z}) = \mathrm{cotg}\,\varphi,$$

слѣдовательно:

$$\omega_1 = \psi'\sin\varphi,\ \ \omega_2 = \varphi',\ \ \omega_3 = -\psi'\cos\varphi.$$

Реакція неподвижной сферы выразится такъ:

$$\lambda = -B\cos(B, З) + M\frac{v^2}{R_1}\ {}^{*}),$$

гдѣ v означаетъ скорость центра инерціи.

Если движущійся шаръ скользитъ по неподвижному, то проэкціи тренія будутъ:

$$F_1 = k(+\sqrt{\lambda^2})\frac{R_1\varphi'}{v},\ \ F_2 = -k(+\sqrt{\lambda^2})\frac{R_1\psi'\sin\varphi}{v}$$

и дифференціальныя уравненія (957, a) и (957, b), выражающія движеніе центра инерціи, будутъ тождественны съ дифференціальными уравненіями движенія матеріальной точки массы M по поверхности сферы радіуса R_1 подъ вліяніемъ силы B и тренія.

Если же скольженія нѣтъ, то дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &MR_1\left[\varphi''-(\psi')^2\sin\varphi\cos\varphi\right] = -\frac{5}{7}B_1 + \frac{2}{7}MR\mathfrak{r}\psi'\sin\varphi \\ &\frac{MR_1}{\sin\varphi}\frac{d(\psi'\sin^2\varphi)}{dt} = \frac{5}{7}B_2 - \frac{2}{7}MR\mathfrak{r}\varphi', \end{aligned}\right\} . \ (967)$$

гдѣ $\mathfrak{r}$ есть величина постоянная, такъ какъ въ настоящемъ случаѣ вторая часть дифференціальнаго уравненія (957, f_2) равна нулю. Эти дифференціальныя уравненія выражаютъ, что центръ инерціи движется такъ, какъ двигалась бы матерьяльная точка по гладкой поверхности сферы радіуса R_1, если бы на нее дѣйствовали: сила B, уменьшенная въ отношеніи 5 къ 7 и сила:

$$\frac{2}{7}\frac{v}{R_1}MR\mathfrak{r},$$

направленная въ касательной плоскости перпендикулярно къ траекторіи.

Если сила B имѣетъ потенціалъ, то движеніе шара, катящагося безъ скольженія, удовлетворяетъ закону живой силы, выражаемому интеграломъ:

$$Mv^2 = \frac{10}{7}U + 2h, \ldots\ldots\ldots\ldots (968)$$

---

*) λ есть реакція по направленію къ центру неподвижной сферы; если шаръ можетъ сойти со сферы, то λ можетъ имѣть только отрицательныя значенія до нуля включительно.

а если проэкція силы B на ось $\mathfrak{Y}$ всегда равна нулю, то будемъ имѣть еще и другой интегралъ, а именно:

$$MR_1\psi'\sin^2\varphi = C + \frac{2}{7}MRr\cos\varphi \dots\dots\dots (969)$$

Обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда сила B есть главный векторъ силы тяжести, а шаръ однороденъ; предположимъ, что полярная ось сферическихъ координатъ направлена вертикально сверху внизъ и служитъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, неподвижною осью $Y^{овъ}$, имѣющей начало въ центрѣ; тогда:

$$B_1 = Mg\sin\varphi,\quad B_2 = 0,\quad B_3 = -Mg\cos\varphi,$$

$$U = MgR_1\cos\varphi = Mg\,y.$$

Уравненіе (968) можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v^2 = \frac{10}{7}g(y-b), \dots\dots\dots\dots\dots (968, a)$$

гдѣ b имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$b = y_0 - \frac{7}{10}\,\frac{v_0^2}{g}.$$

Давленіе шара на сферу (направленное къ центру ея) выразится такъ:

$$D = -Mg\cos\varphi - M\frac{v^2}{R_1} = -M\frac{17\,g}{7R_1}\left(y - \frac{10}{17}\,b\right) \dots . (970)$$

Катящійся шаръ оставляетъ поверхность сферы въ томъ мѣстѣ ея, гдѣ D обращается въ нуль, переходя отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ: изъ выраженія (970) видно, что D болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока центръ шара находится выше уровня $y = \frac{10}{17}b$; на этомъ уровнѣ шаръ отдѣляется отъ сферы и далѣе падаетъ свободно.

Примѣръ 116-й. Движеніе однороднаго шара радіуса R по внутренней сторонѣ неподвижной сферы радіуса $(R + R_1)$.

Въ этихъ случаяхъ центръ шара можетъ находиться внутри или на поверхности сферы радіуса R_1.

Ось $\mathfrak{Z}$ направимъ внаружу сферы, ось $\mathfrak{X}$ — по касательной къ координатной оси β (т. е. въ сторону возрастающихъ φ) и ось $\mathfrak{Y}$ — по

касательной къ координатной оси γ (т. е. въ сторону возрастающихъ ψ); тогда:

$$\mathfrak{a} = R_1\varphi', \quad \mathfrak{b} = R_1\psi' \sin\varphi, \quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 = -\frac{1}{R_1},$$

$$\omega_1 = -\psi' \sin\varphi, \quad \omega_2 = \varphi', \quad \omega_3 = \psi' \cos\varphi.$$

Въ случаѣ катанія безъ скольженія дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи будутъ отличаться отъ уравненій (967) только тѣмъ, что передъ B_1 будетъ плюсъ, а не минусъ.

Если шаръ катится безъ скольженія при дѣйствіи силы тяжести, то первые интегралы будутъ:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{5}{7} R\cos\varphi = -\frac{5}{7}\, b$$

$$MR_1\psi' \sin^2\varphi = C + \frac{2}{7} MR\mathfrak{r} \cos\varphi\ ^*),$$

они сходны съ интегралами (834, A) и (832, bis) дифференціальныхъ уравненій задачи, разсмотрѣнной въ § 126-мъ; поэтому движенія центра шара будутъ сходны съ движеніями точки $\mathcal{Ц}$, разсмотрѣнными въ томъ параграфѣ.

Давленіе шара на наружную сферу выразится такъ:

$$D = M\frac{17g}{7R_1}\left(y - \frac{10}{17}\, b\right); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(970, a)}$$

отсюда и изъ интеграла живой силы видно, что если уровень $y = b$ ниже центра сферы, то шаръ не сойдетъ со сферы ни въ какой моментъ движенія, если же $b < 0$, то шаръ сойдетъ съ поверхности сферы тогда, когда центръ его будетъ на уровнѣ $y = \frac{10}{17} b$.

Примѣръ 117-й. Катаніе шара безъ скольженія по какой нибудь цилиндрической поверхности.

Представимъ себѣ цилиндрическую поверхность параллельную данной, ту, по которой движется центръ C шара; положеніе центра C на этой поверхности можно выразить посредствомъ такихъ величинъ z и σ, которыя обратятся въ прямоугольныя координаты, когда цилиндрическая поверхность будетъ развернута на плоскость; при этомъ ось z-овъ совпадаетъ съ одною изъ прямолинейныхъ производящихъ по-

*) Полярная ось направлена внизъ.

верхности, а ось координатъ σ — съ прямою линіею, въ которую обращается периметръ одного изъ сѣченій, ортогональнаго къ производящимъ.

Линіи кривизны цилиндрической поверхности суть: прямолинейныя производящія. $\sigma =$ постоянн. и ортогональныя къ нимъ сѣченія $s =$ постоянн.; какъ извѣстно, для цилиндрической поверхности:

$$\mathfrak{K}_1 = 0,\ \operatorname{tg}(\rho_1, \mathfrak{Z}) = 0,\ \operatorname{tg}(\rho_2, \mathfrak{Z}) = 0,$$

$\mathfrak{K}_2$ есть кривизна ортогональнаго сѣченія, взятая со знакомъ плюсъ, если ρ_2 направленъ по положительной оси $\mathfrak{Z}$, и взятая со знакомъ минусъ, если ρ_2 направленъ по отрицательной оси $\mathfrak{Z}$ (положительная ось $\mathfrak{Z}$ направлена изъ точки C чрезъ точку прикосновенія шара съ поверхностью, по которой онъ катается); поэтому формулы (959) для цилиндрической поверхности будутъ:

$$\omega_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{K}_2,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,$$

а дифференціальныя уравненія движенія будутъ таковы:

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{5}{7}\frac{B_1}{M} - \frac{2}{7}R\mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{K}_2,$$

$$\frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \frac{5}{7}\frac{B_2}{M},\quad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{R}\mathfrak{K}_2,$$

гдѣ:

$$\mathfrak{a} = \frac{ds}{dt},\quad \mathfrak{b} = \frac{d\sigma}{dt},\quad \mathfrak{K}_2 = f(\sigma),$$

f есть нѣкоторая функція, выражающая зависимость кривизны $\mathfrak{K}_2$ отъ координаты σ.

Если B_2 зависитъ только отъ σ, но не отъ s, то второе изъ дифференціальныхъ уравненій будетъ имѣть слѣдующій интегралъ:

$$(\sigma')^2 = C_1^2 + \frac{10}{7M}\int B_2 d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (971)$$

Въ томъ случаѣ, когда B_1 равно нулю, мы получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\frac{2}{7}R^2\mathfrak{r}^2 + (s')^2 = C_2^2,$$

$$R\mathfrak{r} = C_2\sqrt{\frac{7}{2}}\sin\left(C_3 + \sigma_1\sqrt{\frac{2}{7}}\right),$$

$$s' = C_2\cos\left(C_3 + \sigma_1\sqrt{\frac{2}{7}}\right),\ \sigma_1 = \int\mathfrak{K}_2 d\sigma.$$

Такъ, напримѣръ, если основаніе цилиндрической поверхности, по внутренней сторонѣ которой катается шаръ, есть кругъ радіуса $(R+R_1)$ и если катаніе совершается по инерціи, такъ что сила B равна нулю, то $R_1\sigma_1 = -\sigma$ и координаты центра шара выразятся слѣдующими функціями времени:

$$\sigma = \sigma_0 + C_1 t, \quad z = z_0 - \frac{C_2}{C_1} R_1 \sqrt{\frac{7}{2}} \sin\left(C_3 - \frac{(\sigma_0 + C_1 t)}{R_1}\sqrt{\frac{2}{7}}\right),$$

а потому уравненіе траэкторіи центра инерціи будетъ слѣдующее:

$$z = z_0 - \frac{C_2}{C_1} R_1 \sqrt{\frac{7}{2}} \sin\left(C_3 - \frac{\sigma}{R_1}\sqrt{\frac{2}{7}}\right);$$

если поверхность цилиндра будетъ развернута на плоскость, то эта кривая линія обратится въ синусовидную линію, имѣющую прямую линію $z = z_0$ своею осью. Слѣдовательно, движеніе центра шара, катящагося по инерціи на боковой поверхности негладкаго прямаго круглаго цилиндра, весьма разнится отъ движенія матерьяльной точки на той же поверхности по инерціи, такъ какъ такая точка описываетъ геодезическую линію (см. примѣръ 29-й на стр. 223-й).

Примѣръ 118-й. Катаніе безъ скольженія шара по конической поверхности.

Подъ разсматриваемою здѣсь коническою поверхностью будемъ опять подразумѣвать ту, по которой движется центръ C шара; относительно вида этой конической поверхности ограниченій сначала дѣлать не будемъ.

Положеніе центра C на этой поверхности выразимъ въ такихъ величинахъ r и θ, которыя обратятся въ полярныя координаты, когда коническая поверхность будетъ развернута на плоскость, при чемъ предполагается, что за полюсъ взята вершина поверхности, за полярную ось — одна изъ прямолинейныхъ производящихъ.

Линіи кривизны конической поверхности суть: прямолинейныя производящія $\theta =$ постоянн. и ихъ ортогональныя траэкторіи $r =$ постоянн.; составляющія скорости центра инерціи будутъ:

$$\mathfrak{a} = \frac{dr}{dt}, \quad \mathfrak{b} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Главная кривизна $\mathfrak{K}_1$ равна нулю и tg $(\rho_1, \mathfrak{Z})$ равенъ нулю; другая же главная кривизна $\mathfrak{K}_2$ обратно пропорціональна r и есть нѣкоторая функція отъ θ, она имѣетъ положительный или отрицательный знакъ,

смотря по тому, направленъ ли радіусъ этой главной кривизны по положительной или отрицательной оси $\mathfrak{Z}$. Въ формулы (959) входитъ геодезическая кривизна криволинейной линіи кривизны:

$$-\frac{1}{g}=\mathfrak{K}_2 \operatorname{tg}(\rho_2, \mathfrak{Z}).$$

Если развернуть коническую (или вообще линейчатую развертываемую на плоскость) поверхность на плоскость, то плоская кривая, образующаяся изъ какой либо начерченной на поверхности кривой линіи, будетъ имѣть кривизну равную геодезической кривизнѣ ея на неразвернутой поверхности, такъ что геодезическая кривизна какого либо элемента кривой на неразвернутой поверхности обратится въ обыкновенную кривизну того-же элемента кривой на плоскости. Ортогональная траэкторія $r=$ постоянн. прямолинейныхъ производящихъ конической поверхности обращается, при развертываніи поверхности на плоскость, въ кругъ радіуса r, поэтому:

$$-\mathfrak{K}_2 \operatorname{tg}(\rho_2, \mathfrak{Z})=\frac{1}{g}=\frac{1}{r}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для конической поверхности формулы (959) получатъ такой видъ:

$$\omega_1=r\mathfrak{K}_2\frac{d\theta}{dt},\ \ \omega_2=0,\ \ \omega_3=\frac{d\theta}{dt}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ таковы:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{5}{7}\frac{B_1}{M}-\frac{2}{7}R\mathfrak{r}\,r\mathfrak{K}_2\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(r^2\theta')}{dt}=\frac{5}{7}\frac{B_2}{M};\quad R\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=r\mathfrak{K}_2 r'\theta'.$$

Если сила B имѣетъ потенціалъ, то имѣетъ мѣсто законъ живой силы, выражаемый интеграломъ:

$$M\left[(r')^2+r^2(\theta')^2+\frac{2}{7}R^2\mathfrak{r}^2\right]=\frac{10}{7}U+2h\,.\,.\,.\,.\,.\quad \textbf{(972)}$$

Если постоянно $B_2=0$, то будемъ имѣть интегралъ:

$$r^2\theta'=C_1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \textbf{(973)}$$

Если поверхность есть прямой круговой конусъ и шаръ находится внутри того конуса, по которому онъ катится, то: $r\mathfrak{K}_2=-\operatorname{cotg}\alpha$, гдѣ

α есть уголъ, составляемый съ осью производящими того конуса, по которому движется центръ C шара; если, кромѣ того, $B_2 = 0$, то будемъ имѣть два интеграла, интегралъ (973) и слѣдующій:

$$R\mathfrak{r} = C_2 + \frac{C_1 \operatorname{cotg} \alpha}{r} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (974)$$

Возьмемъ слѣдующій частный случай. Пусть сила B есть сила тяжести шара и положимъ, что вершина конуса обращена внизъ, а ось его вертикальна; въ этомъ случаѣ центръ C шара движется такъ, какъ двигалась бы по гладкому конусу матерьяльная точка массы M, притягиваемая къ вершинѣ конуса силою, имѣющею слѣдующій потенціалъ:

$$-M\left[\frac{5}{7} gr \cos\alpha + \frac{1}{7}\left(C_2 + C_1 \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{r}\right)^2\right].$$

§ 143. Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія твердаго тѣла по отношенію къ данной неизмѣняемой средѣ, имѣющей собственное движеніе.

Иногда встрѣчаются такіе вопросы, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движеніе даннаго твердаго тѣла по отношенію къ нѣкоторой неизмѣняемой средѣ, имѣющей данное движеніе; поэтому надо составить надлежащія дифференціальныя уравненія.

Черезъ какую либо точку $\mathfrak{O}$ неизмѣняемой среды проведемъ оси координатъ $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$, неизмѣнно связанныя со средою. Условимся обозначать: координаты какой либо точки относительно этихъ осей — буквами $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, проэкціи на эти оси угловой скорости ω неизмѣняемой среды знаками ω_1, ω_2, ω_3, проэкціи на нихъ абсолютной скорости точки $\mathfrak{O}$ — знаками $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, угловое ускореніе неизмѣняемой среды — знакомъ $\dot{\omega}$.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія центра инерціи твердаго тѣла получатся слѣдующимъ образомъ: выразимъ, что проэкціи абсолютнаго ускоренія центра инерціи на оси $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, умноженныя на массу тѣла, равняются суммамъ проэкцій всѣхъ задаваемыхъ силъ и реакцій связей; въ полученныхъ равенствахъ выразимъ проэкціи абсолютнаго ускоренія центра инерціи твердаго тѣла

въ проэкціяхъ ускореній относительнаго, переноснаго и поворотнаго; тогда получатся такія уравненія:

$$M\mathfrak{x}_c'' = B\cos(B, \mathfrak{X}) + V\cos(V, \mathfrak{X}) - M\dot{w}_0\cos(\dot{w}_0, \mathfrak{X}) -$$
$$- M(\mathfrak{z}_c\omega_2' - \mathfrak{y}_c\omega_3') - M\omega_1(\omega_1\mathfrak{x}_c + \omega_2\mathfrak{y}_c + \omega_3\mathfrak{z}_c) +$$
$$+ M\omega^2\mathfrak{x}_c - 2M(\omega_2\mathfrak{z}'_c - \omega_3\mathfrak{y}'_c), \ldots\ldots\ldots \textbf{(975, a)}$$

$$M\mathfrak{y}_c'' = B\cos(B, \mathfrak{Y}) + V\cos(V, \mathfrak{Y}) - M\dot{w}_0\cos(\dot{w}_0, \mathfrak{Y}) -$$
$$- M(\mathfrak{x}_c\omega_3' - \mathfrak{z}_c\omega_1') - M\omega_2(\omega_1\mathfrak{x}_c + \omega_2\mathfrak{y}_c + \omega_3\mathfrak{z}_c) +$$
$$+ M\omega^2\mathfrak{y}_c - 2M(\omega_3\mathfrak{x}_c' - \omega_1\mathfrak{z}_c'), \ldots\ldots\ldots \textbf{(975, b)}$$

$$M\mathfrak{z}_c'' = B\cos(B, \mathfrak{Z}) + V\cos(V, \mathfrak{Z}) - M\dot{w}_0\cos(\dot{w}_0, \mathfrak{Z}) -$$
$$- M(\mathfrak{y}_c\omega_1' - \mathfrak{x}_c\omega_2') - M\omega_3(\omega_1\mathfrak{x}_c + \omega_2\mathfrak{y}_c + \omega_3\mathfrak{z}_c) +$$
$$+ M\omega^2\mathfrak{z}_c - 2M(\omega_1\mathfrak{y}_c' - \omega_2\mathfrak{x}_c'), \ldots\ldots\ldots \textbf{(975, c)}$$

гдѣ B и V — главные векторы задаваемыхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ твердому тѣлу, $\dot{w}_0$ — ускореніе точки $\mathfrak{O}$ неизмѣняемой среды.

Дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ относительнаго движенія могутъ быть представлены въ различномъ видѣ, смотря по выбору координатныхъ осей; мы составимъ дифференціальныя уравненія при осяхъ *ЮΞ*, *ЮΥ*, *ЮZ*, неизмѣнно связанныхъ съ твердымъ тѣломъ и совпадающихъ съ главными осями инерціи тѣла въ точкѣ *Ю*.

Проэкціи на эти оси главнаго момента количествъ движенія вокругъ точки *Ю* выразятся такъ (см. (661) стр. 473 и (757) стр. 542):

$$(\text{л}_\text{ю})_\xi = \mathfrak{A}_\text{ю} p + M(\gamma\eta_c - \beta\zeta_c), \quad (\text{л}_\text{ю})_\eta = \mathfrak{B}_\text{ю} q + M(\alpha\zeta_c - \gamma\xi_c),$$
$$(\text{л}_\text{ю})_\zeta = \mathfrak{C}_\text{ю} r + M(\beta\xi_c - \alpha\eta_c),$$

поэтому дифференціальныя уравненія (758) стр. 543 или (861, *d*, *e*, *f*) стр. 610 при этихъ осяхъ получатъ такой видъ:

$$\mathfrak{A}_ю p' = (\mathfrak{B}_ю - \mathfrak{C}_ю) qr + (Л_ю)_\xi + (\Lambda_ю)_\xi - E_\xi, \ldots (976, \mathfrak{a})$$

$$\mathfrak{B}_ю q' = (\mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю) rp + (Л_ю)_\eta + (\Lambda_ю)_\eta - E_\eta, \ldots (976, \mathfrak{b})$$

$$\mathfrak{C}_ю r' = (\mathfrak{A}_ю - \mathfrak{B}_ю) pq + (Л_ю)_\zeta + (\Lambda_ю)_\zeta - E_\zeta, \ldots (976, \mathfrak{c})$$

гдѣ:

$$E_\xi = M\left[\eta_c\left(\frac{d\gamma}{dt} - \alpha q + \beta p\right) - \zeta_c\left(\frac{d\beta}{dt} + \alpha r - \gamma p\right)\right] =$$

$$= M\left[\eta_c \dot{v}_ю \cos(\dot{v}_ю, \mathsf{Z}) - \zeta_c \dot{v}_ю \cos(\dot{v}_ю, \Upsilon)\right],$$

$$E_\eta = M\left[\zeta_c \dot{v}_ю \cos(\dot{v}_ю, \Xi) - \xi_c \dot{v}_ю \cos(\dot{v}_ю, \mathsf{Z})\right],$$

$$E_\zeta = M\left[\xi_c \dot{v}_ю \cos(\dot{v}_ю, \Upsilon) - \eta_c \dot{v}_ю \cos(\dot{v}_ю, \Xi)\right].$$

Чтобы перейти отъ этихъ уравненій абсолютнаго движенія къ уравненіямъ относительнаго движенія твердаго тѣла по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, надо воспользоваться правиломъ параллелограмма угловыхъ скоростей, приведеннымъ на стр. 185-й кинематической части.

Означимъ черезъ ω_ξ, ω_η, ω_ζ проэкціи угловой скорости ω неизмѣняемой среды на оси Ξ, Υ, Z и черезъ p, q, r — проэкціи на тѣ же оси угловой скорости относительнаго движенія твердаго тѣла по отношенію къ неизмѣняемой средѣ.

По правилу параллелограмма угловыхъ скоростей:

$$p = \mathrm{p} + \omega_\xi, \quad q = \mathrm{q} + \omega_\eta, \quad r = \mathrm{r} + \omega_\zeta \quad \ldots\ldots (977)$$

Когда подставимъ эти суммы вмѣсто p, q и r въ уравненія (976), то въ нихъ войдутъ производныя

$$\frac{d\mathrm{p}}{dt}, \quad \frac{d\mathrm{q}}{dt}, \quad \frac{d\mathrm{r}}{dt},$$

выражающія проэкціи угловаго относительнаго ускоренія твердаго тѣла на оси Ξ, Υ, Z, и производныя:

$$\frac{d\omega_\xi}{dt},\quad \frac{d\omega_\eta}{dt},\quad \frac{d\omega_\zeta}{dt},$$

которыя не равны проэкціямъ угловаго ускоренія $\dot{\omega}$ неизмѣняемой среды на тѣ же оси; въ самомъ дѣлѣ, по общей формулѣ (293) кинематической части (стр. 251), выражающей проэкцію скорости годографа на подвижное направленіе, мы найдемъ, что проэкціи угловаго ускоренія $\dot{\omega}$ на оси Ξ, Υ, Z выразятся такъ:

$$\dot{\omega}_\xi = \dot{\omega}\cos(\dot{\omega}, \Xi) = \frac{d\omega_\xi}{dt} - r\omega_\eta + q\omega_\zeta =$$

$$= \omega_\xi' - r\omega_\eta + q\omega_\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (978, a)$$

$$\dot{\omega}_\eta = \dot{\omega}\cos(\dot{\omega}, \Upsilon) = \omega_\eta' - p\omega_\zeta + r\omega_\xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (978, b)$$

$$\dot{\omega}_\zeta = \dot{\omega}\cos(\dot{\omega}, Z) = \omega_\zeta' - q\omega_\xi + p\omega_\eta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (978, c)$$

При помощи формулъ (977) и (978), дифференціальныя уравненія (976) могутъ быть преобразованы въ слѣдующія дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ относительнаго движенія вокругъ осей Ξ, Υ, Z:

$$\mathfrak{A}_ю \frac{dp}{dt} = (\mathfrak{B}_ю - \mathfrak{C}_ю)(qr + \omega_\eta\omega_\zeta) - \mathfrak{A}_ю\dot{\omega}_\xi + (\mathcal{L}_ю)_\xi + (\Lambda_ю)_\xi - E_\xi +$$

$$+ (\mathfrak{A}_ю + \mathfrak{B}_ю - \mathfrak{C}_ю)\, q\omega_\zeta - (\mathfrak{A}_ю - \mathfrak{B}_ю + \mathfrak{C}_ю)\, r\omega_\eta \ldots\ldots (979, a)$$

$$\mathfrak{B}_ю \frac{dq}{dt} = (\mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю)(rp + \omega_\zeta\omega_\xi) - \mathfrak{B}_ю\dot{\omega}_\eta + (\mathcal{L}_ю)_\eta + (\Lambda_ю)_\eta - E_\eta +$$

$$+ (\mathfrak{B}_ю + \mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю)\, r\omega_\xi - (\mathfrak{B}_ю - \mathfrak{C}_ю + \mathfrak{A}_ю)\, p\omega_\zeta \ldots\ldots (979, b)$$

$$\mathfrak{C}_ю \frac{dr}{dt} = (\mathfrak{A}_ю - \mathfrak{B}_ю)(pq + \omega_\xi\omega_\eta) - \mathfrak{C}_ю\dot{\omega}_\zeta + (\mathcal{L}_ю)_\zeta + (\Lambda_ю)_\zeta - E_\zeta +$$

$$+ (\mathfrak{C}_ю + \mathfrak{A}_ю - \mathfrak{B}_ю)\, p\omega_\eta - (\mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю + \mathfrak{B}_ю)\, q\omega_\xi \ldots\ldots (979, c)$$

Наконецъ, составимъ еще дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ относительнаго движенія при координатныхъ осяхъ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Означимъ черезъ λ_1, λ_2, λ_3 косинусы угловъ, составляемыхъ осью Ξ съ осями $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, черезъ μ_1, μ_2, μ_3, — косинусы угловъ, составляемыхъ осью Υ съ тѣми же осями, и черезъ ν_1, ν_2, ν_3 — косинусы угловъ, составляемыхъ съ тѣми же осями осью Z; производныя отъ этихъ косинусовъ по времени могутъ быть выражены формулами, подобными формуламъ (104) стр. 93-й или (120) стр. 105-й кинематической части; такъ, напримѣръ:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = r\mu_1 - q\nu_1, \quad \frac{d\mu_1}{dt} = p\nu_1 - r\lambda_1, \quad \frac{d\nu_1}{dt} = q\lambda_1 - p\mu_1.$$

Помноживъ уравненія (979) на λ_1, μ_1, ν_1, сложивъ и принявъ во вниманіе послѣднія равенства, получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d(l_ю)_1}{dt} = (Л_ю)_1 + (\Lambda_ю)_1 - E_\xi\lambda_1 - E_\eta\mu_1 - E_\zeta\nu_1 -$$
$$- \mathfrak{A}_ю\dot{\omega}_\xi\lambda_1 - \mathfrak{B}_ю\dot{\omega}_\eta\mu_1 - \mathfrak{C}_ю\dot{\omega}_\zeta\nu_1 +$$
$$+ 2(\mathfrak{A}_ю'\omega_\xi\lambda_1' + \mathfrak{B}_ю'\omega_\eta\mu_1' + \mathfrak{C}_ю'\omega_\zeta\nu_1')$$
$$+ (\mathfrak{B}_ю - \mathfrak{C}_ю)\omega_\eta\omega_\zeta\lambda_1 + (\mathfrak{C}_ю - \mathfrak{A}_ю)\omega_\xi\omega_\zeta\mu_1 + (\mathfrak{A}_ю - \mathfrak{B}_ю)\omega_\xi\omega_\eta\nu_1. \quad \textbf{(980,a)}$$

гдѣ $\mathfrak{A}_ю'$, $\mathfrak{B}_ю'$, $\mathfrak{C}_ю'$ суть квадратичные моменты относительно плоскостей $\Upsilon\mathsf{Z}$, $\mathsf{Z}\Xi$, $\Xi\Upsilon$; $(Л_ю)_1$ есть проэкція главнаго момента силъ вокругъ точки $Ю$ на ось $\mathfrak{X}$, а

$$(l_ю)_1 = \mathfrak{A}_ю\, p\lambda_1 + \mathfrak{B}_ю\, q\mu_1 + \mathfrak{C}_ю\, r\nu_1$$

есть проэкція на ту же ось главнаго момента количествъ относительнаго движенія твердаго тѣла.

Такимъ же образомъ составимъ и другія два дифференціальныя уравненія.

§ 144. Вопросы и задачи объ опредѣленіи относительнаго движенія твердаго тѣла по отношенію къ данной неизмѣняемой средѣ.

Примѣръ 119-й. Неизмѣняемая среда вращается равномѣрно съ угловою скоростью ω вокругъ вертикальной оси OZ (черт. 122-й). Твер-

дое тѣло есть дискъ MM, подобный тѣмъ, которые изображены на чертежахъ 104-мъ и 105-мъ; ось ab этого тѣла свободно вращается въ подшипникахъ вилки BB, прикрѣпленной къ концу S стержня S_0S маятника, могущаго вращаться вокругъ оси $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, неизмѣнно связанной со средою. Вращаясь вокругъ этой оси, стержень остается въ плоскости $Z O \mathfrak{O}$. Вилка прикрѣплена къ стержню такъ, что ось ab ($C\mathfrak{Z}$) остается въ той же плоскости.

Тѣлу MM сообщена угловая скорость C вокругъ оси $C\mathfrak{Z}$; опредѣлить, какое движеніе будетъ совершать маятникъ подъ вліяніемъ силы тяжести (дѣйствующей параллельно отрицательной оси $Z^{\text{овъ}}$) и переноснаго движенія вмѣстѣ съ вращающеюся средою.

Положимъ, что начало O неподвижныхъ осей координатъ выбрано такъ, что точка $\mathfrak{O}$ находится въ плоскости XY; положительная ось $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$ пусть совпадаетъ съ продолженіемъ направленія, проведеннаго изъ O черезъ $\mathfrak{O}$, а ось $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ параллельна оси $Z^{\text{овъ}}$. Уголъ $\mathfrak{X}OX$ означимъ черезъ $э_1$ ($э_1 = \omega t$), а уголъ $S\mathfrak{O}\mathfrak{Z}'$ — черезъ φ.

Чтобы составить уравненія тѣхъ связей, которымъ подчинено твердое тѣло, надо принять во вниманіе, что маятникъ имѣетъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ только одну степень свободы (именно онъ можетъ вращаться вокругъ оси $\mathfrak{Y}$), а твердое тѣло имѣетъ по отношенію къ маятнику тоже одну степень свободы; слѣдовательно, твердое тѣло имѣетъ въ сложности двѣ степени свободы, т. е. подчинено четыремъ связямъ. Нетрудно составить уравненія этихъ связей; онѣ таковы:

$$x_c - (D + l\cos ф)\cos\omega t = 0,\ \ y_c - (D + l\cos ф)\sin\omega t = 0,$$

$$z_c + l\sin ф = 0,\ \ ж - \omega t = 0,$$

или

$$\mathfrak{x}_c - l\cos ф = 0,\ \ \mathfrak{y}_c = 0,\ \ \mathfrak{z}_c + l\sin ф = 0,\ \ ж_з = 0, \ldots \quad \textbf{(981)}$$

гдѣ D означаетъ величину разстоянія $O\mathfrak{O}$, l — разстояніе центра инерціи C диска отъ точки $\mathfrak{O}$; $ф = \frac{\pi}{2} - \varphi$ есть уголъ, составляемый осью $\mathfrak{Z}$ съ осью $\mathfrak{Z}$, а $ж_з$ есть уголъ, составляемый плоскостью, проведенною черезъ ось $C\mathfrak{Z}$ параллельно оси $\mathfrak{Z}$ съ плоскостью $\mathfrak{Z}\mathfrak{O}\mathfrak{X}$ (этотъ уголъ равенъ нулю въ настоящемъ случаѣ).

По формуламъ (47 — 55) кинематической части составимъ выраженія для косинусовъ $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots \nu_3$; такъ какъ здѣсь $ж_з = 0$ и $ф = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то они будутъ таковы:

$$\lambda_1 = \cos \vartheta \sin \varphi, \quad \lambda_2 = \sin \vartheta, \quad \lambda_3 = -\cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$\mu_1 = -\sin \vartheta \sin \varphi, \quad \mu_2 = \cos \vartheta, \quad \mu_3 = \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$\nu_1 = \cos \varphi, \qquad \nu_2 = 0, \qquad \nu_3 = \sin \varphi.$$

Ускореніе точки $\mathfrak{O}$ и находящейся въ совпаденіи съ нею точки S_0 равно $\omega^2 D$ и направлено къ точкѣ O.

Проэкціи угловой скорости ω на оси $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ равны нулю; проэкція ея на оси Ξ, Υ, Z суть $\omega\lambda_3$, $\omega\mu_3$, $\omega\nu_3$. Угловое ускореніе неизмѣняемой среды равно нулю.

Относительное движеніе тѣла MM по отношенію къ неизмѣняемой средѣ состоитъ изъ вращенія этого тѣла вокругъ оси $C\mathsf{Z}$ и изъ вращенія его вмѣстѣ съ маятникомъ вокругъ оси $\mathfrak{Y}$ (угловая скорость: $-\frac{d\varphi}{dt}$); поэтому:

$$p = -\varphi' \sin \vartheta, \quad q = -\varphi' \cos \vartheta,$$

$$p \cos \vartheta - q \sin \vartheta = 0, \quad p \sin \vartheta + q \cos \vartheta = -\varphi'.$$

По формуламъ § 129-го составимъ выраженія проэкцій на оси $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ главнаго вектора реакцій связей и выраженія главныхъ моментовъ реакцій вокругъ оси $C\mathsf{Z}$ и вокругъ оси, проведенной черезъ центръ инерціи C параллельно оси $\mathfrak{Y}$; эти выраженія могутъ быть составлены такъ:

$$V \cos (V, \mathfrak{X}) = \Delta_1 \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial \mathfrak{x}_c} + \Delta_2 \frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial \mathfrak{x}_c} + \Delta_3 \frac{\partial \mathfrak{s}_3}{\partial \mathfrak{x}_c} + \Delta_4 \frac{\partial \mathfrak{s}_4}{\partial \mathfrak{x}_c},$$

$$(\Lambda_c)_\zeta = \Delta_1 \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial \vartheta} + \ldots \;\; . + \Delta_4 \frac{\partial \mathfrak{s}_4}{\partial \vartheta},$$

$$(\Lambda_c)_2 = \Delta_1 \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial ж_3} \cos \phi\right) \frac{\sin ж_3}{\sin \phi} + \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial \phi} \cos ж_3\right] + \ldots \ldots =$$

$$= \Delta_1 \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial \phi} + \Delta_2 \frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial \phi} + \Delta_2 \frac{\partial \mathfrak{s}_3}{\partial \phi} + \Delta_4 \frac{\partial \mathfrak{s}_4}{\partial \phi},$$

гдѣ $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{s}_4$ суть обозначенія функцій отъ $\mathfrak{x}_c$, $\mathfrak{y}_c$, $\mathfrak{z}_c$, ϕ, $ж_3$, ϑ, образующихъ первыя части уравненій (981) связей, а Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 суть множители свойственные этимъ связямъ; выраженіе для $(\Lambda_c)_2$ упростилось вслѣдствіе того, что $ж_3 = 0$.

По этимъ формуламъ найдемъ, что:

$$V\cos(V,\mathfrak{X})=\Delta_1,\quad V\cos(V,\mathfrak{Y})=\Delta_2,\quad V\cos(V,\mathfrak{Z})=\Delta_3$$

$$(\Lambda_c)_\zeta=0,\ (\Lambda_c)_2=\Lambda_c\cos(\Lambda_c,\mathfrak{Y})=\Delta_1 l\cos\varphi+\Delta_3 l\sin\varphi.$$

Теперь, по формуламъ предыдущаго параграфа, составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія центра инерціи (первое и третье), дифференціальное уравненіе моментовъ вокругъ оси Z (979, c) и дифференціальное уравненіе моментовъ вокругъ оси параллельной оси $\mathfrak{Y}$ и проведенной черезъ точку C; эти уравненія въ настоящемъ случаѣ будутъ таковы:

$$Ml\frac{d^2\sin\varphi}{dt^2}=\Delta_1+M(D+l\sin\varphi)\,\omega^2,$$

$$-Ml\frac{d^2\cos\varphi}{dt^2}=-Mg+\Delta_3,\quad \mathfrak{C}_c\frac{dr}{dt}+\mathfrak{C}_c\omega\frac{dv_3}{dt}=0,$$

$$-\mathfrak{A}_c\frac{d^2\varphi}{dt^2}=(\Delta_1\cos\varphi+\Delta_3\sin\varphi)\,l-2\mathfrak{A}_c'\,r\,\omega\cos\varphi-$$

$$-(\mathfrak{C}_c-\mathfrak{A}_c)\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\ ^{*)}.$$

Третье изъ этихъ уравненій интегрируется непосредственно и даетъ интегралъ:

$$r+\omega\sin\varphi=C=r_0,$$

гдѣ r_0 есть угловая скорость вращенія вокругъ оси симметріи при φ равномъ нулю.

Исключивъ изъ трехъ остальныхъ дифференціальныхъ уравненій множители Δ_1 и Δ_3, получимъ дифференціальное уравненіе втораго порядка:

$$(\mathfrak{A}_c+Ml^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=(\mathfrak{C}_c r_0+MDl\omega)\,\omega\cos\varphi-Mlg\sin\varphi+$$

$$+(Ml^2-\mathfrak{A}_c)\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi,\ \ldots\ldots\ \mathbf{(982)}$$

---

*) Для тѣла вращенія:

$$2\mathfrak{A}_c'=\mathfrak{C}_c$$ (см. стр. 495).

Если ω и r_0 суть величины положительныя, то вторая часть этого уравненія имѣетъ положительную величину при φ равномъ нулю и отрицательную величину при φ равномъ $\frac{\pi}{2}$, а, слѣдовательно, она равна нулю при нѣкоторомъ положительномъ углѣ φ_1, меньшемъ $90°$.

Слѣдовательно, *если* r_0 *имѣетъ положительную величину, то, при вращеніи неизмѣняемой среды съ положительною угловою скоростью* ω *вокругъ положительной оси* $Z^{\text{овъ}}$, *маятникъ будетъ стремиться отклониться на уголъ* φ_1 (*внаружу*); такъ, что когда маятникъ находится въ вертикальномъ положеніи и при этомъ угловая скорость φ' равна нулю, тогда φ стремится увеличиться (потому что $\varphi'' > 0$), когда же маятникъ находится въ горизонтальномъ положеніи $\left(\text{при } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ и при этомъ φ' тоже равна нулю, тогда φ стремится уменьшаться (потому что $\varphi'' < 0$).

Если же (при положительной ω) угловая скорость r_0 имѣетъ достаточную отрицательную величину, такъ что сумма:

$$\mathfrak{C}_c r_0 \omega + MDl\,\omega^2$$

имѣетъ отрицательное значеніе, то вторая часть равенства (982) имѣетъ отрицательную величину при $\varphi = 0$ и положительную при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, а, слѣдовательно, она равна нулю при нѣкоторомъ углѣ $(-\varphi_2)$, заключающемся между нулемъ и $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Слѣдовательно, *если* r_0 *имѣетъ отрицательную величину, удовлетворяющую условію:*

$$r_0 < -\frac{MDl\,\omega}{\mathfrak{C}_c}, \dots\dots\dots\dots\dots \textbf{(983)}$$

то при вращеніи неизмѣняемой среды съ положительною угловою скоростью ω *вокругъ положительной оси* $Z^{\text{овъ}}$, *маятникъ будетъ стремиться отклониться на уголъ* $(-\varphi_2)$, *т. е. къ оси* $Z^{\text{овъ}}$.

Если бы тѣло MM не вращалось вокругъ оси $\mathbf{Z}$ (т. е. если бы r_0 было равно нулю), то при вращеніи среды маятникъ стремился бы отклониться отъ оси вращенія вслѣдствіе дѣйствія центробѣжной силы; между тѣмъ при отрицательномъ r_0, удовлетворяющемъ неравенству (983), маятникъ отклоняется *къ* оси вращенія, противоположно дѣйствію центробѣжной силы. Приборъ, служащій для демонстрированія этого интереснаго явленія, извѣстенъ подъ именемъ маятниковаго прибора Сира (l'appareil pendulaire de M. Sire).

Прежде чѣмъ перейдемъ къ остальнымъ двумъ примѣрамъ, обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

Если неизмѣняемая среда не имѣетъ угловаго ускоренія, а точка $\mathfrak{O}$ имѣетъ постоянное ускореніе A по оси $\mathfrak{X}$, если твердое тѣло подчинено такимъ связямъ, выраженія которыхъ заключаютъ $\mathfrak{x}_c$, $\mathfrak{y}_c$, $\mathfrak{z}_c$ и косинусы λ_1, λ_2, λ_3, $\mu_1, \ldots\ldots \nu_3$, но не заключаютъ времени t; наконецъ, если силы, приложенныя къ тѣлу, имѣютъ потенціаломъ функцію отъ тѣхъ же перемѣнныхъ $\mathfrak{x}_c$, $\mathfrak{y}_c$, $\mathfrak{z}_c$, λ_1, λ_2, λ_3, $\mu_1, \mu_2, \ldots \nu_3$, то дифференціальныя уравненія относительнаго движенія тѣла имѣютъ интегралъ, заключающій живую силу относительнаго движенія.

Въ самомъ дѣлѣ, помножимъ уравненія $(975, a, b, c)$ на $\mathfrak{x}_c'$, $\mathfrak{y}_c'$, $\mathfrak{z}_c'$, а уравненія $(979, a, b, c)$ на $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, причемъ за точку $Ю$ примемъ центръ инерціи тѣла; сложивъ, получимъ:

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = M\frac{\omega^2}{2}\frac{d\rho_c^2}{dt} - \frac{M}{2}\frac{d(\omega_1\mathfrak{x}_c + \omega_2\mathfrak{y}_c + \omega_3\mathfrak{z}_c)^2}{dt} + \frac{dU}{dt} - MA\mathfrak{x}_c' +$$

$$+ \mathfrak{A}_c\omega_\xi(\omega_\eta\mathfrak{r} - \omega_\zeta\mathfrak{q}) + \mathfrak{B}_c\omega_\eta(\omega_\zeta\mathfrak{p} - \omega_\xi\mathfrak{r}) + \mathfrak{C}_c\omega_\zeta(\omega_\xi\mathfrak{q} - \omega_\eta\mathfrak{p}),$$

гдѣ:

$$\mathrm{T} = \frac{M}{2}\left[(\mathfrak{x}_c')^2 + (\mathfrak{y}_c')^2 + (\mathfrak{z}_c')^2\right] + \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}_c\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}_c\mathfrak{r}^2), \ldots (984)$$

$$\rho_c^2 = \mathfrak{x}_c^2 + \mathfrak{y}_c^2 + \mathfrak{z}_c^2.$$

На основаніи формулъ $(978, a, b, c)$ мы найдемъ, что послѣдній многочленъ второй части предыдущаго уравненія равенъ:

$$\mathfrak{A}_c\omega_\xi\omega_\xi' + \mathfrak{B}_c\omega_\eta\omega_\eta' + \mathfrak{C}_c\omega_\zeta\omega_\zeta',$$

а потому это уравненіе интегрируется и даетъ слѣдующій интегралъ:

$$\mathrm{T} = \frac{M}{2}\left[\omega^2\rho_c^2 - (\omega_1\mathfrak{x}_c + \omega_2\mathfrak{y}_c + \omega_3\mathfrak{z}_c)^2\right] + U - MA\mathfrak{x}_c +$$

$$+ \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c\omega_\xi^2 + \mathfrak{B}_c\omega_\eta^2 + \mathfrak{C}_c\omega_\zeta^2) + h \ldots\ldots\ldots (985)$$

Примѣръ 120-й. Неизмѣняемая среда вращается равномѣрно вокругъ постоянной неподвижной оси. Центръ инерціи C твердаго тѣла неизмѣнно связанъ съ нѣкоторою точкою $\mathfrak{O}$ неизмѣняемой среды. Ось $\mathbf{Z}$

есть ось симметріи массы тѣла, такъ что $\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c$. Опредѣлить относительное вращеніе тѣла, предполагая, что въ начальный моментъ ему сообщено относительное вращеніе вокругъ оси **Z**.

Предположимъ, что оси $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ расположены такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; за точку *Ю* возьмемъ центръ инерціи *C*, котораго координаты $\mathfrak{x}_c$, $\mathfrak{y}_c$, $\mathfrak{z}_c$ равны нулю.

Составимъ дифференціальныя уравненія (979, *c*), (980, *c*) моментовъ вокругъ осей **Z** и $\mathfrak{Z}$; они будутъ таковы:

$$\mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} = - \mathfrak{C}_c \frac{d\omega_{\mathfrak{z}}}{dt},$$

$$\frac{d\left(\mathfrak{A}_c(p\lambda_3 + q\mu_3) + \mathfrak{C}_c r\nu_3\right)}{dt} = -2\omega\left(\mathfrak{A}_c(\lambda_3\lambda_3' + \mu_3\mu_3') + \mathfrak{C}_c \nu_3\nu_3'\right)$$

и даютъ слѣдующіе интегралы:

$$r + \omega\cos\phi = C_1 = r_0 + \omega\cos\phi_0\,^*), \ldots\ldots\ldots \quad (986)$$

$$\mathfrak{A}_c\, ж' \sin^2\phi + \mathfrak{C}_c r\cos\phi + \mathfrak{A}_c\,\omega\sin^2\phi + \mathfrak{C}_c\,\omega\cos^2\phi = G \,.\,. \quad (987)$$

Еще одинъ интегралъ получимъ по формулѣ (985); онъ будетъ такой:

$$\mathfrak{A}_c\left((\phi')^2 + (ж')^2\sin^2\phi\right) = 2h - \mathfrak{C}_c r^2 + \mathfrak{A}_c\omega^2\sin^2\phi + \mathfrak{C}_c\omega^2\cos^2\phi \,. \quad (988)$$

Исключивъ изъ интеграловъ (986) и (987) величину r, получимъ слѣдующее выраженіе для *ж'*:

$$ж' = -\omega + \frac{G - \mathfrak{C}_c C_1 \cos\phi}{\mathfrak{A}_c \sin^2\phi}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (989)$$

а исключивъ изъ всѣхъ трехъ интеграловъ величины r и *ж'*, получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\mathfrak{A}_c(\phi')^2\sin^2\phi = (2h - \mathfrak{C}_c C_1^2 + 2G\omega)\sin^2\phi -$$

$$- \frac{(G - \mathfrak{C}_c C_1 \cos\phi)^2}{\mathfrak{A}_c}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (990)$$

интегрированіе котораго не представляетъ затрудненій.

---

*) Буквы ϕ и *ж* означаютъ: первая—уголъ между осями **Z** и $\mathfrak{Z}$, вторая—уголъ, образуемый плоскостями $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$**Z** между собою.

Нетрудно убѣдиться, что если въ начальный моментъ ось Z совпадала съ осью $\mathfrak{Z}$ и если начальныя значенія производныхъ $ф'$ и $ж'$ были равны нулю, то ось Z будетъ постоянно совпадать съ осью $\mathfrak{Z}$.

Примѣръ 121-й. Къ заданію предыдущаго примѣра присоединяется условіе, что ось симметріи (ось Z) твердаго тѣла должна оставаться въ какой либо плоскости, неизмѣнно связанной съ движущеюся средою.

Положимъ, что нормаль H этой плоскости составляетъ уголъ ε съ осью $\mathfrak{Z}$ и что плоскость, проведенная черезъ $\mathfrak{Z}$ и H составляетъ уголъ δ съ плоскостью $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, такъ что косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, будутъ:

$$\sin\varepsilon\cos\delta,\quad \sin\varepsilon\sin\delta,\quad \cos\varepsilon,$$

а условіе, что ось Z перпендикулярна къ H, выразится такъ:

$$\nu_1\sin\varepsilon\cos\delta + \nu_2\sin\varepsilon\sin\delta + \nu_3\cos\varepsilon = 0, \ldots\ldots \quad \mathbf{(991)}$$

или:

$$\sin\varepsilon\sin ф\cos(\delta - ж) + \cos\varepsilon\cos ф = 0 \ldots\ldots \quad \mathbf{(991, bis)}$$

Такъ какъ это уравненіе не заключаетъ времени явнымъ образомъ, то и въ настоящемъ случаѣ вращеніе тѣла удовлетворяетъ интегралу (988).

Кромѣ того, дифференціальное уравненіе моментовъ вокругъ оси Z имѣетъ совершенно тотъ же самый видъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, поэтому теперь имѣетъ мѣсто также и интегралъ (986).

По исключеніи величины r изъ этихъ двухъ интеграловъ, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\mathfrak{A}_c\left((ф')^2 + (ж')^2\sin^2 ф\right) = 2h - \mathfrak{C}_c C_1^2 + 2\mathfrak{C}_c C_1\,\omega\cos ф +$$
$$+ \mathfrak{A}_c\,\omega^2\sin^2 ф \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(992)}$$

Углы $ф$ и $ж$ могутъ быть выражены функціями нѣкотораго угла, опредѣляющаго положеніе оси Z на данной плоскости. Означимъ черезъ θ уголъ между плоскостью $H\mathsf{Z}$ и плоскостью $H\mathfrak{Z}$; это есть вмѣстѣ съ тѣмъ уголъ при вершинѣ H сферическаго треугольника $H\mathsf{Z}\mathfrak{Z}$, противулежащій сферической сторонѣ $\mathfrak{Z}\mathsf{Z}$, равной $ф$; другія двѣ стороны этого треугольника суть $H\mathfrak{Z} = \varepsilon$ и $H\mathsf{Z} = \frac{\pi}{2}$; сферическій уголъ при $\mathfrak{Z}$, противулежащій сторонѣ $H\mathsf{Z}$, равенъ $(\delta - ж)$; по извѣстнымъ формуламъ сферической тригонометріи:

$$\cos ф = \sin\varepsilon\cos\theta,\quad \sin ф\sin(\delta - ж) = \sin\theta.$$

Дифференцируя первую изъ этихъ формулъ и уравненіе (991, bis), получимъ:

$$\phi' \sin \phi = \theta' \sin \varepsilon \sin \theta, \quad ж' \sin(\delta - ж) = + \frac{\operatorname{cotg} \varepsilon}{\sin^2 \phi} \phi',$$

отсюда и изъ приведенныхъ формулъ найдемъ:

$$(\phi')^2 + (ж')^2 \sin^2 \phi = (\theta')^2.$$

Поэтому дифференціальное уравненіе (992) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\mathfrak{A}_c (\theta')^2 = 2h_1 + 2C_1 \mathfrak{C}_c \omega \sin \varepsilon \cos \theta - \mathfrak{A}_c \omega^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \theta, . \quad \textbf{(992, bis)}$$

гдѣ h_1 есть постоянная.

Положимъ, что въ начальный моментъ угловая скорость θ' была равна нулю, а уголъ θ равенъ θ_0, причемъ тѣлу было сообщено относительное угловое вращеніе r_0, имѣющее весьма большую величину сравнительно съ ω; тогда постоянная $2h_1$ окажется равною:

$$2h_1 = - 2C_1 \mathfrak{C}_c \omega \sin \varepsilon \cos \theta_0 + \mathfrak{A}_c \omega^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \theta_0,$$

причемъ

$$C_1 = r_0 + \omega \sin \varepsilon \cos \theta_0;$$

поэтому дифференціальное уравненіе (992, bis) приметъ тогда слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A}_c (\theta')^2 = 2\mathfrak{C}_c r_0 \omega \sin \varepsilon (\cos \theta - \cos \theta_0) K, \ldots \quad \textbf{(992, c)}$$

гдѣ:

$$K = 1 + \frac{(2\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)\omega}{2\mathfrak{C}_c r_0} \sin \varepsilon \cos \theta_0 - \frac{\mathfrak{A}_c \omega}{2\mathfrak{C}_c r_0} \sin \varepsilon \cos \theta.$$

Если r_0 имѣетъ достаточно большую величину сравнительно съ ω, то K не получитъ отрицательныхъ значеній и не обратится въ нуль ни при какомъ углѣ θ, а потому вторая часть уравненія (992, c) имѣетъ положительныя значенія для всѣхъ θ, заключающихся въ предѣлахъ θ_0 и $(-\theta_0)$ и обращается въ нуль на этихъ предѣлахъ.

Слѣдовательно, *ось* **Z** *совершаетъ размахи амплитуды* θ_0 *по обѣ стороны положенія равновѣсія* ($\theta = 0$), *находящагося на пересѣченіи данной плоскости съ плоскостью, проведенною черезъ нормаль H и ось* $\mathfrak{Z}$.

Сравнивъ уравненіе (992, c) съ уравненіемъ

$$(\theta')^2 = 2\frac{g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

которому удовлетворяютъ качанія круговаго математическаго маятника длины R, мы увидимъ, что колебанія оси Z совершаются по закону болѣе сложному, чѣмъ колебанія простаго маятника; но если пренебречь дробью $(\omega : r_0)$, то можно сказать, что *приблизительно продолжительность каждаго весьма малаго размаха оси Z равна*:

$$\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_c}{\mathfrak{C}_c r_0 \omega \sin\varepsilon}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (993)$$

Поэтому, если гироскопъ, изображенный на чертежѣ 104-мъ, будетъ подвѣшенъ такимъ образомъ, чтобы онъ могъ свободно вращаться вокругъ оси FF, неподвижной по отношенію къ землѣ, и если тѣлу M будетъ сообщено быстрое вращеніе r_0 вокругъ оси AB, то, вслѣдствіе вращенія земли вокругъ оси, ось AB будетъ совершать качанія около нѣкотораго положенія равновѣсія.

Если ось FF будетъ вертикальна, то есть перпендикулярна къ истинному горизонту мѣста наблюденій, то положеніе равновѣсія будетъ направлено по меридіональной линіи, а продолжительность малыхъ качаній будетъ равна:

$$\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_c}{\mathfrak{C}_c r_0 \omega \cos\Lambda}},$$

гдѣ Λ есть истинная широта мѣста наблюденій.

Если же ось FF будетъ перпендикулярна къ плоскости меридіана того мѣста, гдѣ совершаются наблюденія, то положеніе равновѣсія совпадаетъ съ направленіемъ оси міра, а продолжительность качаній будетъ равна:

$$\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_c}{\mathfrak{C}_c r_0 \omega}}.$$

Эти явленія показалъ и объяснилъ Фуко.

ГЛАВА XII.

О составленіи дифференціальныхъ уравненій движенія гибкихъ и деформируемыхъ сплошныхъ тѣлъ. Гибкая нить.

Въ этой главѣ будутъ изложены соображенія, которыми руководствуются при примѣненіи механики системы матерьяльныхъ точекъ къ теоріи равновѣсія и движенія деформируемыхъ сплошныхъ матерьяльныхъ тѣлъ разнаго рода; конецъ же главы будетъ посвященъ спеціально составленію дифференціальныхъ уравненій движенія весьма тонкихъ гибкихъ нитей.

§ 145. Предположенія, дѣлаемыя относительно силъ взаимнодѣйствія между атомами.

По атомистической теоріи, всякое матерьяльное тѣло, не смотря на свою кажущуюся сплошность, состоитъ изъ атомовъ.

Каждый атомъ есть недѣлимое абсолютно-твердое тѣло, размѣры котораго въ такой степени ничтожны, въ какой, примѣрно, громадны разстоянія отъ земли до неподвижныхъ звѣздъ.

Между атомами дѣйствуютъ силы взаимнодѣйствія, которыя, можетъ быть, не только стремятся измѣнить разстоянія между ними, но могутъ еще побуждать ихъ принять вращательныя движенія относительно другъ друга.

Такимъ образомъ теорія движенія и равновѣсія матерьяльнаго нетвердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы твердыхъ тѣлъ, между которыми дѣйствуютъ нѣкоторыя силы взаимнодѣйствія; для того, чтобы поставить разсужденія на опредѣленную почву, необходимо сдѣлать предположенія относительно вида атомовъ и относительно закона взаимнодѣйствій между ними.

Во многихъ вопросахъ математической физики нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ вращеніе атомовъ; тогда можно каждый атомъ замѣнить матерьяльною точкою, не дѣлая никакихъ предположеній относительно вида атомовъ.

Относительно силъ взаимнодѣйствія, дѣйствующихъ между матерьяльными точками, замѣняющими атомы, дѣлаются обыкновенно слѣдующія предположенія.

Предположеніе E относительно взаимнодѣйствій между атомами.

Предполагается, что силы эти слѣдуютъ началу равенства и противоположности, т. е., что силы, дѣйствующія между атомами A и B, равны и прямопротивоположны.

Кромѣ того предполагается, что эти силы направлены по линіи, соединяющей точки, то есть атомы A и B, и что величина каждой изъ этихъ силъ равняется произведенію

$$m_A m_B f(r_{AB}),$$

гдѣ m_A и m_B суть массы атомовъ, а r_{AB} — разстояніе между ними.

Кромѣ этихъ силъ, на атомы могутъ дѣйствовать еще и другія силы, исходящія изъ центровъ, лежащихъ внѣ разсматриваемаго тѣла.

При такихъ предположеніяхъ, теорія движенія и равновѣсія матерьяльнаго нетвердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы матерьяльныхъ точекъ, къ которымъ приложены данныя силы.

§ 146. Шесть такихъ дифференціальныхъ уравненій для каждой части тѣла, изъ которыхъ исключены величины всѣхъ внутреннихъ силъ этой части.

Представимъ себѣ всю систему матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ атомы даннаго матерьяльнаго тѣла.

Выдѣлимъ мысленно какую либо часть тѣла, какую угодно и которую угодно.

Всю совокупность атомовъ, заключающихся внутри выдѣленной части, будемъ обозначать знакомъ Jn, а всю совокупность атомовъ остальной части тѣла — знакомъ Ex.

Атомъ части Jn будемъ обозначать буквою m съ надлежащимъ значкомъ внизу и сбоку ея, а атомъ части Ex — буквою μ, тоже съ

надлежащимъ значкомъ (напримѣръ, m_1, m_2, m_3, ... m_i суть различные атомы части Jn, а μ_1, μ_2, ... μ_k — различные атомы части Ex); впрочемъ эти знаки должны обозначать преимущественно величины массъ тѣхъ же атомовъ.

Представимъ себѣ, что мы составили дифференціальныя уравненія движенія для каждаго изъ атомовъ части Jn; для того, чтобы условиться относительно обозначенія нѣкоторыхъ величинъ, входящихъ въ эти уравненія, мы выпишемъ здѣсь одно изъ нихъ, а именно первое дифференціальное уравненіе для атома m_i:

$$m_i x_i'' = m_i \sum_{Jn} m_j f_{ij}(r_{ij}) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} +$$

$$+ m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + X_i.$$

Вторая часть этого уравненія представлена въ видѣ трехъ членовъ; первый членъ выражаетъ сумму проэкцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i со стороны всѣхъ остальныхъ атомовъ части Jn, такъ что суммированіе, означенное въ этомъ членѣ, должно быть распространено на всѣ атомы этой части; второй членъ выражаетъ сумму проэкцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i со стороны всѣхъ атомовъ части Ex; наконецъ, третій членъ (X_i) выражаетъ сумму проэкцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i извнѣ разсматриваемаго тѣла.

Представимъ себѣ далѣе, что съ дифференціальными уравненіями движенія атомовъ части Jn мы поступимъ такъ, какъ показано въ §§ 85-мъ и 93-мъ; тогда получимъ шесть дифференціальныхъ уравненій для части Jn, три дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи ея и три дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ движенія всей этой части. Въ первыхъ трехъ уравненіяхъ взаимно сократятся проэкціи каждой пары равныхъ и противоположныхъ взаимнодѣйствій между атомами части Jn, а въ остальныхъ трехъ — равные и противоположные моменты каждой такой пары, такъ что *во всѣхъ шести уравненіяхъ не будетъ заключаться никакихъ внутреннихъ силъ* части Jn матерьяльнаго тѣла.

Эти шесть дифференціальныхъ уравненій будутъ таковы:

$$\sum_{Jn} m_i x_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} X_i \ldots (994, a)$$

$$\sum_{Jn} m_i y_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i - y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Y_i \ldots (994, b)$$

$$\sum_{Jn} m_i z_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i - z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Z_i \ldots (994, c)$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i y_k - y_i z_k)}{r_{ik}} +$$

$$+ \sum_{Jn} (y_i Z_i - z_i Y_i), \ldots\ldots\ldots (994, d)$$

$$\frac{d\lambda_y}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i z_k - z_i x_k)}{r_{ik}} +$$

$$+ \sum_{Jn} (z_i X_i - x_i Z_i), \ldots\ldots\ldots (994, e)$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i x_k - x_i y_i)}{r_{ik}} +$$

$$+ \sum_{Jn} (x_i Y_i - y_i X_i), \ldots\ldots\ldots (994, f)$$

гдѣ λ_x, λ_y и λ_z суть моменты количествъ движенія части Jn вокругъ осей $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$.

Такія шесть дифференціальныхъ уравненій должны имѣть мѣсто, какъ для всего матерьяльнаго тѣла, такъ и для всякой части его, большой или малой.

§ 147. Радіусъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Произведеніе $m_i \mu_k f_{ik}(r_{ik})$, заключающееся въ предыдущихъ формулахъ, выражаетъ положительно-взятую величину отталкивающей силы или отрицательно-взятую величину притягательной силы, дѣйствующей между атомами m_i и μ_k.

Видъ функціи $f_{ik}\,(r_{ik})$ въ точности неизвѣстенъ; но для объясненія большей части извѣстныхъ намъ явленій физическаго міра, а въ особенности тѣхъ, которыя разсматриваются въ физикѣ частичныхъ силъ, намъ приходится сдѣлать слѣдующее предположеніе относительно характера этой функціи.

Предположеніе F относительно радіуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Предполагается, что функція $f(r)$ состоитъ изъ суммы двухъ частей.

Первая часть есть Ньютонова сила тяготѣнія, обратно-пропорціональная квадрату разстоянія.

Вторая часть есть такая функція, которая имѣетъ замѣтную величину только при ничтожно-малыхъ разстояніяхъ между атомами, при разстояніяхъ же равныхъ или большихъ нѣкоторой весьма малой величины ρ, функція эта равна нулю.

Означивъ эту вторую функцію черезъ $\varphi(r)$, можемъ выразить приведенное предположеніе въ видѣ слѣдующей формулы:

$$m\mu f(r) = -\varepsilon \frac{m\mu}{r^2} + m\mu\varphi(r).$$

Сила $m\mu\varphi(r)$ извѣстна подъ именемъ *частичной силы,* а разстояніе ρ называется *радіусомъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.*

При такомъ предположеніи первые члены вторыхъ частей уравненій (994) раздѣлятся на двѣ части каждый; одна часть будетъ относиться къ частичнымъ силамъ, другая — къ силамъ тяготѣнія, дѣйствующимъ со стороны атомовъ μ на атомы m.

Обратимъ вниманіе на члены, зависящіе отъ частичныхъ силъ.

На основаніи вышеприведеннаго предположенія, эти члены будутъ заключать взаимнодѣйствія только между такими парами атомовъ μ и m, разстоянія между которыми не болѣе ρ (радіуса сферы дѣйствія); всѣ такіе атомы μ части тѣла Ex находятся въ слоѣ толщины ρ, прилежащемъ къ поверхности S, отдѣляющей эту часть отъ части Jn; всѣ же такіе атомы m части тѣла Jn находятся въ дру-

гомъ слоѣ такой же толщины, прилежащемъ къ той же поверхности S со стороны Jn; на чертежѣ 123-мъ изображены оба эти слоя, первый обозначенъ буквою β, второй — буквою α.

Такимъ образомъ оказывается, что частичныя силы, дѣйствующія со стороны части тѣла Ex на часть Jn, приложены къ атомамъ слоя α и исходятъ изъ атомовъ слоя β.

§ 148. Напряженіе (Stress).

Выдѣлимъ мысленно изъ поверхности S какой либо элементъ ΔS весьма малыхъ размѣровъ.

Представимъ себѣ всю совокупность тѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ атомамъ части слоя α, прилежащей къ элементу ΔS, направленія которыхъ пересѣкаютъ поверхность этого элемента.

Въ англійскомъ научномъ языкѣ существуетъ особый терминъ для наименованія этой совокупности силъ, а именно терминъ „Stress", который мы переведемъ на русскій языкъ словомъ „*напряженіе*"; но намъ необходимо условиться относительно правильнаго употребленія этого термина.

Вышесказанную совокупность силъ мы будемъ называть *напряженіемъ, дѣйствующимъ сквозь площадку ΔS на часть тѣла Jn со стороны части Ex*; вслѣдствіе равенства и противоположности взаимодѣйствій между атомами, *напряженіе, дѣйствующее сквозь ту же площадку на часть тѣла Ex со стороны части тѣла Jn*, будетъ совокупностью силъ, равныхъ и противоположныхъ силамъ предыдущей совокупности.

Пусть A есть какая либо точка поверхности S, находящаяся внутри площадки ΔS или на ея периметрѣ. Возстановимъ нормаль n изъ точки A къ поверхности S внаружу части Jn.

Составимъ сумму проэкцій на ось $X^{овъ}$ всѣхъ силъ первой совокупности и раздѣлимъ эту сумму на величину площади элемента ΔS; точно также поступимъ и съ суммами проэкцій этихъ силъ на двѣ другія оси; получимъ три отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta S},\ \frac{\Sigma Y}{\Delta S},\ \frac{\Sigma Z}{\Delta S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (995)$$

Величины этихъ отношеній могутъ измѣняться съ измѣненіемъ мѣста элемента на поверхности и съ измѣненіемъ размѣровъ его; при непрерывномъ уменьшеніи размѣровъ элемента, отношенія эти будутъ приближаться къ нѣкоторымъ предѣльнымъ значеніямъ, величины которыхъ могутъ зависѣть отъ того, къ какой точкѣ поверхности приближается постепенно съуживающаяся периферія элемента.

Предположимъ, что, при уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS, мы съуживаемъ его периферію такимъ образомъ, чтобы точка A всегда находилась внутри или на периферіи; пусть X_n, Y_n и Z_n суть предѣльныя значенія, къ которымъ отношенія (995) приближаются при такомъ уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} \text{предѣлъ}\left[\frac{\Sigma X}{\Delta S}\right]_{\Delta S=0} &= X_n, \\ \text{предѣлъ}\left[\frac{\Sigma Y}{\Delta S}\right]_{\Delta S=0} &= Y_n, \\ \text{предѣлъ}\left[\frac{\Sigma Z}{\Delta S}\right]_{\Delta S=0} &= Z_n. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (996)$$

Величину:

$$F_n = +\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \ldots\ldots\ldots (997)$$

мы будемъ называть *величиною напряженія, дѣйствующаго на часть Jn въ точкѣ A поверхности S*, а направленіе, проведенное изъ точки A и составляющее съ осями координатъ такіе углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{X_n}{F_n}, \quad \frac{Y_n}{F_n}, \quad \frac{Z_n}{F_n},$$

назовемъ *направленіемъ этого напряженія*.

Направленіе напряженія мы будемъ обозначать тѣмъ же знакомъ F_n, какимъ обозначаемъ величину его; поэтому можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} F_n\cos(F_n, X) &= X_n, \\ F_n\cos(F_n, Y) &= Y_n, \\ F_n\cos(F_n, Z) &= Z_n, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (998)$$

выражающія, что X_n, Y_n, Z_n суть проэкціи напряженія F_n на оси координатъ, или составляющія его по этимъ осямъ.

§ 149. Выраженія проэкцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла.

Если точка приложенія какой либо силы будетъ перенесена на какую либо длину вдоль по ея направленію, то черезъ это не измѣнится ни моментъ ея вокругъ какой нибудь оси, ни моментъ ея вокругъ какого либо центра.

Поэтому, при составленіи уравненій (994) мы вправѣ предположить, что точка приложенія каждой частичной силы, дѣйствующей изъ атома μ части *Ex* на атомъ m части *Jn*, перенесена изъ m, вдоль по направленію $m\mu$, въ точку пересѣченія длины $m\mu$ съ поверхностью S; черезъ это величины проэкцій главнаго вектора и главнаго момента частичныхъ силъ не измѣнятся, но измѣнится видъ выраженій этихъ величинъ, такъ какъ мѣстомъ приложенія частичныхъ силъ будетъ теперь считаться не слой α, а поверхность S.

Для того, чтобы составить новыя выраженія соотвѣтственныхъ членовъ уравненій (994), надо прежде всего представить себѣ, что вся поверхность S раздроблена на безчисленное множество элементовъ безконечно-малыхъ размѣровъ, затѣмъ надо составить выраженія проэкцій на оси координатъ вектора и момента напряженій, приложенныхъ къ каждому элементу; эти выраженія будутъ заключать величины X_n, Y_n, Z_n. Составивъ надлежащія выраженія, останется только взять интегралы по всей поверхности.

Величины X_n, Y_n, Z_n, т. е. проэкціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ поверхности S, суть функціи координатъ точекъ поверхности, но функціи не сплошныя; онѣ могли бы быть сплошными, если бы вещество было сплошнымъ въ дѣйствительности, а не состояло бы изъ атомовъ, раздѣленныхъ промежутками, и если бы частичныя силы дѣйствовали между всѣми точками слоя β и всѣми точками слоя α, а не между изолированными точками-атомами этихъ слоевъ.

Однако во всѣхъ расчетахъ математической физики эти функціи предполагаются сплошными; на это предположеніе считаемъ нужнымъ обратить вниманіе.

Предположеніе G относительно сплошности функцій, выражающихъ проэкціи напряженія на оси координатъ.

Проэкціи X_n, Y_n, Z_n напряженій, дѣйствующихъ въ точкахъ поверхности S, предполагаются сплошными функціями координатъ.

При такомъ предположеніи, напряженія F_n въ двухъ безконечно-близкихъ точкахъ поверхности разнятся безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію; если бы они были вполнѣ одинаковы во всѣхъ точкахъ элемента dS, то проэкціи на оси координатъ вектора всѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ этому элементу, были бы равны:

$$X_n dS,\ Y_n dS,\ Z_n dS,$$

а проэкціи момента всѣхъ этихъ силъ были бы равны:

$$(y_s Z_n - z_s Y_n)\, dS,\ (z_s X_n - x_s Z_n)\, dS,\ (x_s Y_n - y_s X_n)\, dS,$$

гдѣ x_s, y_s, z_s суть координаты центра инерціи площади элемента dS.

Вообще же, на основаніи предыдущаго предположенія G, проэкціи на оси координатъ главнаго вектора напряженій, приложенныхъ къ точкамъ всей поверхности S, выразятся слѣдующими интегралами, взятыми по всей поверхности:

$$\iint X_n dS,\quad \iint Y_n dS,\quad \iint Z_n dS, \ldots\ldots\ldots (999)$$

а проэкціи главнаго момента тѣхъ же напряженій выразятся интегралами:

$$\left.\begin{array}{c}\iint(y_s Z_n - z_s Y_n)\,dS, \quad \iint(z_s X_n - x_s Z_n)\,dS, \\ \iint(x_s Y_n - y_s X_n)\,dS,\end{array}\right\} \ldots \textbf{(1000)}$$

гдѣ x_s, y_s, z_s суть координаты какой либо точки элемента, а X_n, Y_n, Z_n — проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на часть тѣла Jn.

§ 150. Измѣренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

Всякія силы, приложенныя сплошнымъ образомъ къ какой либо поверхности, разсчитываются такъ сказать на единицу поверхности, а именно, для каждой точки поверхности вычисляется не величина силы, но величина нѣкотораго отношенія силы къ площади.

Разсчетъ производится такимъ же образомъ, какъ показано въ § 148 относительно опредѣленія величины и направленія напряженія F_n, дѣйствующаго въ какой либо точкѣ поверхности съ той стороны, куда возстановлена положительное направленіе нормали n, на часть тѣла Jn.

Изъ формулъ (996), (997) и (998) видно, что величина напряженія F_n имѣетъ измѣренія отношенія силы къ площади, такъ что:

$$\text{единица напряженія } F_n = \frac{\text{единицѣ силы}}{(\text{единиц. длины})^2} \ldots \textbf{(1001)}$$

Чтобы составить себѣ понятіе о значеніи этой единицы, представимъ себѣ такой случай, что часть поверхности S имѣетъ видъ плоскости, что напряженія, дѣйствующія во всѣхъ точкахъ этой части поверхности, равны и параллельны между собою и что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ площади этой части поверхности, равенъ единицѣ силы; тогда величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой части поверхности, будетъ равна единицѣ напряженій.

Если же главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ вышесказанной части поверхности, равенъ k единицамъ силы, а всѣ прочія обстоятельства будутъ тѣ же, то величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой поверхности, будетъ равна k единицамъ напряженій.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность S не плоская и напряженія въ точкахъ ея хотя и неодинаковы, но слѣдуютъ условію сплошности, знаніе величины и направленія напряженія F_n, дѣйствующаго въ какой либо точкѣ A этой поверхности, даетъ намъ возможность утверждать, что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ безконечно-малому элементу dS, заключающему въ себѣ точку A, имѣетъ величину, отличающуюся отъ $F_n dS$ безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ.

Всякое напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ поверхности, можетъ быть разложено на двѣ составляющія: одну по направленію нормали n, другую — въ касательной плоскости къ поверхности; первая составляющая называется *натяженіемъ*, если она направлена по положительной части нормали, и *давленіемъ* въ противоположномъ случаѣ; составляющая напряженія въ касательной плоскости называется *тангенціальнымъ напряженіемъ*.

Когда извѣстны X_n, Y_n, Z_n, то составляющая напряженія по нормали n выразится такъ:

$$F_n \cos(F_n, n) = X_n \cos(n, X) + Y_n \cos(n, Y) + Z_n \cos(n, Z); \quad (1002)$$

это есть натяженіе, если направленіе F_n составляетъ острый уголъ съ положительнымъ направленіемъ нормали n; если же уголъ (F_n, n) тупой, то формула (1002) выражаетъ отрицательно-взятую величину давленія.

Надо имѣть въ виду, что къ наружной поверхности тѣла могутъ быть приложены *внѣшнія* давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

§ 151. Силы, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго тѣла.

Силы, приложенныя ко всѣмъ атомамъ тѣла и дѣйствующія извнѣ его, а также силы тяготѣнія, дѣйствующія между атомами его, мы будемъ называть *силами, приложенными къ элементамъ объема тѣла* или проще *объемными силами.*

Эти силы, приложенныя къ атомамъ сплошнаго тѣла, вводятся въ разсчетъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ какую либо точку A тѣла и мысленно выдѣлимъ малый объемъ ΔO его, заключающій точку A внутри себя или на своей поверхности. Составимъ величины проэкцій на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ ко всѣмъ атомамъ этого объема и раздѣлимъ эти величины на массу Δm объема ΔO; получатся отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta m}, \quad \frac{\Sigma Y}{\Delta m}, \quad \frac{\Sigma Z}{\Delta m},$$

величины которыхъ могутъ зависѣть отъ величины и вида выдѣленнаго объема ΔO тѣла. Представимъ себѣ, что мы выдѣляемъ все меньшіе и меньшіе объемы ΔO, заключающіе въ себѣ точку A; по мѣрѣ приближенія величины объема къ нулю, величины вышесказанныхъ отношеній приближаются къ нѣкоторымъ предѣламъ, которые мы означимъ такъ: $\mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{Y}_A$, $\mathfrak{Z}_A$; слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma X}{\Delta m}\right]_{\Delta O = 0} \\ \mathfrak{Y}_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma Y}{\Delta m}\right]_{\Delta O = 0} \\ \mathfrak{Z}_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma Z}{\Delta m}\right]_{\Delta O = 0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(1003)}$$

Величину:

$$\mathfrak{F}_A = +\sqrt{\mathfrak{X}_A^2 + \mathfrak{Y}_A^2 + \mathfrak{Z}_A^2} \ldots\ldots\ldots \textbf{(1004)}$$

мы будемъ называть *величиною объемной силы въ точкѣ* A. Направленіе $\mathfrak{F}_A$, опредѣляемое косинусами:

$$\cos(\mathfrak{F}_A, X) = \frac{\mathfrak{X}_A}{\mathfrak{F}_A},\ \cos(\mathfrak{F}_A, Y) = \frac{\mathfrak{Y}_A}{\mathfrak{F}_A},\ \cos(\mathfrak{F}_A, Z) = \frac{\mathfrak{Z}_A}{\mathfrak{F}_A}, \quad \text{(1005)}$$

мы условимся называть *направленіемъ* этой силы; тогда предѣлы (1003) получатъ значенія проэкцій этой силы на оси координатъ, или составляющихъ ея по этимъ осямъ.

$\mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{Y}_A$, $\mathfrak{Z}_A$ суть функціи координатъ точки A и притомъ функціи не сплошныя, такъ какъ къ промежуткамъ между атомами силъ не приложено; но мы будемъ предполагать, что эти функціи неразрывны внутри всего объема занимаемаго тѣломъ, которое мы будемъ при этомъ считать сплошнымъ; такое предположеніе аналогично предположенію G, сдѣланному относительно силъ поверхностныхъ.

Предположеніе H относительно сплошности объемныхъ силъ.

Проэкціи $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ объемной силы, дѣйствующей въ точкахъ сплошнаго тѣла, предполагаются сплошными функціями координатъ этихъ точекъ.

При такомъ предположеніи объемныя силы $\mathfrak{F}$ въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла разнятся между собою безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Величина $\mathfrak{F}$ имѣетъ измѣренія ускоренія, такъ какъ она равняется отношенію силы къ массѣ.

$$\text{Единица величинъ } \mathfrak{F} = \frac{\text{единиц. силы}}{\text{единиц. массы}} \ldots\ldots \text{(1006)}$$

Слѣдовательно, можно сказать, что величины и направленія $\mathfrak{F}$ представляютъ собою величины и направленія тѣхъ ускореній, которыя приняли бы точки свободнаго тѣла при дѣйствіи объемныхъ силъ, если бы не существовало ни частичныхъ силъ, ни внѣшнихъ напряженій.

Если бы величины и направленія $\mathfrak{F}$ были одинаковы во всѣхъ точкахъ тѣла, то объемныя силы были бы приложены къ нему однородно и тогда величины проэкцій силы, приложенной ко всему тѣлу,

равнялись бы произведеніямъ $\mathfrak{X}M$, $\mathfrak{Y}M$, $\mathfrak{Z}M$, гдѣ M есть масса тѣла.

Такіе случаи однороднаго распредѣленія объемныхъ силъ встрѣчаются сравнительно рѣдко, большею частью величины и направленія $\mathfrak{F}$ неодинаковы даже въ малыхъ частяхъ тѣла.

Однако, по предполагаемой нами сплошности объемныхъ силъ, въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла величины и направленія $\mathfrak{F}$ разнятся между собою безконечно-мало; слѣдовательно, чѣмъ менѣе размѣры какого либо весьма малаго элемента тѣла, тѣмъ менѣе разнятся между собою ускоренія $\mathfrak{F}$ различныхъ точекъ его и тѣмъ распредѣленіе приложенной къ нему объемной силы однороднѣе.

По этимъ причинамъ проэкціи на оси координатъ объемной силы, приложенной къ безконечно-малому объемному элементу dO, выразятся такъ:

$$\mathfrak{X}\sigma dO + \alpha_1,\ \mathfrak{Y}\sigma dO + \alpha_2,\ \mathfrak{Z}\sigma dO + \alpha_3,$$

а проэкціи на оси координатъ момента этой силы—такъ:

$$(y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y})\,\sigma dO + \alpha_4,\ (z\mathfrak{X} - x\mathfrak{Z})\,\sigma dO + \alpha_5,$$

$$(x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X})\,\sigma dO + \alpha_6,$$

гдѣ x, y, z суть координаты какой либо точки внутри или на поверхности элемента dO, σ — плотность матеріи въ той же точкѣ, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ — проэкціи на оси координатъ объемной силы въ той же точкѣ, α_1, α_2, ... α_6 — безконечно-малыя величины четвертаго или высшаго порядка малости.

§ 152. Новый видъ уравненій (994).

На основаніи всего того, что сказано въ §§ 147—151, уравненіямъ (994) можно дать слѣдующій видъ:

$$\iiint\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma dO = \iint X_n\, dS, \ldots (994, \mathrm{a}, \mathrm{bis})$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} - \iiint (y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y})\,\sigma dO = \iint (y_s Z_n - z_s Y_n)\,dS, \quad \textbf{(994, d, bis)}$$

$$\lambda_x = \iiint \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \right) \sigma dO;$$

интегрированія распространены по объему и по поверхности части Jn.

Здѣсь выписаны только два уравненія, первое и четвертое, легко по нимъ написать и четыре остальныя.

Такія уравненія должны имѣть мѣсто, какъ для всего тѣла, такъ и для каждой части его, большой или малой.

§ 153. Примѣненіе предыдущихъ уравненій къ элементарному параллелопипеду сплошнаго тѣла.

Подъ элементарнымъ параллелопипедомъ подразумѣвается элементъ объема, ограниченный безконечно-близкими плоскостями прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ.

Возьмемъ какой либо элементъ объема тѣла, ограниченный тремя парами плоскостей, перпендикулярныхъ къ осямъ координатъ: плоскости первой пары перпендикулярны къ оси $X^{\text{овъ}}$ и пересѣкаютъ ее въ разстояніяхъ $\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ отъ начала координатъ, плоскости второй пары перпендикулярны къ оси $Y^{\text{овъ}}$ и пересѣкаютъ ее въ разстояніяхъ $\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)$ и $\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)$ отъ начала, наконецъ, плоскости третьей пары перпендикулярны къ оси $Z^{\text{овъ}}$ и пересѣкаютъ ее въ разстояніяхъ $\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right)$ и $\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)$ отъ начала. На чертежѣ **124**-мъ изображенъ параллелопипедъ, ограниченный этими плоскостями; точка $M(x, y, z)$ есть центръ параллелопипеда, точки $A\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$, $A_1\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$, $B\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right)$, $B_1\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)$, $C\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right)$, $C_1\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)$ суть центры его граней.

Сначала допустимъ, что длины Δx, Δy, Δz весьма малы. Составимъ уравненія (**994**, bis) для этого параллелопипеда и раздѣлимъ обѣ части каждаго уравненія на величину объема параллелопипеда,

т. е. на $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$; затѣмъ предположимъ, что Δx, Δy, Δz приближаются къ нулю и посмотримъ, во что обратятся составленныя нами уравненія въ предѣлѣ, т. е. при обращеніи Δx, Δy, Δz въ нуль.

При составленіи уравненій мы уже будемъ имѣть въ виду, что потомъ сдѣлаемъ переходъ къ предѣлу; поэтому, составляя первое изъ уравненій (994, bis), поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Первую часть уравненія (994, a, bis), примѣненнаго ко взятому объему, мы напишемъ такъ:

$$\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma + \varepsilon\right]\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

гдѣ x есть координата точки M, σ — плотность матеріи тѣла въ этой точкѣ, $\mathfrak{X}$ — проэкція на ось $X^{овъ}$ объемной силы въ этой точкѣ, а ε — малая величина, которая, при приближеніи къ предѣлу, обращается въ безконечно-малую величину.

Вторая часть уравненія должна быть суммою проэкцій на ось $X^{овъ}$ напряженій, приложенныхъ къ поверхности параллелопипеда и дѣйствующихъ съ внѣшней стороны этой поверхности.

Поверхность параллелопипеда состоитъ: 1) изъ грани $a\,c_1\,d_1\,b_1$ (см. черт. 124-й), наружная нормаль которой направлена параллельно положительной оси $X^{овъ}$, 2) изъ грани $a_1\,c\,d\,b$, наружная нормаль которой направлена параллельно отрицательной оси $X^{овъ}$, 3) изъ грани $b\,a_1\,d_1\,c_1$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе положительной оси $Y^{овъ}$), 4) изъ грани $d\,c\,b_1\,a$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе отрицательной оси $Y^{овъ}$), 5) изъ грани $c b_1\,d_1\,a_1$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе положительной оси $Z^{овъ}$) и 6) изъ грани $d\,a\,c_1\,b$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе отрицательной оси $Z^{овъ}$).

Проведемъ черезъ точку M три плоскости, перпендикулярныя къ осямъ координатъ; означимъ черезъ X_x, Y_x, Z_x проэкціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M со стороны той части тѣла, которая находится по правую сторону плоскости BCB_1C_1 (черт. 124), на часть тѣла, находящуюся по лѣвую сторону ея; означимъ еще черезъ X_y, Y_y, Z_y проэкціи напряженія, дѣйствующаго

въ точкѣ M на часть тѣла, находящуюся сзади плоскости CAC_1A_1 (черт. 124); наконецъ, означимъ черезъ X_z, Y_z, Z_z проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ той же точкѣ M на часть тѣла, находящуюся ниже плоскости ABA_1B_1.

Возьмемъ другую точку M_1 тѣла, имѣющую координаты x_1, y_1, z_1, проведемъ черезъ нее плоскость, параллельную плоскости BCB_1C_1, и составимъ выраженіе величины проэкціи на ось $X^{овъ}$ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M_1 на ту часть тѣла, которая находится по лѣвую сторону проведенной плоскости; такъ какъ, по предположенію G, проэкціи напряженія суть сплошныя функціи координатъ, то искомую величину можно выразить въ видѣ ряда:

$$(X_x)_1 = \Big[X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial X_x}{\partial y}(y_1 - y) + \\ + \frac{\partial X_x}{\partial z}(z_1 - z) + \ldots\Big], \ldots \ldots \mathbf{(1007)}$$

расположеннаго по возростающимъ степенямъ разностей $(x_1 - x)$, $(y_1 - y)$, $(z_1 - z)$ и ихъ произведеній.

Примѣнимъ это выраженіе къ какой либо точкѣ грани $a\,c_1\,d_1\,b_1$; здѣсь $(x_1 - x) = \frac{\Delta x}{2}$ и наружная нормаль n тоже параллельна положительной оси $X^{овъ}$. Составимъ интегралъ отъ $(X_x)_1\,dy_1\,dz_1$ по всей площади этой грани, т. е. въ предѣлахъ:

$$\text{отъ } y_1 = y - \frac{\Delta y}{2} \quad \text{до } y_1 = y + \frac{\Delta y}{2}$$

$$\text{и отъ } z_1 = z - \frac{\Delta z}{2} \quad \text{до } z_1 = z + \frac{\Delta z}{2},$$

тогда мы получимъ слѣдующее выраженіе суммы проэкцій на оси $X^{овъ}$ напряженій, дѣйствующихъ на тѣ части параллелопипеда, которыя прилегаютъ къ грани $a\,c_1\,d_1\,b_1$:

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \varepsilon_1\right)\Delta y\,\Delta z,$$

гдѣ ε_1 заключаетъ вторыя и высшія степени и произведенія величинъ Δx, Δy, Δz, такъ что, при приближеніи этихъ величинъ къ нулю, ε_1

становится безконечно-малою величиною *втораго* порядка, *но отнюдь не перваго.*

Если въ выраженіи (1007) сдѣлаемъ $(x_1 - x)$ равнымъ минусъ половинѣ Δx и произведемъ интегрированіе въ тѣхъ же предѣлахъ, то получимъ проэкцію на ось $X^{\text{овъ}}$ напряженій, приложенныхъ къ грани a_1cdb и дѣйствующихъ со стороны тѣхъ частей тѣла, которыя прилежатъ къ грани съ правой стороны ея, на части тѣла находящіяся по лѣвую ея сторону; намъ же нужно имѣть выраженіе суммы проэкцій на ось $X^{\text{овъ}}$ противоположныхъ напряженій, дѣйствующихъ на тѣ части параллелопипеда, которыя прилегаютъ къ грани a_1cdb и, стало быть, находятся по правую сторону ея; это сумма проэкцій выразится такъ:

$$-\left(X_x - \frac{\partial X_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \varepsilon_2\right)\Delta y\,\Delta z,$$

гдѣ ε_2 есть величина того же порядка малости, какъ и ε_1.

Слѣдовательно, сумма проэкцій на ось $X^{\text{овъ}}$ напряженій, приложенныхъ къ гранямъ $(ac_1d_1b_1)$ и (a_1cdb) параллелопипеда, выразится такъ:

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta x}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Подобнымъ же образомъ составимъ суммы проэкцій на ось $X^{\text{овъ}}$ напряженій, приложенныхъ къ остальнымъ четыремъ гранямъ параллелопипеда.

Составивъ уравненіе, раздѣливъ обѣ части его на $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, переходя къ предѣламъ (т. е. полагая что Δx, Δy, Δz приближаются къ нулю) и имѣя въ виду, что тогда ε и прочіе добавочные члены обращаются въ безконечно-малыя величины перваго порядка, мы получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе для точки M:

$$\sigma\frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{X}\sigma + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \ldots\ldots\ldots \textbf{(1008, a)}$$

Подобнымъ же образомъ, изъ уравненій (994, b, bis) и (994,

c, bis), примѣненныхъ къ элементарному параллелопипеду, выведемъ два другія дифференціальныя уравненія для той же точки:

$$\sigma \frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{Y}\sigma + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \ldots\ldots\ldots (1008, \mathfrak{b})$$

$$\sigma \frac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{Z}\sigma + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \ldots\ldots\ldots (1008, \mathfrak{c})$$

Подъ точкою M здѣсь подразумѣвается всякая такая точка сплошнаго тѣла, которая можетъ быть центромъ безконечно-малаго элементарнаго параллелопипеда, вполнѣ заполненнаго матеріею тѣла; слѣдовательно, *для всякой точки тѣла, хотя бы даже находящейся безконечно близко къ его наружной поверхности, должны быть удовлетворены уравненія вида* (1008, a, b, c), заключающія:

проэкціи на оси координатъ ускоренія этой точки,
проэкціи на тѣ же оси объемныхъ силъ въ этой точкѣ
и производныя (по координатамъ) отъ проэкцій напряженій, дѣйствующихъ въ этой точкѣ на площадки, перпендикулярныя къ осямъ кординатъ.

Примѣнимъ теперь остальныя три уравненія (994, d, e, f) къ тому же элементарному параллелопипеду.

Первую часть уравненія 994, d) напишемъ такъ:

$$\left[\left(y\left(\frac{d^2z}{dt^2} - \mathfrak{Z}\right) - z\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \mathfrak{Y}\right)\right)\sigma + \varkappa\right]\Delta x \Delta y \Delta z,$$

гдѣ $\varkappa$ есть малая величина, которая, при приближеніи къ предѣлу, обращается въ безконечно-малую величину.

При вычисленіи моментовъ напряженій мы примемъ во вниманіе, что, напримѣръ:

$$y_1(Z_x)_1 - z_1(Y_x)_1 = (y_1 - y)(Z_x)_1 - (z_1 - z)(Y_x)_1 +$$
$$+ y(Z_x)_1 - z(Y_x)_1.$$

Подставивъ вмѣсто $(Z_x)_1$, $(Y_x)_1$, ... выраженія вида (1007), интегрируя по площадямъ граней и составивъ сумму подобныхъ мо-

ментовъ для всѣхъ шести граней параллелопипеда, получимъ вторую часть уравненія (994, d) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left[Z_y - Y_z + y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - \right.$$

$$\left. - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) + \varkappa_1\right] \Delta x \Delta y \Delta z,$$

гдѣ $\varkappa_1$ есть величина, которая, при приближеніи къ предѣлу, становится безконечно-малою.

Раздѣливъ обѣ части составленнаго равенства на $\Delta x \Delta y \Delta z$, принявъ во вниманіе полученныя уже прежде равенства (1008, b), (1008, c) и перейдя къ предѣламъ, найдемъ, что равенство (994, d) получитъ слѣдующій видъ:

$$Z_y = Y_z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1008, d)}$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$X_z = Z_x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1008, e)}$$

$$Y_x = X_y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1008, f)}$$

изъ равенствъ (994, e, f).

Надо принять во вниманіе, что направленія осей $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$ могутъ быть измѣнены относительно тѣла, такъ что за эти оси можно принять три какія либо взаимно ортогональныя направленія; имѣя въ виду это замѣчаніе, мы можемъ изъ предыдущихъ уравненій (1008, d, e, f) вывести слѣдующее заключеніе.

Напряженія F_n и F_k, дѣйствующія въ точкѣ M сплошнаго тѣла на двѣ взаимно-ортогональныя площадки, находятся между собою въ такой зависимости, что:

$$F_n \cos(F_n, k) = F_k \cos(F_k, n), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1009)}$$

гдѣ n и k означаютъ взаимно-ортогональныя направленія нормалей обѣихъ площадокъ.

§ 154. Примѣненіе уравненій (994) къ элементарному тетраэдру.

Элементарный тетраэдръ есть элементъ объема, ограниченный четырьмя гранями; три грани параллельны плоскостямъ координатъ, четвертая наклонена къ нимъ.

Пусть Δx, Δy, Δz суть длины взаимно-перпендикулярныхъ реберъ одного изъ подобныхъ тетраэдровъ, x, y, z — координаты точки M пересѣченія этихъ реберъ, λ, μ, ν — косинусы угловъ, составляемыхъ внѣшнею нормалью n основанія ABC (черт. 125) тетраэдра съ осями координатъ.

Пусть K означаетъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ M на грань ABC; длину $\overline{MK}$ можно выразить троякимъ образомъ:

$$h = \overline{MK} = \lambda\Delta x = \mu\Delta y = \nu\Delta z;$$

точно также троякимъ образомъ можно выразить каждую изъ координатъ точки K и величину ω площади ABC, а именно:

$$x_K = \lambda^2\Delta x = \lambda\mu\Delta y = \lambda\nu\Delta z,$$

$$y_K = \mu\lambda\Delta x = \mu^2\Delta y = \mu\nu\Delta z,$$

$$z_K = \nu\lambda\Delta x = \nu\mu\Delta y = \nu^2\Delta z,$$

$$\omega = \frac{\Delta y\,\Delta z}{2\lambda} = \frac{\Delta z\,\Delta x}{2\mu} = \frac{\Delta x\,\Delta y}{2\nu}.$$

Величина объема тетраэдра можетъ быть выражена одною шестою частью произведенія $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$.

Означимъ черезъ F_n напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ M на площадку, параллельную плоскости ABC и имѣющую внѣшнею нормалью направленіе n; X_n, Y_n, Z_n будутъ означать проэкціи этого напряженія на оси координатъ.

X_x, Y_y, Z_z, X_y, ... пусть будутъ проэкціи напряженій, дѣйствующихъ въ точкѣ M на площадки параллельныя плоскостямъ координатъ.

Первая часть уравненія (994, a, bis), примѣненнаго къ этому тетраэдру, можетъ быть написана такъ:

$$\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X}\right)\sigma + \alpha\right]\frac{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z}{6},$$

гдѣ α есть величина, дѣлающаяся безконечно-малою при приближеніи длинъ Δx, Δy, Δz къ нулю.

Составляя вторую часть этого уравненія подобнымъ же образомъ, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, получимъ слѣдующій результатъ:

$$(X_n + \alpha_1)\,\omega - (X_x + \alpha_2)\frac{\Delta y\, \Delta z}{2} - (X_y + \alpha_3)\frac{\Delta z\, \Delta x}{2} -$$

$$- (X_z + \alpha_4)\frac{\Delta x\, \Delta y}{2},$$

гдѣ α_1, α_2, α_3, α_4 суть величины того же рода, какъ α.

Написавъ равенство, раздѣливъ обѣ части его на ω и предположивъ, что Δx, Δy, Δz приближаются къ нулю, получимъ слѣдующее равенство:

$$X_n = X_x\lambda + X_y\mu + X_z\nu \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1010,a)}$$

Примѣнивъ къ тетраэдру подобнымъ же образомъ равенства (994, b, bis) и (994, c, bis), получимъ еще два равенства:

$$Y_n = Y_x\lambda + Y_y\mu + Y_z\nu, \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1010,b)}$$

$$Z_n = Z_x\lambda + Z_y\mu + Z_z\nu \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1010,c)}$$

Примѣнивъ къ тетраэдру равенства (994, d, e, f), получимъ такія равенства, которыя обращаются въ тождества на основаніи уравненій (1010).

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что *если будемъ знать значенія шести величинъ*:

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ Z_x,\ X_y$$

для какой либо точки сплошнаго тѣла, то, при помощи формулъ (1010), будемъ имѣть возможность опредѣлить величину

и направленіе напряженія F_n, дѣйствующаго въ той же точкѣ (и отнесеннаго къ единицѣ площади) на площадку, произвольно оріентированную, т. е. имѣющую нормалью произвольное направленіе.

Кромѣ того, мы имѣемъ теперь возможность обобщить теорему, приведенную въ концѣ предыдущаго параграфа.

Проведемъ черезъ ту же точку тѣла другую площадку и означимъ черезъ λ_1, μ_1, ν_1 косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ k ея внѣшней нормали; при помощи формулъ (1008) и 1010) мы найдемъ, что:

$$F_n \cos(F_n, k) = X_x \lambda\lambda_1 + Y_y \mu\mu_1 + Z_z \nu\nu_1 + Y_z(\mu\nu_1 + \nu\mu_1) + \\ + Z_x(\nu\lambda_1 + \lambda\nu_1) + X_y(\lambda\mu_1 + \mu\lambda_1) = F_k \cos(F_k, n),$$

т. е., что *равенство (1009) справедливо для всякихъ двухъ площадокъ, проведенныхъ черезъ одну и ту же точку сплошнаго тѣла, хотя бы онѣ и не были взаимно-ортогональны.*

Когда мы раздѣляемъ сплошное тѣло на безконечно-малые элементы объема плоскостями параллельными координатнымъ плоскостямъ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ и если притомъ наружная поверхность тѣла не имѣетъ остроконечій, то мы можемъ всегда провести дѣлящія плоскости такимъ образомъ, что весь объемъ тѣла будетъ раздѣленъ на элементарные параллелопипеды и на безконечно-малые элементарные тетраэдры; послѣдніе будутъ находиться у поверхности тѣла, такъ что основанія ихъ будутъ элементами его поверхности. Къ каждому такому элементарному тетраэдру мы можемъ примѣнить предыдущія разсужденія, а, слѣдовательно, и формулы (1010), подразумѣвая подъ n направленіе наружной нормали возстановленной изъ точки поверхности тѣла.

Слѣдовательно, *формулы (1010) могутъ быть примѣнены также и къ точкамъ наружной поверхности тѣла, причемъ подъ (n) должно подразумѣвать направленіе наружной нормали, возстановленной къ наружной поверхности изъ разсматриваемой точки, а подъ X_n, Y_n, Z_n — проэкціи на оси координатъ внѣшняго напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на поверхность тѣла.*

§ 155. Сплошное тѣло, имѣющее видъ весьма тонкой нити или проволоки. Линейная плотность. Разсчетъ силъ на единицу длины оси нити.

Подъ именемъ тонкой нити или проволоки подразумѣвается такое сплошное тѣло, наружная поверхность котораго можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ.

Вообразимъ себѣ отрѣзокъ кривой линіи какого бы то ни было вида; пусть A и B суть концы этого отрѣзка. Положеніе точки M, находящейся на этой кривой, будемъ выражать разстояніемъ s, считаемымъ отъ точки A вдоль по кривой линіи до точки M; разстоянія, отсчитываемыя въ направленіи отъ A къ B, будемъ выражать положительными величинами.

Возьмемъ какую либо плоскую площадку неизмѣняемаго вида и положимъ, что эта площадка движется такъ, что нѣкоторая точка $\mathfrak{M}$ ея всегда остается на вышесказанной кривой, нѣкоторая линія $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ея совпадаетъ съ главною нормалью кривой, а плоскость площадки совпадаетъ съ нормальною плоскостью кривой. Поверхность, образуемая слѣдомъ периметра этой площадки при движеніи точки $\mathfrak{M}$ вдоль всей кривой, представляетъ *боковую поверхность правильной нити или проволоки, поперечное сѣченіе которой одинаково по всей длинѣ*; на концахъ нить или проволока ограничена плоскостями нормальными къ кривой.

Мы всегда будемъ предполагать, что *точкою $\mathfrak{M}$ служитъ центръ инерціи площадки, вычерчивающей боковую поверхность проволоки или нити*; направляющую кривую, образуемую центрами инерціи всѣхъ сѣченій нити или проволоки, мы будемъ называть *осью этой нити или проволоки.*

При томъ же видѣ оси проволоки и при томъ же видѣ образующей площадки, мы можемъ получить безчисленное множество другихъ формъ боковыхъ поверхностей; стоитъ только перемѣщать образующую площадку такимъ образомъ, чтобы линія $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ не совпадала съ главными нормалями кривой, а составляла бы съ ними уголъ, измѣняющійся по тому или другому закону. Такія проволоки или нити мы условимся называть *неправильными проволоками съ поперечнымъ*

сѣченіемъ одинаковаго вида и размѣра по всей длинѣ проволки.

Наконецъ, если видъ и размѣры образующей площадки измѣняются по какому либо закону сплошнымъ образомъ, то образуется боковая поверхность *проволки или нити съ поперечнымъ сѣченіемъ неодинаковаго вида по длинѣ проволки.*

Мы имѣемъ въ виду составить дифференціальныя уравненія движенія какой либо нити, предполагая, что всѣ поперечныя сѣченія ея имѣютъ ничтожно-малые размѣры.

При ничтожной малости поперечныхъ сѣченій нити можно сдѣлать такъ, что уравненія движенія или равновѣсія нити не будутъ заключать явнымъ образомъ величины площади поперечнаго сѣченія нити; для этого надо ввести два новыя понятія: понятіе о линейной плотности въ разныхъ точкахъ оси нити и понятіе о разсчетѣ силъ на единицу длины этой оси.

Черезъ какую либо точку M оси нити проведемъ поперечное сѣченіе ея; означимъ черезъ m массу той части ея, которая простирается отъ конца A до проведеннаго поперечнаго сѣченія.

Очевидно, m будетъ сплошною функціею отъ длины s, выражающей положеніе точки M. *Линейною плотностью нити* въ точкѣ M называется величина производной:

$$\varkappa = \frac{dm}{ds} \quad \text{.................} \quad (1011)$$

Понятно, что $\varkappa$ есть функція отъ s, имѣющая положительныя значенія во всѣхъ точкахъ оси нити.

Если знаемъ функцію, выражающую $\varkappa$, возьмемъ значеніе ея въ какой либо точкѣ M оси нити и помножимъ это значеніе на ds, то получимъ безконечно-малую величину $\varkappa ds$, выражающую величину массы безконечно-малаго элемента нити, заключающагося между сѣченіемъ, проведеннымъ черезъ точку M и другимъ безконечно-близкимъ сѣченіемъ, отстоящимъ отъ A на длину $s + ds$ по оси нити.

Примѣчаніе. Если распредѣленіе вещества нити измѣняется съ теченіемъ времени, то $\varkappa$ будетъ не только функціею отъ s, но и еще функціею отъ t.

Составимъ главный векторъ всѣхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ части нити, простирающейся отъ конца A до поперечнаго сѣченія въ точкѣ M, и всѣхъ внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ боковой поверхности этой части нити; означимъ черезъ $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ проэкціи этого главнаго вектора на оси координатъ.

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ суть функціи отъ длины s, выражающей положеніе точки M на оси нити; кромѣ того, онѣ же суть функціи параметровъ той кривой линіи, которую образуетъ ось нити.

Производныя отъ этихъ функцій по s:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s} = \mathfrak{X}_s, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s} = \mathfrak{Y}_s, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial s} = \mathfrak{Z}_s \ldots\ldots \text{(1012)}$$

мы будемъ называть *проэкціями* на оси координатъ *силы, дѣйствующей въ точкѣ M оси нити*; величина этой силы выражается положительно-взятымъ корнемъ:

$$\mathfrak{F}_s = +\sqrt{\mathfrak{X}_s^2 + \mathfrak{Y}_s^2 + \mathfrak{Z}_s^2}, \ldots\ldots\ldots \text{(1013)}$$

а направленіе ея опредѣляется отношеніями:

$$\frac{\mathfrak{X}_s}{\mathfrak{F}_s} = \cos(\mathfrak{F}_s, X), \; \frac{\mathfrak{Y}_s}{\mathfrak{F}_s} = \cos(\mathfrak{F}_s, Y), \; \frac{\mathfrak{Z}_s}{\mathfrak{F}_s} = \cos(\mathfrak{F}_s, Z), \ldots \text{(1014)}$$

выражающими величины косинусовъ угловъ, составляемыхъ этимъ направленіемъ съ осями координатъ.

$\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{Y}_s$, $\mathfrak{Z}_s$ суть функціи отъ s и отъ параметровъ оси нити; величины ихъ имѣютъ измѣренія силы, дѣленной на длину.

Взявъ значенія $\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{Y}_s$, $\mathfrak{Z}_s$ для какой либо точки M оси нити и помноживъ ихъ на ds, получимъ проэкціи на оси координатъ главнаго вектора объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу нити, заключающемуся между поперечными сѣченіями s и $s + ds$, и внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ боковой поверхности этого элемента.

Такой способъ разсчета силъ можетъ быть названъ разсчетомъ на единицу длины оси нити.

Что касается до внутреннихъ напряженій, приложенныхъ къ поперечнымъ сѣченіямъ, то мы условимся обозначать знаками X_s, Y_s, Z_s суммы проэкцій на оси координатъ напряженій, приложенныхъ ко всему поперечному сѣченію, проведенному въ разстояніи s отъ конца A нити; здѣсь подразумѣваются напряженія, дѣйствующія черезъ это сѣченіе со стороны той части нити, которая дальше отъ A, чѣмъ разсматриваемое сѣченіе, на ту часть нити, которая ближе къ A.

X_s, Y_s, Z_s суть сплошныя функціи отъ s и отъ параметровъ оси нити.

§ 156. Примѣненіе уравненій (994, a, b, c) къ элементу нити.

Возьмемъ элементъ нити, заключающійся между двумя поперечными сѣченіями, весьма близкими одно къ другому; одно изъ нихъ отстоитъ отъ конца A нити на длину s по оси ея, другое — на длину $(s + \Delta s)$. Черезъ x, y, z означимъ координаты той точки M оси, черезъ которую проведено первое поперечное сѣченіе; величины $\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{Y}_s$, $\mathfrak{Z}_s$, X_s, Y_s, Z_s, $\varkappa$ относятся къ той же точкѣ M и къ этому же поперечному сѣченію.

Примѣнимъ къ этому элементу уравненіе (994, a, bis).

Первая часть этого уравненія заключаетъ: массу элемента, помноженную на ускореніе по оси $X^{овъ}$ центра инерціи его C, и отрицательно взятую сумму проэкцій на ось $X^{овъ}$ всѣхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу; въ эту же часть мы перенесемъ изъ второй части сумму проэкцій напряженій, приложенныхъ къ боковой поверхности элемента; тогда первую часть уравненія можно будетъ представить такъ:

$$\left(\varkappa \frac{d^2 x_c}{dt^2} - \mathfrak{X}_s + \varepsilon\right) \Delta s,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая величина, дѣлающаяся безконечно-малою при приближеніи Δs къ нулю.

Во второй части уравненія останутся: 1) сумма проэкцій на ось $X^{овъ}$ напряженій, дѣйствующихъ сквозь первое поперечное сѣченіе

со стороны тѣхъ частей нити, которыя ближе къ A, чѣмъ это сѣченіе и 2) сумма проэкцій напряженій, дѣйствующихъ сквозь второе поперечное сѣченіе со стороны тѣхъ частей нити, которыя дальше отъ A, чѣмъ это сѣченіе; первая сумма равна $(-X_s)$, вторая же, вслѣдствіе сплошности функціи X_s, можетъ быть выражена такъ:

$$(X_s)_2 = X_s + \frac{\partial X_s}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial^2 X_s}{\partial s^2}\frac{(\Delta s)^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

Составивъ уравненіе, раздѣливъ обѣ части равенства на Δs и предположивъ, что Δs уменьшается до нуля, причемъ, конечно, точка C приближается къ точкѣ M до совпаденія съ нею, получимъ слѣдующее уравненіе для точки M оси нити:

$$\varkappa\frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{X}_s + \frac{\partial X_s}{\partial s}\ldots\ldots\ldots\ldots(1015, \mathrm{a})$$

Подобнымъ же образомъ изъ уравненій (994, b, c) получимъ два другія уравненія:

$$\varkappa\frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{Y}_s + \frac{\partial Y_s}{\partial s},\ldots\ldots\ldots\ldots(1015, \mathrm{b})$$

$$\varkappa\frac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{Z}_s + \frac{\partial Z_s}{\partial s}\ldots\ldots\ldots\ldots(1015, \mathrm{c})$$

Точка M есть которая либо изъ точекъ оси нити; слѣдовательно, *для всякой точки оси нити должны быть удовлетворены уравненія вида (1015), заключающія:*

проэкціи ускореній этой точки на оси координатъ,
проэкціи на тѣ же оси силы $\mathfrak{F}_s$ для этой точки
и производныя по s проэкцій напряженій, приложенныхъ къ поперечному сѣченію, проведенному черезъ ту же точку.

§ 157. Примѣненіе уравненій (994, d, e, f) къ элементу вполнѣ гибкой нити.

Составимъ уравненіе (944, d) для элемента длины Δs, но будемъ брать моменты не вокругъ начала координатъ, но вокругъ точки M, координаты которой означимъ черезъ x, y, z.

Означимъ черезъ ε_x, ε_y, ε_z главные моменты количествъ движенія всего элемента вокругъ осей, проведенныхъ черезъ точку M параллельно осямъ координатъ, черезъ δ_x, δ_y, δ_z главные моменты (вокругъ тѣхъ же осей) объемныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ всего элемента и напряженій, приложенныхъ къ точкамъ его боковой поверхности.

Возьмемъ какое либо поперечное сѣченіе нити и составимъ главный моментъ напряженій, приложенныхъ къ этому сѣченію, вокругъ той точки сѣченія, въ которой оно пересѣкается осью нити; величины проэкцій этого момента на оси координатъ означимъ черезъ L_s, M_s, N_s; значокъ s служитъ для обозначенія разстоянія сѣченія по оси нити отъ конца A.

L_s, M_s, N_s должны быть, подобно X_s, Y_s, Z_s, сплошными функціями разстоянія s, такъ что проэкціи главнаго момента напряженій, приложенныхъ къ сѣченію $(s + \Delta s)$, вокругъ той точки M_1 этого сѣченія, въ которой оно пересѣкается осью нити, могутъ быть выражены въ видѣ слѣдующихъ рядовъ, расположенныхъ по возростающимъ степенямъ Δs, напримѣръ:

$$L_{s+\Delta s} = L_s + \frac{\partial L_s}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial^2 L_s}{\partial s^2}\frac{(\Delta s)^2}{1.2} + \ldots.$$

Однако, въ томъ уравненіи, которое мы составляемъ, должна войти проэкція главнаго момента напряженій, приложенныхъ къ этому сѣченію, не вокругъ точки M_1, но вокругъ точки M; означивъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты точки M_1, мы можемъ представить проэкцію этого момента вокругъ точки M въ видѣ слѣдующаго выраженія:

$$L_{s+\Delta s} - (y_1 - y)Z_s + (z_1 - z)Y_s.$$

Разность $(y_1 - y)$ можно выразить такъ:

$$y_1 - y = \frac{\partial y}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{(\Delta s)^2}{1.2} + \ldots..$$

и подобнымъ же образомъ двѣ другія разности.

Такимъ образомъ окажется, что уравненіе (944, d) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} - \delta_x = \left(\frac{\partial L_s}{\partial s} - Z_s\frac{\partial y}{\partial s} + Y_s\frac{\partial z}{\partial s}\right)\Delta s + \alpha_1, \ldots \textbf{(1016, a)}$$

гдѣ α_1 есть величина, заключающая вторыя и высшія степени Δs.

Теперь мы ограничимъ общность нашихъ выводовъ и ограничимся примѣненіемъ составленныхъ нами уравненій къ вполнѣ гибкимъ нитямъ съ сѣченіями безконечно-малыхъ размѣровъ.

1) *Мы предположимъ, что размѣры поперечныхъ сѣченій нити столь ничтожны, что можно принять ихъ безконечно-малыми, и что объемныя силы и внѣшнія, дѣйствующія на боковую поверхность, напряженія приложены столь сплошнымъ образомъ, что предѣлы величинъ* δ_x, δ_y, δ_z, ε_x, ε_y, ε_z *и производныхъ* ε_x', ε_y', ε_z' *суть безконечно-малыя величины втораго или высшаго порядка малости.*

2) *Мы предположимъ нить вполнѣ гибкою, такъ что ни въ какомъ изъ своихъ сѣченій она не представляетъ никакого сопротивленія самому крутому изгибу или даже сгибу оси ея подъ какимъ либо угломъ; для этого необходимо, чтобы моментъ напряженій, приложенныхъ къ каждому поперечному сѣченію, вокругъ осевой точки этого сѣченія былъ равенъ нулю, т. е., чтобы* L_s, M_s, N_s *были равны нулю для всѣхъ точекъ оси нити.*

Примѣнивъ предыдущее уравненіе (1016, a) къ элементу такой вполнѣ гибкой нити, раздѣливъ обѣ части уравненія на Δs и предположивъ, что длина элемента приближается къ нулю, получимъ, въ предѣлѣ, уравненіе:

$$Z_s\frac{\partial y}{\partial s} = Y_s\frac{\partial z}{\partial s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1017, a)}$$

Составивъ и примѣнивъ подобнымъ же образомъ два остальныя уравненія, получимъ:

$$X_s\frac{\partial z}{\partial s} = Z_s\frac{\partial x}{\partial s},\quad Y_s\frac{\partial x}{\partial s} = X_s\frac{\partial y}{\partial s} \ldots\ldots \textbf{(1017, b, c)}$$

Слѣдовательно, для всякой точки безконечно-тонкой, вполнѣ гибкой нити, къ которой внѣшнія силы приложены сплошнымъ образомъ, должны имѣть мѣсто слѣдующія равенства:

$$\frac{X_s}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)} = \frac{Y_s}{\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)} = \frac{Z_s}{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)} = S_s, \ldots\ldots\ldots \textbf{(1017, bis)}$$

выражающія, что главный векторъ S_s *напряженій, дѣйствующихъ сквозь поперечное сѣченіе въ этой точкѣ* (съ той стороны, гдѣ s больше, на ту сторону, гдѣ s меньше), *направленъ по касательной къ оси нити въ этой точкѣ.*

§ 158. Уравненія (1015), въ примѣненіи къ гибкой безконечно-тонкой нити, къ которой внѣшнія силы приложены сплошнымъ образомъ.

На основаніи того, что сказано въ концѣ предыдущаго параграфа, уравненія (1015) для точекъ гибкой безконечно-тонкой нити, къ которой внѣшнія силы приложены сплошнымъ образомъ, получатъ слѣдующій видъ:

$$\varkappa \frac{dx'}{dt} = \mathfrak{X}_s + \frac{\partial \left(S_s \frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial s}, \ldots\ldots\ldots \textbf{(1018, a)}$$

$$\varkappa \frac{dy'}{dt} = \mathfrak{Y}_s + \frac{\partial \left(S_s \frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s}, \ldots\ldots\ldots \textbf{(1018, b)}$$

$$\varkappa \frac{dz'}{dt} = \mathfrak{Z}_s + \frac{\partial \left(S_s \frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial s}, \ldots\ldots\ldots \textbf{(1018, c)}$$

гдѣ x', y', z' суть проэкціи на оси координатъ скорости той точки оси нити, къ которой относятся эти уравненія.

ГЛАВА XIII.

О положеніяхъ равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, твердыхъ тѣлъ и гибкихъ нитей.

§ 159. Замѣчанія относительно числа уравненій равновѣсія и числа связей.

Въ § 79-мъ на страницѣ 398-й объяснено было значеніе терминовъ: „положеніе равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ“, „уравненія равновѣсія силъ и реакцій связей“, „условія равновѣсія задаваемыхъ силъ“.

Число уравненій равновѣсія данной системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, равняется числу координатъ всѣхъ точекъ (а именно $3n$, если n есть число точекъ системы).

Число связей (p), связывающихъ точки данной системы, можетъ быть менѣе, равно или болѣе числа $3n$.

А) Когда (p) *менѣе* ($3n$), то можно получить $н$ ($н = 3n - p$) условій равновѣсія задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ данной системѣ.

Если задаваемыя силы не удовлетворяютъ хотя одному изъ этихъ условій равновѣсія, то данная система не можетъ имѣть положеній равновѣсія при заданныхъ силахъ.

Если проэкціи задаваемыхъ силъ на оси координатъ суть функціи координатъ точекъ системы, то система можетъ имѣть одно или нѣсколько положеній равновѣсія; координаты всѣхъ точекъ при каждомъ изъ этихъ положеній системы должны быть найдены чрезъ рѣшеніе $3n$ уравненій (а именно, $н$ условій равновѣсія и p уравненій связей); сколько эта совокупность уравненій имѣетъ рѣшеній, столько данная система матерьяльныхъ точекъ имѣетъ положеній равновѣсія.

Если положенія системы будутъ выражены не въ декартовыхъ координатахъ, но помощію какихъ либо другихъ координатныхъ параметровъ, то число уравненій равновѣсія, выраженныхъ въ этихъ параметрахъ, будетъ равно числу параметровъ; а если число послѣднихъ будетъ равно

n, такъ что всѣ они будутъ независимы одинъ отъ другаго, то уравненія равновѣсія будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и условіями равновѣсія.

Если въ числѣ связей есть связи неудерживающія, то могутъ быть и такія положенія равновѣсія системы, при которыхъ которыя либо изъ неудерживающихъ связей находятся въ состояніи ослабленія; при каждомъ изъ такихъ положеній, множители λ соотвѣтственныхъ ненапряженныхъ связей равны нулю, а потому тогда число условныхъ уравненій будетъ равно числу декартовыхъ координатъ ($3\,n$) безъ числа связей напряженныхъ.

Для каждаго найденнаго положенія равновѣсія системы мы найдемъ соотвѣтственную совокупность значеній множителей λ; для этого надо выбрать изъ числа уравненій равновѣсія, p наиболѣе простыхъ или подходящихъ, и подставивъ въ нихъ найденныя значенія координатъ, рѣшить относительно множителей λ.

B) *Когда* (p) *равно* ($3n$), то условій равновѣсія нѣтъ, если только всѣ связи удерживающія. Въ этихъ случаяхъ положеніе системы опредѣляется изъ уравненій связей, а значенія множителей λ вполнѣ опредѣлятся изъ уравненій равновѣсія для каждаго положенія системы.

C) *Когда* (p) *болѣе* ($3n$), тогда положеніе системы вполнѣ опредѣлится изъ $3n$ уравненій связей и слѣдуетъ убѣдиться въ томъ, что остальныя ($p - 3n$) уравненій связей не противорѣчатъ первымъ $3n$ уравненіямъ. Число множителей λ въ этихъ случаяхъ болѣе числа уравненій равновѣсія, а потому множители эти будутъ имѣть неопредѣленныя значенія; для выхода изъ такой неопредѣленности надо принять въ разсчетъ упругость механизмовъ, образующихъ связи, какъ будетъ показано на примѣрахъ.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ для поясненія сказаннаго.

Примѣръ 122-й. Три матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3, находящіяся въ плоскости XY, подчинены слѣдующимъ связямъ:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - a = 0$$

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 = 0,$$

$$y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 = 0,\ y_1 = 0$$

и между каждыми двумя изъ этихъ точекъ дѣйствуютъ взаимныя притяженія, пропорціональныя произведенію изъ массъ ихъ и изъ разстоянія между ними. Опредѣлить положеніе равновѣсія системы и реакціи связей.

Означимъ черезъ λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 величины множителей, соотвѣтствующихъ связямъ; составимъ уравненія равновѣсія:

$$-\mu^2 m_1 Mx_1 + \lambda_1(y_2 - y_3) + \lambda_2 m_1 = 0,$$

$$-\mu^2 m_1 My_1 - \lambda_1(x_2 - x_3) + \lambda_3 m_1 + \lambda_4 = 0,$$

$$-\mu^2 m_2 Mx_2 + \lambda_1(y_3 - y_1) + \lambda_2 m_2 = 0,$$

$$-\mu^2 m_2 My_2 - \lambda_1(x_3 - x_1) + \lambda_3 m_2 = 0,$$

$$-\mu^2 m_3 Mx_3 - \lambda_1(y_2 - y_1) + \lambda_2 m_3 = 0,$$

$$-\mu^2 m_3 My_3 + \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_3 m_3 = 0; \quad M = m_1 + m_2 + m_3;$$

въ этихъ уравненіяхъ должно подставить $y_1 = 0$; кромѣ того, три изъ координатъ x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 могутъ быть выражены функціями двухъ остальныхъ, на основаніи имѣющихся уравненій связей.

Условій равновѣсія должно быть два $(6 - 4 = 2)$; одно изъ нихъ получимъ, помноживъ третье изъ уравненій равновѣсія на m_3, пятое — на m_2, вычтя одно изъ другаго и принявъ во вниманіе уравненіе третьей связи; получится: $x_2 = x_3$.

Теперь можемъ уже выразить четыре координаты функціею пятой, а именно:

$$y_2 = -y_3 \frac{m_3}{m_2}, \quad x_1 = -x_3 \frac{m_2 + m_3}{m_1}; \quad x_2 = x_3,$$

$$y_3 = \frac{a}{x_3} \frac{m_1 m_2}{M(m_2 + m_3)}.$$

Прежде, чѣмъ составить послѣднее условіе равновѣсія, сложимъ 4-е и 6-е уравненія равновѣсія; получимъ $\lambda_3(m_2 + m_3) = 0$, откуда слѣдуетъ, что $\lambda_3 = 0$.

Поэтому 6-е уравненіе равновѣсія можно представить такъ:

$$\lambda_1 x_3 = \mu^2 m_3 m_1 y_3.$$

Помножимъ теперь 1-е уравненіе равновѣсія на x_1, третье — на x_2, пятое — на x_3 и сложимъ всѣ три; получимъ:

$$\mu^2 M^2 (m_2 + m_3) \frac{x_3^2}{m_1} = \lambda_1 a;$$

исключивъ λ_1 изъ двухъ послѣднихъ равенствъ и выразивъ y_3 функціею отъ x_3, получимъ уравненіе, изъ котораго найдемъ:

$$x_3 = \sqrt{\frac{am_1}{M(m_2+m_3)}} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{M}}.$$

Такимъ образомъ опредѣлится положеніе равновѣсія системы; затѣмъ мы найдемъ:

$$\lambda_1 = \mu^2 \sqrt{M m_1 m_2 m_3}, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_4 = 0.$$

Примѣръ 123-й. Двѣ тяжелыя точки, массы которыхъ одинаковы, взаимно-отталкиваются силами, обратно-пропорціональными разстоянію между ними, и находятся на одной и той же параболѣ: $x^2 = -2py$, ось которой направлена снизу вверхъ, противоположна направленію дѣйствія силы тяжести. Опредѣлить положенія равновѣсія этихъ точекъ.

Пусть x_1, y_1 — координаты одной, x_2, y_2 — координаты другой точки; уравненія связей:

$$x_1^2 + 2py_1 = 0, \ x_2^2 + 2py_2 = 0.$$

Уравненія равновѣсія:

$$\mu^2 \frac{(x_1 - x_2)}{r^2} + 2\lambda_1 x_1 = 0, \ -\mu^2 \frac{(x_1 - x_2)}{r^2} + 2\lambda_2 x_2 = 0,$$

$$\mu^2 \frac{(y_1 - y_2)}{r^2} + mg + 2\lambda_1 p = 0,$$

$$-\mu^2 \frac{(y_1 - y_2)}{r^2} + mg + 2\lambda_2 p = 0, \ \ r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Исключивъ изъ нихъ λ_1 и λ_2 и выразивъ y_1 въ x_1 и y_2 въ x_2, получимъ условія равновѣсія:

$$mgx_1 - 2p\mu^2 \frac{2p^2 + x_1(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)(4p^2+(x_1+x_2)^2)} = 0,$$

$$mgx_2 + 2p\mu^2 \frac{2p^2 + x_2(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)(4p^2+(x_1+x_2)^2)} = 0,$$

изъ которыхъ можно вывести слѣдующія два уравненія:

$$(x_1+x_2)\left(mg - \frac{2p\mu^2}{4p^2+(x_1+x_2)^2}\right) = 0,$$

$$2mg\,x_1x_2 + 2p\mu^2 \frac{2p^2}{4p^2+(x_1+x_2)^2} = 0.$$

Изъ этихъ уравненій получимъ два рѣшенія:

1) $x_1 + x_2 = 0,\quad x_1 = -x_2 = \mu\sqrt{\frac{p}{2mg}},\quad y_1 = y_2,$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{mg}{2p}.$$

2) $x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{2p}{mg}}\sqrt{\mu^2 - 2pmg},\quad x_1x_2 = -p^2,$

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 = 0,\quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{mg}{p}.$$

Примѣръ 124-й. Три тяжелыя матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3 находятся въ плоскости XY на одной прямой линіи въ неизмѣнныхъ разстояніяхъ одна отъ другой:

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) = 0,$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - l_{13}{}^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l_{23}{}^3 = 0;$$

кромѣ того, точка m_3 (находящаяся между m_1 и m_2, см. черт. 127), связана съ началомъ координатъ O гибкою нерастяжимою нитью длины L:

$$L^3 - x_3{}^2 - y_3{}^2 \geqslant 0,$$

а точка m_1 должна опираться на ось $X^{овъ}$ и точка m_2 — на ось $Y^{овъ}$, такъ что:

$$y_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Опредѣлить реакціи этихъ шести связей при положеніи равновѣсія системы.

Означимъ множителей, соотвѣтствующихъ этимъ связямъ, знаками: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$.

Изъ уравненій связей найдемъ, что координаты x_1, y_2, x_3, y_3 должны имѣть слѣдующія значенія:

$$x_1 = (l_{13} + l_{23}) \sqrt{\frac{L^2 - l_{13}^2}{l_{23}^2 - l_{13}^2}}, \quad y_2 = (l_{13} + l_{23}) \sqrt{\frac{l_{23}^2 - L^2}{l_{23}^2 - l_{13}^2}},$$

$$x_3 = x_1 \frac{l_{23}}{l_{13} + l_{23}}, \quad y_3 = y_2 \frac{l_{13}}{l_{13} + l_{23}},$$

это суть вполнѣ опредѣленныя и возможныя величины, если L заключается между l_{23} и l_{13} и если послѣднія двѣ длины не равны между собою.

Реакціи связей опредѣлятся изъ уравненій равновѣсія:

$$-\lambda_1 (y_2 - y_3) - 2\lambda_2 (x_3 - x_1) = 0,$$

$$-\lambda_1 x_3 - 2\lambda_2 y_3 + \lambda_5 - m_1 g = 0,$$

$$-\lambda_1 y_3 - 2\lambda_3 x_3 + \lambda_6 = 0,$$

$$\lambda_1 (x_3 - x_1) + 2\lambda_3 (y_2 - y_3) - m_2 g = 0,$$

$$\lambda_1 y_2 + 2\lambda_2 (x_3 - x_1) + 2\lambda_3 x_3 - 2\lambda_4 x_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 y_3 - 2\lambda_3 (y_2 - y_3) - 2\lambda_4 y_3 - m_3 g = 0.$$

Сложивъ уравненія 1-е и 3-е съ пятымъ, а 2-е и 4-е съ шестымъ, получимъ:

$$\lambda_6 - 2\lambda_4 x_3 = 0, \quad \lambda_5 - 2\lambda_4 y_3 = (m_1 + m_2 + m_3) g.$$

Исключивъ изъ 1-го и 2-го величину λ_2, а изъ 3-го и 4-го величину λ_3, при помощи уравненія первой связи, получимъ:

$$-\lambda_1 l_{23}^2 + \lambda_5 x_3 = m_1 g x_3, \quad \lambda_1 l_{13}^2 - \lambda_6 y_3 = m_2 g (x_3 - x_1).$$

Изъ этихъ четырехъ равенствъ получимъ слѣдующія выраженія для λ_5 и λ_6:

$$\lambda_5 = g\left(m_1 + m_2 \frac{l_{23}}{l_{23} - l_{13}} + m_3 \frac{l_{23}^2}{l_{23}^2 - l_{13}^2}\right),$$

$$\lambda_6 = g \frac{x_3}{y_3} \frac{l_{13}(m_2(l_{13} + l_{23}) + m_3 l_{13})}{l_{23}^2 - l_{13}^2},$$

а затѣмъ можемъ вывести слѣдующее выраженіе для λ_4:

$$\lambda_4 = \frac{g}{2} \frac{m_2(l_{13} + l_{23}) + m_3 l_{13}}{\sqrt{(l_{23}^2 - l_{13}^2)(l_{23}^2 - L^2)}}.$$

Для того, чтобы система могла быть въ покоѣ, необходимо, чтобы эти три множителя не были менѣе нуля, а это требуетъ, чтобы l_{23} было болѣе l_{13} и болѣе L.

Примѣры системъ съ излишнимъ числомъ связей будутъ приведены послѣ.

§ 160. Условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Разсмотримъ условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Въ началѣ главы XI (стр. 536 — 537) было показано, что для такого тѣла $\varkappa = 6$, т. е., что число степеней свободы его равно шести; отсюда слѣдуетъ, что таково же число условій его равновѣсія.

Эти условія можно получить изъ шести уравненій (616, A) и (641) (стр. 537) движенія свободнаго твердаго тѣла, если принять во вниманіе, что ускоренія всѣхъ точекъ тѣла должны быть равны нулю, когда оно находится въ положеніи равновѣсія; тогда получатся равенства:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0, \quad \textbf{(1019,a)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0, \ldots \ldots \textbf{(1019, b)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0, \ldots \ldots \textbf{(1019, c)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(1019, d)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(1019, e)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \textbf{(1019, f)}$$

выражающія тѣ условія, при которыхъ задаваемыя силы, приложенныя къ свободной неизмѣняемой системѣ, взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей системы.

Эти равенства могутъ быть получены еще слѣдующимъ прямымъ путемъ. Положимъ, что данное твердое тѣло можетъ быть разсматриваемо какъ неизмѣняемая система, состоящая изъ n матерьяльныхъ точекъ; эти точки связаны между собою $(3n - 6)$-ю идеальными неизмѣняемыми связями (см. стр. 537). Представимъ себѣ, что составлены уравненія равновѣсія всѣхъ точекъ и что мы сложимъ всѣ уравненія, заключающія проэкціи силъ и реакцій связей на ось $X^{овъ}$; тогда проэкціи обѣихъ реакцій каждой неизмѣняемой связи взаимно сократятся, вслѣдствіе равенства и противоположности этихъ реакцій, а потому въ первой части полученнаго уравненія останется только сумма проэкцій всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу; это и будетъ равенство (1019, a). Подобнымъ же образомъ получимъ и два равенства (1019, b), (1019, c).

Затѣмъ представимъ себѣ, что изъ уравненій равновѣсія составлены три уравненія моментовъ, для чего надо поступать такъ, какъ показано въ началѣ § 93-го; въ полученныхъ равенствахъ взаимно сократятся проэкціи моментовъ обѣихъ реакцій каждой изъ неизмѣняемыхъ связей, такъ какъ эти реакціи не только равны и прямо-

противоположны, но и вмѣстѣ съ тѣмъ направлены по линіи, соединяющей точки ихъ приложенія; вслѣдствіе этого въ первыхъ частяхъ полученныхъ равенствъ останутся только суммы проэкцій моментовъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, слѣдовательно, равенства эти будутъ ни что иное, какъ: (1019, d, e, f).

Наконецъ, условія равновѣсія (1019) могутъ быть получены еще изъ равенства (567, b) (стр. 399), выражающаго такъ называемое начало возможныхъ перемѣщеній; для этого надо въ равенствѣ (567, b) замѣнить варьяціи δx_i, δy_i, δz_i выраженіями, приведенными въ формулахъ (750) на стр. (539), а затѣмъ приравнять нулю коэфиціенты независимыхъ варьяцій; получимъ равенства (1019, a, b, c) и три равенства такого вида, какъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}((y_i - y_ю)Z_i - (z_i - z_ю)\,Y_i) = 0,$$

или, иначе:

$$Л_x - y_ю B_z + z_ю B_y = 0,$$

изъ которыхъ, на основаніи равенствъ (1019, a, b, c), слѣдуютъ равенства (1019, d, e, f).

Значеніе условій (1019) можно выразить слѣдующими словами: *Для того, чтобы силы, приложенныя къ свободному твердому тѣлу взаимно уравновѣшивались чрезъ его посредство, необходимо, чтобы ихъ главный векторъ и главный моментъ* (вокругъ какой угодно точки) *были равны нулю.*

§ 161. Условіе, при которомъ совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, можетъ быть уравновѣшена одною силою.

Положимъ, что силы, приложенныя къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла, не уравновѣшиваются между собою, т. е., что всѣ или нѣкоторыя изъ шести величинъ:

$$B_x,\ B_y,\ B_z,\ Л_x,\ Л_y,\ Л_z$$

не равны нулю; спрашивается, нельзя ли уравновѣсить эту совокупность силъ одною силою, приложенною къ нѣкоторой точкѣ того же тѣла?

Означимъ черезъ X, $У$, Z проэкціи искомой силы на оси координатъ и черезъ x, y, z координаты точки ея приложенія.

Чтобы данная совокупность силъ уравновѣсилась этою силою, необходимо, чтобы были удовлетворены равенства:

$$\left.\begin{array}{l} X+B_x=0,\ \ У+B_y=0,\ \ Z+B_z=0, \\ Л_x+yZ-zУ=0,\ Л_y+zX-xZ=0,\ Л_z+xУ-yX=0 \end{array}\right\}(1020)$$

Изъ нихъ можно составить слѣдующее равенство:

$$B_x Л_x+B_y Л_y+B_z Л_z=X(zУ-yZ)+$$
$$+У(xZ-zX)+Z(yX-xУ),$$

вторая часть котораго, очевидно, равна нулю; поэтому и первая часть его должна быть равна нулю, если данную совокупность силъ можно уравновѣсить одною силою.

Слѣдовательно, *для того, чтобы данную совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, можно было уравновѣсить одною силою, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:*

$$B_x Л_x+B_y Л_y+B_z Л_z=0,\ldots\ldots\ldots.(637)$$

т. е., чтобы главный моментъ и главный векторъ данной совокупности силъ были взаимно перпендикулярны и чтобы притомъ главный векторъ не былъ равенъ нулю.

Если условіе это удовлетворено данною совокупностью силъ, то какъ найти величину, направленіе и точку приложенія уравновѣшивающей силы?

Величина и направленіе этой силы опредѣляются первыми тремя равенствами (1020); изъ нихъ слѣдуетъ, что искомая сила равна и прямопротивоположна главному вектору данной совокупности силъ.

Чтобы опредѣлить мѣсто приложенія уравновѣшивающей силы, припомнимъ конецъ параграфа 94-го (стр. 454), гдѣ сказано, что если главный векторъ и главный моментъ данной совокупности силъ взаимно перпендикулярны, то главный моментъ этой совокупности вокругъ центра, находящагося на центральной оси, равенъ нулю; припомнимъ, кромѣ того, формулы (633) на стр. 451-й.

Пусть $x_ц$, $y_ц$, $z_ц$ суть координаты какой либо точки центральной оси; такъ какъ главный моментъ совокупности силъ вокругъ этой точки равенъ нулю, то, примѣнивъ формулы (633) къ этой точкѣ, получимъ:

$$0 = Л_x + z_ц B_y - y_ц B_z; \quad 0 = Л_y + x_ц B_z - z_ц B_x;$$
$$0 = Л_z + y_ц B_x - x_ц B_y.$$

Изъ этихъ равенствъ и изъ равенствъ (1020) получимъ слѣдующія уравненія, служащія для опредѣленія величинъ координатъ точки приложенія уравновѣшивающей силы:

$$\frac{x - x_ц}{B_x} = \frac{y - y_ц}{B_y} = \frac{z - z_ц}{B_z};$$

такъ какъ это суть уравненія центральной оси, то мы можемъ сказать слѣдующее:

Если данная совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, удовлетворяетъ условію (637), причемъ главный векторъ ея не равенъ нулю, то ее можно уравновѣсить одною силою, приложенною къ одной изъ тѣхъ точекъ твердаго тѣла, которыя находятся на центральной оси совокупности силъ; направленіе уравновѣшивающей силы должно быть противоположно направленію главнаго вектора (т. е. сила должна быть направлена вдоль по центральной оси), *а величина ея должна быть равна величинѣ главнаго вектора.*

Найти положеніе центральной оси данной совокупности силъ весьма легко; принявъ во вниманіе указанную на страницѣ 453-й аналогію между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею главныхъ моментовъ совокупности силъ, мы можемъ руковод-

ствоваться правиломъ, приведеннымъ на страницѣ 136-й кинематической части, замѣнивъ: полюсъ $Ю$ — началомъ координатъ O, угловую скорость Ω — главнымъ векторомъ B, скорость полюса $Ю$ — главнымъ моментомъ $Л$ вокругъ центра O; тогда получимъ слѣдующее *правило для опредѣленія положенія центральной оси совокупности силъ, удовлетворяющихъ условію (637):*

Изъ начала координатъ O надо возстановить перпендикуляръ къ плоскости $ВОЛ$ (черт. 128) въ такомъ направленіи, съ котораго $\overline{OB}$ видно по лѣвую, а $\overline{OЛ}$ по правую руку; на этомъ направленіи надо отложить длину $\overline{OЦ}$, равную отношенію:

$$\frac{Л}{B};$$

центральная ось $\overline{ЦB_0}$ будетъ параллельна $\overline{OB}$.

Обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что точкою приложенія уравновѣшивающей силы можетъ служить всякая точка тѣла, находящаяся на центральной оси, или, что то же самое, на направленіи этой силы; слѣдовательно, если какимъ нибудь путемъ найдена величина, направленіе и точка приложенія уравновѣшивающей силы, то мы имѣемъ право перенести точку приложенія этой силы на какую либо длину вдоль по ея направленію въ другую точку тѣла.

§ 162. Общее замѣчаніе относительно одного пріема, употребляемаго въ элементарной статикѣ.

Въ элементарной статикѣ, при опредѣленіи условій равновѣсія покоющагося твердаго тѣла, весьма часто и успѣшно пользуются пріемомъ перенесенія точки приложенія силы въ другую точку тѣла, вдоль по той линіи, по которой сила дѣйствуетъ.

Пользоваться этимъ пріемомъ можно потому, что, при такомъ перенесеніи точки приложенія силы, моментъ ея вокругъ какой либо оси или вокругъ какого либо центра не измѣняется; поэтому, при опредѣленіи условій равновѣсія покоющагося твердаго тѣла, гдѣ приходится составлять или принимать въ разсчетъ только векторы и моменты силъ, мы можемъ вообразить себѣ, что точка приложенія каж-

дой силы перенесена на какую угодно длину вдоль по направленію силы или по направленію противоположному; черезъ это видъ условій не измѣнится, но могутъ быть достигнуты нѣкоторыя упрощенія въ выводахъ условій и формулъ.

Воспользуемся этимъ пріемомъ въ слѣдующемъ вопросѣ:

Примѣръ 125-й. Тяжелый однородный стержень AB длины $2l$ опирается однимъ концомъ A на линію OD (черт. 129), наклоненную подъ угломъ J_1 къ горизонту, другимъ концомъ B — на линію OE, наклоненную подъ угломъ $(180^\circ - J_2)$ къ горизонту; опредѣлить положеніе равновѣсія стержня.

Къ стержню приложены слѣдующія силы и реакціи: 1) силы тяжести, которыя могутъ быть замѣнены вѣсомъ стержня, приложеннымъ къ его центру инерціи, 2) реакція λ_1 линіи OD, дѣйствующая въ точкѣ A по направленію перпендикуляра AK, 3) реакція λ_2 линіи OE, дѣйствующая въ точкѣ B по направленію перпендикуляра BK; точка K есть точка пересѣченія обоихъ перпендикуляровъ.

Когда стержень покоится, тогда можемъ мысленно перенести точки приложенія реакцій λ_1 и λ_2 въ точку K, предполагая, что эта точка неизмѣнно связана со стержнемъ AB.

Чтобы положеніе стержня было положеніемъ равновѣсія, необходимо, чтобы равнодѣйствующая $K\Lambda$ реакцій $K\lambda_1$ и $K\lambda_2$, перенесенныхъ въ точку K, уравновѣшивалась съ вѣсомъ CG стержня AB чрезъ посредство воображаемаго неизмѣняемаго стержня CK, скрѣпляющаго точки C и K.

Силы, приложенныя къ концамъ свободнаго неизмѣняемаго стержня, уравновѣшиваются только тогда, когда онѣ равны, прямопротивоположны и направлены вдоль по стержню или по его продолженіямъ.

Слѣдовательно, для равновѣсія стержня AB необходимо, чтобы точка K была на одной вертикальной линіи съ точкою C, какъ и представлено на чертежѣ 129-мъ.

Такъ какъ линія KC, при положеніи равновѣсія стержня AB, должна быть вертикальна, то уголъ AKC тогда долженъ быть равенъ J_1, а уголъ $BKC = J_2$.

Означимъ черезъ x уголъ HBA, составляемый стержнемъ BA съ горизонтомъ; очевидно, что уголъ CBK выразится тогда такъ: $\left(\frac{\pi}{2} - J_2 - x\right)$, а уголъ CAK — такъ: $\left(\frac{\pi}{2} - J_1 + x\right)$.

По извѣстнымъ формуламъ прямолинейной тригонометріи, примѣненнымъ къ треугольникамъ AKC и BKC, составимъ равенства:

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{CA}} = \frac{\cos(J_1 - x)}{\sin J_1}, \quad \frac{\overline{CK}}{\overline{CB}} = \frac{\cos(J_2 + x)}{\sin J_2};$$

такъ какъ точка C находится на серединѣ длины стержня AB, то изъ этихъ равенствъ можемъ вывести слѣдующее:

$$\frac{\cos(J_1 - x)}{\sin J_1} = \frac{\cos(J_2 + x)}{\sin J_2},$$

изъ него найдемъ:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} J_2 - \operatorname{cotg} J_1) = \frac{\sin(J_1 - J_2)}{2 \sin J_1 \sin J_2}.$$

Считаемъ нужнымъ замѣтить, что примѣненіе сказаннаго пріема къ вопросамъ объ опредѣленіи условій равновѣсія покоющихся твердыхъ тѣлъ вполнѣ законно и не можетъ повести къ невѣрнымъ заключеніямъ; дальнѣйшія же примѣненія его должно дѣлать съ надлежащею осмотрительностью, а иногда примѣнять его не слѣдуетъ вовсе. Такъ, напримѣръ, примѣненіе этого пріема при разсмотрѣніи условій устойчивости равновѣсія можетъ привести къ совершенно невѣрнымъ результатамъ.

§ 163. Пара силъ.

Обратимъ теперь вниманіе на такія совокупности силъ, главный векторъ которыхъ равенъ нулю, а главный моментъ неравенъ нулю.

Простѣйшая совокупность этого рода состоитъ изъ двухъ силъ равныхъ и прямопротивоположныхъ, но направленныхъ не по линіи, соединяющей точки ихъ приложенія; такая совокупность двухъ силъ называется *парою силъ*.

Если главный векторъ совокупности силъ равенъ нулю, то главный моментъ ея (если онъ не равенъ нулю), обладаетъ тѣмъ важнымъ качествомъ, что величина и направленіе его не зависятъ отъ выбора центра моментовъ; въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ (633) (стр. 451) слѣдуетъ, что если главный векторъ совокупности силъ равенъ нулю, то главный моментъ ея вокругъ какого угодно центра имѣетъ ту же

самую величину и то же самое направленіе, какъ и главный моментъ вокругъ начала координатъ.

Тѣмъ же качествомъ обладаетъ и главный моментъ пары силъ, называемый просто *моментомъ пары*.

Изъ этого слѣдуетъ, что если за центръ моментовъ возьмемъ точку приложенія одной изъ силъ пары, то величина и направленіе момента другой силы представятъ величину и направленіе момента пары.

Слѣдовательно, величина момента пары равняется произведенію FD, гдѣ D есть длина кратчайшаго разстоянія между силами, а F— величина каждой изъ силъ; моментъ пары направленъ перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ обѣ силы.

Разстояніе D называется *плечомъ пары*, а плоскость — заключающая обѣ силы, *плоскостью пары*; если изъ какой либо точки кратчайшаго разстоянія D возстановить длину, изображающую моментъ пары, то, съ конца этой длины, обѣ силы пары будутъ казаться дѣйствующими слѣва на право (см. черт. 130).

§ 164. Совокупность силъ, эквивалентная парѣ силъ.

Если къ свободному твердому тѣлу приложена такая совокупность силъ, главный векторъ которой равенъ нулю, а главный моментъ не равенъ нулю, то совокупность эта, очевидно, можетъ быть уравновѣшена одною парою силъ, моментъ которой долженъ быть равенъ и противоположенъ главному моменту данной совокупности.

Здѣсь должно замѣтить, что, исключая величины момента уравновѣшивающей пары и направленія момента ея, все остальное относящееся къ строенію пары, остается произвольнымъ; такъ что:

1) Плоскость пары можетъ быть выбрана по произволу, лишь бы она была перпендикулярна къ направленію главнаго момента данной совокупности силъ.

2) Величины (равныхъ и противоположныхъ) силъ пары произвольны, но кратчайшее разстояніе между ними должно быть равно главному моменту совокупности силъ, дѣленному на величину одной силы пары.

3) Въ избранной плоскости, направленія силъ пары могутъ быть произвольны.

4) Наконецъ, остается еще произвольнымъ выборъ точекъ приложенія силъ пары.

Слѣдовательно, данная совокупность силъ можетъ быть уравновѣшена различными парами силъ, разнообразными до безконечности, несмотря на то, что моменты ихъ одинаковы по величинѣ и по направленію; всѣ такія пары, моменты которыхъ одинаковы по величинѣ и по направленію, называются *эквивалентными между собою парами силъ.*

Вообще, двѣ какія либо совокупности силъ называются эквивалентными между собою, если, будучи порознь приложены къ одному и тому же свободному твердому тѣлу, онѣ могутъ быть уравновѣшены третьею совокупностью силъ, приложенною къ нему же.

Всякая пара силъ, приложенная къ свободному твердому тѣлу, можетъ быть уравновѣшена парою, моментъ которой равенъ и прямопротивоположенъ моменту первой пары.

Пусть къ свободному твердому тѣлу приложена совокупность силъ, главный векторъ которой есть нуль; эта совокупность можетъ быть уравновѣшена нѣкоторою парою силъ (означимъ ее, для краткости, знакомъ A) или всякими другими парами, эквивалентными парѣ A.

Если къ тому же тѣлу будетъ приложена только пара A, то ее можно будетъ уравновѣсить нѣкоторою парою B, моментъ которой равенъ и противоположенъ моменту пары A.

Такъ какъ данная совокупность силъ и пара B порознь уравновѣшиваются одною и тою же парою A, то онѣ, по вышесказанному, должны быть признаны эквивалентными между собою.

Поэтому, *всякую такую совокупность силъ, главный векторъ которой равенъ нулю, а главный моментъ не равенъ нулю, мы будемъ называть совокупностью силъ, эквивалентною парѣ силъ.*

§ 165. Совокупность силъ, не удовлетворяющая условію (637). Приведеніе совокупности силъ къ каноническому виду.

Если къ свободному твердому тѣлу приложена такая совокупность силъ, которая не удовлетворяетъ условію (637), то она не можетъ быть уравновѣшена одною отдѣльною силою, не можетъ быть уравновѣшена также и одною отдѣльною парою силъ, но ее можно уравновѣсить совокупностью силы съ парою силъ или совокупностью двухъ силъ непараллельныхъ и не пересѣкающихся.

Пусть $\overline{OB}$ (черт. 131) есть главный векторъ данной совокупности силъ, $\overline{OЛ_0}$ — главный моментъ ея вокругъ начала координатъ, а величины

$$B_x, B_y, B_z, Л_x, Л_y, Л_z$$

суть проэкціи главнаго вектора и этого главнаго момента на оси координатъ.

Чтобы уравновѣсить эту совокупность силъ, приложимъ къ тѣлу въ точкѣ O силу $\overline{OB'}$ (черт. 131), равную и противоположную главному вектору $\overline{OB}$ и пару силъ, моментъ которой $\overline{OЛ_0'}$ равенъ и противоположенъ главному моменту $\overline{OЛ_0}$; послѣ этого, условія равновѣсія твердаго тѣла, очевидно, удовлетворятся.

Сила $\overline{OB'}$ и пара силъ, имѣющая моментъ $\overline{OЛ_0'}$, могутъ быть замѣнены двумя силами. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ O плоскость $П$ перпендикулярную къ $\overline{OЛ_0}$ и примемъ ее за плоскость пары; въ этой плоскости изъ точки O проведемъ какую либо длину $\overline{OF}$, которую примемъ за изображеніе одной изъ силъ F пары; затѣмъ возстановимъ перпендикуляръ OU къ $\overline{OF}$ и къ $\overline{OЛ_0'}$ въ такомъ направленіи, съ котораго $\overline{OЛ_0'}$ видно по лѣвую, а $\overline{OF}$ — по правую руку; на этомъ перпендикулярѣ, который будетъ заключаться въ плоскости пары силъ, отложимъ длину $\overline{OM}$, равную отношенію $Л_0$ къ F; изъ точки M проведемъ длину $\overline{MF}$, равную и противоположную длинѣ $\overline{OF}$, которая будетъ представлять другую силу пары; наконецъ построимъ равнодѣйствующую $\overline{OF_1}$ силъ $\overline{OF}$ и $\overline{OB'}$, приложенныхъ къ точкѣ O. Послѣ этого окажется, что данная совокупность силъ уравновѣшена двумя силами: силою $\overline{OF_1}$, приложенною къ тѣлу

въ точкѣ O и силою $\overline{MF}$, приложенною къ тѣлу въ точкѣ M. Направленія этихъ силъ не пересѣкаются, такъ какъ послѣдняя сила заключается въ плоскости Π и направленіе ея не встрѣчаетъ точку O, между тѣмъ какъ первая сила проходитъ черезъ эту точку; эти силы не параллельны, такъ какъ сила $\overline{OF}$, параллельно-противоположная силѣ $\overline{MF}$, встрѣчаетъ силу $\overline{OF_1}$ въ точкѣ O.

Такимъ образомъ, всякую совокупность силъ, неудовлетворяющую условію (637), можно уравновѣсить силою, соединенною съ парою силъ, или двумя непараллельными и непересѣкающимися силами.

Уравновѣшивая данную совокупность силою и парою, можемъ приложить силу B' не къ точкѣ O, а къ какой угодно другой точкѣ тѣла, но тогда придется измѣнить величину и направленіе момента пары; если эту силу, равную и противоположную главному вектору данной совокупности, приложимъ къ точкѣ K (координаты которой суть x_k, y_k, z_k), то моментъ ея вокругъ точки O будетъ имѣть слѣдующія проэкціи на оси координатъ:

$$(-y_k B_z + z_k B_y),\ (-z_k B_x + x_k B_z),\ (-x_k B_y + y_k B_x);$$

поэтому, проэкціи момента новой пары, которая должна уравновѣсить данную совокупность силъ и силу $\overline{KB'}$, должны быть равны слѣдующимъ величинамъ:

$$-(Л_x + z_k B_y - y_k B_z),\ -(Л_y + x_k B_z - z_k B_x),$$
$$-(Л_z + y_k B_x - x_k B_y),$$

т. е. отрицательно взятымъ проэкціямъ главнаго момента данной совокупности силъ вокругъ точки K (см. формулы (633) на страницѣ 451-й).

Слѣдовательно, *приложенную къ свободному твердому тѣлу совокупность силъ, неудовлетворяющую условію (637), можно уравновѣсить силою и парою силъ; сила, равная и прямопротивоположная главному вектору совокупности, можетъ быть приложена къ любой точкѣ твердаго тѣла; моментъ же пары*

долженъ быть равенъ и противоположенъ главному моменту совокупности вокругъ той точки тѣла, къ которой приложена сила.

Такимъ образомъ, выборъ точки приложенія силы вліяетъ на величину и направленіе момента пары; несмотря на это, проэкція момента пары на направленіе силы имѣетъ одну и ту же величину для одной и той же совокупности силъ, совершенно независимо отъ выбора точки K, а именно величина этой проэкціи равна:

$$Л_k \cos(Л_k, B) = \frac{Л_x B_x + Л_y B_y + Л_z B_z}{B} = Л_0 \cos(Л_0, B) \quad \textbf{(636)}$$

Отсюда слѣдуетъ, что пара силъ будетъ съ наименьшимъ моментомъ въ томъ случаѣ, когда сила будетъ приложена къ какой либо изъ точекъ тѣла, находящихся на центральной оси данной совокупности силъ, потому что тогда моментъ пары долженствуетъ быть направленъ вдоль по силѣ B', такъ какъ главный моментъ вокругъ такой точки направленъ вдоль по главному вектору (см. стр. 453-ю).

Для опредѣленія положенія центральной оси данной совокупности силъ можно составить правило и написать формулы, руководствуясь указанною на стр. 453-й аналогіею между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею моментовъ силы. Изъ правила, приведеннаго на страницѣ 136-й кинематической части, извлечемъ слѣдующее *правило для опредѣленія положенія центральной оси совокупности силъ, неудовлетворяющей условію (637)*:

Изъ начала координатъ O (черт. 132) надо возстановить перпендикуляръ къ плоскости $BOЛ_0$ въ такомъ направленіи, съ котораго $\overline{OB}$ видно по лѣвую, а $\overline{OЛ_0}$ по правую руку; на этомъ направленіи надо отложить длину $\overline{OЦ}$, равную:

$$\overline{OЦ} = \frac{Л_0 \sin(Л_0, B)}{B},$$

точка $Ц$ и будетъ одною изъ точекъ центральной оси данной совокупности силъ. Центральная ось параллельна главному вектору.

Главный моментъ совокупности силъ вокругъ которой либо изъ точекъ этой оси равенъ:

$$\overline{ОЦ} = Л_0 \cos(Л_0, B)$$

и направленъ вдоль по центральной оси.

Изъ формулъ (151) стр. 135-й кинематической части получимъ *выраженія координатъ точки Ц центральной оси совокупности силъ*, если замѣнимъ: точку *Ю* — началомъ координатъ *O*, угловую скорость Ω — главнымъ векторомъ *B* и скорость точки *Ю* — главнымъ моментомъ $Л_0$; получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x_ц &= \frac{Л_z B_y - Л_y B_z}{B^2}, \\ y_ц &= \frac{Л_x B_z - Л_z B_x}{B^2}, \\ z_ц &= \frac{Л_y B_x - Л_x B_y}{B^2}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1021)}$$

Уравненія центральной оси совокупности силъ аналогичны уравненіямъ (150) стр. 135-й кинематической части, а именно они таковы:

$$\frac{x - x_ц}{B_x} = \frac{y - y_ц}{B_y} = \frac{z - z_ц}{B_z} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1022)}$$

Если подставимъ въ формулы (633) стр. 451-й, вмѣсто x_k, y_k, z_k, координаты точки *Ц* или какой либо другой точки центральной оси, то, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, получимъ слѣдующія выраженія проэкцій главнаго момента совокупности силъ вокругъ этой точки:

$$(Л_ц)_x = \frac{B_x}{B} Л_0 \cos(Л_0, B),\ (Л_ц)_y = \frac{B_y}{B} Л_0 \cos(Л_0, B),$$

$$(Л_ц)_z = \frac{B_z}{B} Л_0 \cos(Л_0, B) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1023)}$$

Эти формулы выражаютъ, что моментъ $Л_ц$ направленъ по центральной оси и равенъ проэкціи момента $Л_0$ на направленіе главнаго вектора.

Приложенная къ твердому тѣлу совокупность силъ, состоящая изъ силы и пары силъ, дѣйствующей въ плоскости перпендикулярной къ силѣ, называется *совокупностью каноническаго вида* или *канонической совокупностью силъ*;Болъ (Ball *) называетъ такую совокупность силъ англійскимъ словомъ „wrench", непереводимымъ на русскій языкъ; слово *wrench* означаетъ тѣ усилія, которыя мы прилагаемъ, завинчивая винтъ посредствомъ отвертки; тогда мы нажимаемъ отвертку на шляпку винта по его оси и вмѣстѣ съ тѣмъ прилагаемъ пару силъ вращающую винтъ вокругъ его оси.

Одну силу, приложенную къ твердому тѣлу, можно разсматривать какъ такую каноническую совокупность силъ, у которой пара силъ имѣетъ моментъ нуль.

Одну пару силъ, приложенную къ твердому тѣлу, можно разсматривать какъ такую каноническую совокупность силъ, у которой сила равна нулю.

Въ § 161-мъ было показано, что совокупность силъ, удовлетворяющая условію (637), эквивалента одной силѣ; въ § 164-мъ говорилось о совокупности силъ, эквивалентной парѣ силъ; наконецъ теперь мы видимъ, что совокупность силъ, неудовлетворяющая условію (637), эквивалентна канонической совокупности силъ, у которой ни сила, ни пара силъ не равны нулю; поэтому мы можемъ теперь высказать слѣдующее положеніе:

Каждая совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть приведена къ каноническому виду **).

§ 166. Совокупность параллельныхъ силъ.

Совокупность параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ одной силѣ, или къ одной парѣ силъ.

Означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ одной изъ этихъ силъ (силы F_1) съ осями координатъ;

---

*) Robert Ball. The theory of srews: a study in the dynamics of a rigid body. 1876.

**) Poinsot. Sur la composition des moments et la composition des aires. Journal de l'Ecole Polytechnique. T. VI, Cahier 13. (1806).

черезъ $F_2, F_3, \ldots F_i, \ldots F_n$ означимъ положительно-взятыя величины тѣхъ силъ, направленія которыхъ параллельны направленію силы F_1, и отрицательно-взятыя величины тѣхъ силъ, направленія которыхъ противоположны направленію силы F_1.

Проэкціи на оси координатъ главнаго вектора этой совокупности и главнаго момента ея вокругъ начала координатъ таковы:

$$B_x = \lambda \sum F_i,\; B_y = \mu \sum F_i,\; B_z = \nu \sum F_i,$$

$$Л_x = \nu \sum F_i y_i - \mu \sum F_i z_i,\; Л_y = \lambda \sum F_i z_i - \nu \sum F_i x_i,$$

$$Л_z = \mu \sum F_i x_i - \lambda \sum F_i y_i.$$

Изъ этихъ выраженій видно, что главный векторъ равенъ $\sum F_i$, а главный моментъ перпендикуляренъ къ направленію силъ.

Слѣдовательно, если главный векторъ параллельныхъ силъ не равенъ нулю, то совокупность этихъ силъ эквивалентна одной силѣ, равной и параллельной главному вектору и приложенной къ одной изъ точекъ центральной оси. Одну изъ точекъ этой оси, а именно точку *Ц*, мы найдемъ по правилу, указанному въ § 161-мъ, или по формуламъ (1021); но мы обратимъ сначала вниманіе на другую точку этой оси, координаты которой суть:

$$x_c = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \quad y_c = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}, \quad z_c = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} \; \ldots\ldots \; \mathbf{(1024)}$$

Эта точка *C* дѣйствительно находится на центральной оси, такъ какъ главный моментъ вокругъ нея есть нуль, въ чемъ нетрудно убѣдиться, составивъ выраженія проэкцій этого момента по формуламъ (633) стр. 451-й.

Координаты точки *Ц* (по формуламъ (1021)) будутъ таковы:

$$x_ц = x_c - \lambda r_c \cos(r_c, F_1),\; y_ц = y_c - \mu r_c \cos(r_c, F_1),$$

$$z_ц = z_c - \nu r_c \cos(r_c, F_1),\; r_c \cos(r_c, F_1) = \lambda x_c + \mu y_c + \nu z_c.$$

Слѣдуетъ здѣсь замѣтить, что координаты точки C не зависятъ отъ косинусовъ λ, μ, ν, такъ что если всѣ силы совокупности, не измѣняя своихъ величинъ и точекъ приложенія, и оставаясь параллельными между собою, измѣнятъ свое направленіе, то положеніе точки C неизмѣнится.

Кромѣ того, видъ вторыхъ частей выраженій (1024) сходенъ съ видомъ выраженій ((620) стр. 426) координатъ центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Точка C называется *центромъ данной совокупности параллельныхъ силъ.*

Примѣнивъ формулы (1024) къ двумъ параллельнымъ силамъ одинаковаго направленія или противоположныхъ направленій, найдемъ извѣстныя въ элементарной механикѣ правила для такъ называемаго сложенія или разложенія двухъ параллельныхъ силъ.

Если главный векторъ данной совокупности параллельныхъ силъ равенъ нулю, т. е. если $\sum F_i = 0$, то совокупность эквивалентна парѣ силъ.

§ 167. Теорема Шаля.

Представимъ себѣ, что совокупность силъ, неудовлетворяющая условію (637), приведена къ каноническому виду; пусть $\overline{ЦВ}$ (черт. 133) есть величина и направленіе главнаго вектора, а $\overline{ЦЛ}$ — величина главнаго момента.

Проведемъ какую бы то ни было прямую линію N_1N, не пересѣкающую ось $ЦВ$ и не параллельную ей; данную совокупность можно привести къ двумъ силамъ, одна изъ которыхъ будетъ направлена вдоль по N_1N.

Пусть $Ц_1C$ есть кратчайшее разстояніе между линіею N_1N и центральною осью $Ц_1Ц$. Чтобы привести совокупность къ двумъ силамъ, одна изъ которыхъ направлена по CN, надо разложить главный векторъ $\overline{Ц_1B_1} = \overline{ЦВ}$ на двѣ параллельныя ему силы $\overline{CP_1}$ и $\overline{DQ_1}$, гдѣ D есть точка, находящаяся на продолженіи линіи $СЦ$; затѣмъ, надо составить такую пару силъ $\overline{CF'}$ и $\overline{DF'}$ въ плоскости перпендикулярной къ центральной оси, моментъ которой былъ бы равенъ $Ц_1Л_1 = ЦЛ$; силы $\overline{CP_1}$ и $\overline{CF_1}$ должны быть таковы, чтобы равнодѣйствующая ихъ $\overline{CP}$ была направлена вдоль по линіи N_1CN.

Означимъ черезъ c и d длины $\overline{Ц_1C}$ и $\overline{Ц_1D}$, черезъ P_1, Q_1 — величины силъ $\overline{CP_1}$ и $\overline{DQ_1}$, черезъ F — величины равныхъ между собою силъ $\overline{CF}$ и $\overline{DF}$, черезъ P и Q — величины силъ $\overline{CP}$ и $\overline{DQ}$, гдѣ последняя есть равнодѣйствующая силъ Q_1 и $\overline{DF}$; наконецъ черезъ α и β означимъ величины угловъ P_1CP и Q_1DQ.

Такъ какъ сила $\overline{Ц_1B}$ разложена на двѣ силы P_1 и Q_1 и такъ какъ моментъ построенной пары силъ равенъ $Л$, то должны быть удовлетворены слѣдующія равенства:

$$P_1 = \frac{d}{c+d}B, \quad Q_1 = \frac{c}{c+d}B, \quad F = \frac{Л}{c+d};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе F къ P_1 должно быть равно тангенсу угла α, т. е.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Л}{Bd}.$$

Изъ этого равенства мы опредѣлимъ величину разстоянія d, а, слѣдовательно, положеніе точки D; направленіе силы Q опредѣлится угломъ β, тангенсъ котораго равенъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Л}{Bc};$$

зная величину d, опредѣлимъ величины P_1 и Q_1 по предыдущимъ формуламъ, а затѣмъ нетрудно опредѣлить величины силъ P и Q.

(*Примѣчаніе.* Если уголъ α будетъ отрицательный, то и d будетъ отрицательное; въ этомъ случаѣ положеніе точки D и силъ P и Q будетъ такое, какъ на чертежѣ 134).

Длина c и уголъ α могутъ быть произвольны, поэтому величины, направленія и положенія силъ P и Q разнообразны до безконечности. Несмотря на это разнообразіе, *объемъ тетраэдра, у котораго два противоположныя ребра суть силы P и Q, эквивалентныя данной совокупности силъ, имѣетъ величину, независящую отъ длины d и величины угла α.*

Въ самомъ дѣлѣ, объемъ V тетраэдра $DCPQ$ (см. черт. 133) равенъ одной шестой части объема параллелопипеда, имѣющаго своими ребрами длины $\overline{DC}$, $\overline{DQ}$, $\overline{CP}$, т. е.:

$$V = \frac{1}{6}(c+d)\,PQ\sin(\alpha+\beta) = \frac{c+d}{6}(P_1+Q_1)F = \frac{1}{6}BЛ.$$

Эта теорема найдена Шалемъ.

§ 168. Совокупность силъ, приведенную къ двумъ силамъ, привести къ каноническому виду. Равновѣсіе трехъ силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу.

Если совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приведена къ двумъ силамъ P и Q, то положеніе центральной оси можетъ быть найдено слѣдующимъ образомъ.

Проведемъ кратчайшее разстояніе CD (черт. 135) между тѣми линіями, по которымъ дѣйствуютъ силы P и Q. Такъ какъ точка приложенія каждой силы, приложенной къ твердому тѣлу, можетъ быть перенесена вдоль по той линіи, по которой сила дѣйствуетъ, то примемъ C за точку приложенія силы P, а D — за точку приложенія силы Q. Построимъ въ точкѣ C главный векторъ силъ P и Q; затѣмъ выберемъ на линіи CD, или на продолженіи ея, такую точку, чтобы главный моментъ силъ P и Q вокругъ нея былъ направленъ параллельно главному вектору, т. е., чтобы главный моментъ силъ P и Q вокругъ оси $У$, проведенной черезъ эту точку перпендикулярно къ линіи DC и къ направленію главнаго вектора, былъ бы равенъ нулю. Эта точка находится между точками C и D въ томъ случаѣ, когда проэкціи силъ P и Q на направленіе параллельное главному вектору направлены въ одну сторону, какъ на чертежѣ 135; тогда точка $Ц$ дѣлитъ разстояніе DC на части $\overline{CЦ}$ и $\overline{DЦ}$ обратнопропорціональныя величинамъ проэкцій P_1 и Q_1 силъ P и Q на направленіе главнаго вектора. Если же проэкціи P_1 и Q_1 имѣютъ противоположныя направленія, то точка $Ц$ находится внѣ разстоянія DC на сторонѣ большей изъ проэкцій P_1 и Q_1, причемъ все же:

$$P_1 . \overline{CЦ} = Q_1 . \overline{DЦ}.$$

Величина момента пары равняется произведенію изъ длины DC на величину проэкціи силы P или силы Q на плоскость перпендикулярную къ главному вектору; величины этихъ проэкцій обѣихъ силъ одинаковы, но направленія ихъ прямопротивоположны. Въ случаѣ, представленномъ на чертежѣ 135-мъ, моментъ пары направленъ по главному вектору; но могутъ быть случаи, въ которыхъ моментъ пары

противоположенъ главному вектору, таковы, напримѣръ, случаи изображенные на чертежахъ 136 и 137.

Обратимъ вниманіе на случаи равновѣсія трехъ силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу; означимъ черезъ P, Q, R величины и направленія этихъ силъ.

Въ этихъ случаяхъ двѣ силы, напр. P и Q, представляютъ совокупность силъ, уравновѣшиваемую третьею силою R. Силы P и Q могутъ быть направлены по линіямъ пересѣкающимся или непересѣкающимся.

Въ первомъ случаѣ можно перенести точки приложенія силъ P и Q въ точку пересѣченія и построить ихъ равнодѣйствующую; этой равнодѣйствующей сила R должна быть равна, прямопротивоположна и направлена по одной съ нею линіи. Въ тѣхъ случаяхъ, когда силы P и Q направлены по линіямъ не пересѣкающимся, можно построить ось $ЦВ$ по правилу, приведенному въ настоящемъ параграфѣ. Такъ какъ совокупность силъ P и Q должна уравновѣситься одною силою R, то моментъ пары долженъ быть нуль, а для этого необходимо, чтобы силы P и Q были между собою параллельны или параллельно-противоположны. Сила R должна быть равна и прямопротивоположна главному вектору силъ P и Q и должна быть направлена по линіи, проходящей черезъ точку $Ц$.

Слѣдовательно, *если три силы, приложенныя къ свободному твердому тѣлу, взаимно уравновѣшиваются, то линіи, по которымъ эти силы дѣйтвуютъ, непремѣнно заключаются въ одной плоскости.*

§ 169. Положенія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла. Примѣры.

Если твердое тѣло несвободно, то шесть равенствъ, выражающихъ условія равновѣсія силъ и реакцій приложенныхъ къ тѣлу, должно разсматривать какъ уравненія равновѣсія этого тѣла.

Выраженія проэкцій (на оси координатъ) векторовъ и моментовъ реакцій тѣхъ связей, которымъ подчинено тѣло, должны быть составлены по формуламъ, приведеннымъ въ §§ 129 и 130.

Пусть p есть число связей, которымъ подчинено твердое тѣло; въ его уравненіяхъ равновѣсія будетъ заключаться p множителей λ.

Когда p менѣе шести, тогда, исключивъ изъ уравненій равновѣсія тѣла всѣ p множителей λ, получимъ $(6-p)$ *условій равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла*. Если проэкціи силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, выражены функціями координатъ тѣла, то изъ условій равновѣсія и изъ уравненій связей опредѣлимъ положенія равновѣсія тѣла. Для каждаго положенія равновѣсія можно опредѣлить значенія множителей λ изъ p уравненій равновѣсія.

Когда p равно шести, условій равновѣсія нѣтъ; положеніе тѣла вполнѣ опредѣляется изъ шести уравненій связей. Всѣ шесть множителей λ вполнѣ опредѣляются изъ шести уравненій равновѣсія.

Когда p болѣе шести, тогда уравненія равновѣсія даютъ неопредѣленныя значенія для множителей λ, а, слѣдовательно, и для реакцій связей.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 126-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, одна изъ точекъ котораго закрѣплена неподвижно.

Очевидно, такое тѣло можетъ находиться въ положеніи равновѣсія только при условіи, чтобы совокупность приложенныхъ къ нему задаваемыхъ силъ приводилась къ одной силѣ, направленной черезъ точку опоры; поэтому, если принять эту точку за начало координатъ, условія равновѣсія тѣла выразятся такъ:

$$Л_x = 0, \quad Л_y = 0, \quad Л_z = 0;$$

проэкціи же на оси координатъ реакціи опоры выразятся отрицательно взятыми проэкціями главнаго вектора задаваемыхъ силъ:

$$\lambda_1 = R\cos(R, X) = -B_x, \quad \lambda_2 = R\cos(R, У) = -B_y,$$

$$\lambda_3 = R\cos(R, Z) = -B_z.$$

Примѣръ 127-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную постоянную ось, вокругъ которой оно можетъ вращаться и вдоль которой оно можетъ скользить.

Очевидно, такое тѣло можетъ находиться въ положеніи равновѣсія только при условіяхъ, чтобы главный векторъ совокупности задаваемыхъ силъ былъ перпендикуляренъ къ неподвижной оси и чтобы главный моментъ силъ вокругъ нея былъ равенъ нулю; выведемъ эти условія изъ уравненій равновѣсія.

Уравненія четырехъ связей, стѣсняющихъ свободу тѣла, получимъ, выразивъ, что координаты двухъ точекъ тѣла остаются на неподвижной оси. Пусть эти точки суть: точка $Ю$ ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$) и точка K($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = l$) (см. стр. 674); возьмемъ неподвижную ось за ось $Z^{овъ}$ и выразимъ, что абсолютныя координаты $x_ю$, $y_ю$, x_K, y_K равны нулю:

$$x_ю = 0,\ y_ю = 0,\ x_ю + l\nu_x = 0,\ y_ю + l\nu_y = 0,$$

это и будутъ уравненія связей.

Составляя уравненія равновѣсія, возьмемъ за центръ моментовъ точку $Ю$; выраженія проэкцій моментовъ реакцій связей составимъ по формуламъ (869) стр. 614, принимая во вниманіе, что $\nu_z = 1$. Означивъ черезъ λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 множителей первой, второй, третьей и четвертой связей, составимъ слѣдующія уравненія равновѣсія твердаго тѣла:

$$B_x + \lambda_1 + \lambda_3 = 0,\ B_y + \lambda_2 + \lambda_4 = 0,\ B_z = 0,$$

$$(Л_ю)_x - l\lambda_4 = 0,\ (Л_ю)_y + l\lambda_3 = 0,\ (Л_ю)_z = 0.$$

Третье и шестое изъ этихъ уравненій, незаключающія множителей $\lambda_1, \ldots\ldots \lambda_4$, суть условія равновѣсія.

Давленія точекъ $Ю$ и K на ось $Z^{овъ}$ направлены перпендикулярно къ этой оси. Означимъ черезъ $D_ю$ и D_K величины и направленія этихъ давленій; проэкціи ихъ на оси $X^{овъ}$ и $У^{овъ}$ выразятся такъ:

$$D_ю \cos(D_ю, X) = -\lambda_1 = B_x - \frac{(Л_ю)_y}{l},$$

$$D_ю \cos(D_ю, У) = -\lambda_2 = B_y + \frac{(Л_ю)_x}{l},$$

$$D_K \cos(D_K, X) = -\lambda_3 = \frac{(Л_ю)_y}{l},\ D_K \cos(D_K, У) = -\lambda_4 = -\frac{(Л_ю)_x}{l}.$$

Примѣръ 128-й. Если тѣло можетъ только вращаться вокругъ неподвижной оси, но не можетъ скользить вдоль нея, то къ предыдущимъ четыремъ связямъ присоединяется пятая: $z_\omega = 0$ и уравненіе равновѣсія будетъ только одно, выражающее, что моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ неподвижной оси долженъ быть равенъ нулю.

Примѣръ 129-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося одною точкою на данную неподвижную поверхность:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Въ § 130-мъ было найдено, что если твердое тѣло опирается на поверхность въ одной только точкѣ, то реакція связи есть сила, приложенная къ той точкѣ тѣла, которою оно опирается на поверхность. Эта сила направлена по нормали къ поверхности $f = 0$, возстановленной въ точкѣ прикосновенія ея съ тѣломъ, т. е. въ точкѣ опоры послѣдняго.

Составимъ уравненія равновѣсія тѣла, принимая за центръ моментовъ точку опоры тѣла; означимъ координаты ея такъ: x_0, y_0, z_0.

$$B_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0,\ B_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0,\ B_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0, \ldots \quad \mathbf{(1025)}$$

$$(Л_0)_x = 0,\ (Л_0)_y = 0,\ (Л_0)_z = 0 \ldots\ldots \quad \mathbf{(1026)}$$

Условій равновѣсія—пять; три изъ нихъ суть равенства (1026), выражающія, что главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ точки опоры долженъ быть равенъ нулю; два другія условія равновѣсія получатся по исключеніи λ изъ первыхъ трехъ уравненій равновѣсія (1025); они таковы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{1}{B_x} = \frac{\partial f}{\partial y_0} \frac{1}{B_y} = \frac{\partial f}{\partial z_0} \frac{1}{B_z} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(1027)}$$

и выражаютъ, что главный векторъ задаваемыхъ силъ долженъ быть направленъ по нормали къ поверхности.

Уравненія (1025) сходны съ уравненіями (423) (стр. 261) равновѣсія матерьяльной точки на гладкой поверхности.

Если поверхность неудерживающая, такъ что твердое тѣло можетъ отдѣлиться отъ поверхности, то (по аналогіи съ условіями равновѣсія матерьяльной точки на неудерживающей поверхности) необходимо, чтобы главный векторъ задаваемыхъ силъ былъ направленъ по отрицательной нормали.

Слѣдовательно, *твердое тѣло, опирающееся на данную неподвижную поверхность въ одной точкѣ, можетъ находиться въ положеніи равновѣсія только при условіи, чтобы совокупность задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, приводилась къ одной силѣ, направленной по нормали къ поверхности, возстановленной въ точкѣ опоры тѣла; притомъ, если поверхность неудерживающая, то вышесказанная сила должна быть направлена въ сторону отрицательной нормали.*

Когда положеніе равновѣсія тѣла не извѣстно, но извѣстна форма его поверхности и задаваемыя силы суть данныя функціи координатъ точекъ ихъ приложенія, тогда положенія равновѣсія твердаго тѣла придется опредѣлять изъ уравненія его поверхности, изъ уравненія $f = 0$ и изъ пяти условій равновѣсія.

Примѣръ 130-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося двумя точками на плоскость.

Совокупность задаваемыхъ силъ должна уравновѣшиваться съ двумя параллельными между собою и перпендикулярными къ плоскости реакціями послѣдней, приложенными къ тѣмъ точкамъ тѣла, которыми оно опирается на плоскость; такъ какъ двѣ параллельныя силы могутъ быть уравновѣшены одною силою, то совокупность задаваемыхъ силъ должна приводиться къ одной силѣ.

Эта сила должна быть перпендикулярна къ плоскости и должна пересѣкать прямую линію, проведенную черезъ опорныя точки A и B тѣла. Если тѣло опирается въ обѣихъ точкахъ съ одной стороны плоскости (какъ на черт. 138), то сила, эквивалентная совокупности задаваемыхъ силъ, должна пересѣкать прямую AB между опорными точками A и B; если же тѣло опирается въ одной точкѣ по одну, а въ другой — по другую сторону плоскости (какъ на чертежѣ 139-мъ), то эта сила должна пересѣкать прямую внѣ разстоянія AB.

Примѣръ 131-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося тремя точками на плоскость; во всѣхъ трехъ — по одну сторону плоскости.

Въ этомъ случаѣ реакціи суть три параллельныя между собою (и перпендикулярныя къ плоскости) силы, направленныя въ одну сторону; поэтому совокупность задаваемыхъ силъ должна привестись къ одной силѣ, перпендикулярной къ плоскости и направленной черезъ центръ этихъ трехъ параллельныхъ реакцій. Означимъ черезъ P величину этой силы, расположимъ оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ въ разсматриваемой плоскости, на которую опирается тѣло и означимъ черезъ x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 координаты опорныхъ точекъ, а черезъ α и β — координаты центра трехъ параллельныхъ реакцій, чрезъ который, по вышесказанному, должно проходить направленіе силы P.

Такъ какъ всѣ три реакціи направлены въ одну сторону, то точка (α, β) можетъ находиться либо внутри, либо на периметрѣ треугольника, образуемаго точками (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3); слѣдовательно, направленіе силы P не должно пересѣкать плоскости внѣ площади этого треугольника.

Если величина силы P и координаты α и β извѣстны, то величины реакцій въ опорныхъ точкахъ опредѣлятся изъ слѣдующихъ трехъ равенствъ:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = P\alpha, \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = P\beta,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = P;$$

эти уравненія даютъ вполнѣ опредѣленныя значенія для величинъ λ.

Обратимъ еще вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ твердое тѣло находится въ положеніи равновѣсія, опираясь на плоскость четырьмя или большимъ числомъ точекъ.

Возьмемъ эту плоскость за плоскость XY и составимъ уравненія равновѣсія твердаго тѣла; они будутъ таковы:

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad Л_z = 0,$$

$$B_z + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n = 0,$$

$$Л_x + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots\ldots + \lambda_n y_n = 0,$$

$$Л_y - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots\ldots - \lambda_n x_n = 0.$$

Первыя три равенства, незаключающія реакцій λ, представляютъ условія равновѣсія тѣла; они выражаютъ, что совокупность задаваемыхъ силъ должна приводиться къ одной силѣ, перпендикулярной къ плоскости XY. Пусть P есть проэкція этой силы на отрицательную ось $Z^{\text{овъ}}$, а α и β — координаты слѣда этой силы на плоскости XY; если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\lambda_n$ суть реакціи по положительной оси $Z^{\text{овъ}}$, то послѣднія три уравненія получатъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n &= P, \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots\ldots + \lambda_n y_n &= P\beta, \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n &= P\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1028)$$

Зная P, α, β, мы не будемъ въ состояніи получить изъ этихъ уравненій опредѣленныхъ значеній для величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, такъ какъ число послѣднихъ болѣе числа уравненій.

Эта неопредѣленность можетъ быть устранена, если примемъ въ разсчетъ упругія деформаціи нажимаемаго тѣла или плоскости; для примѣра, приведемъ рѣшеніе слѣдующаго вопроса.

Примѣръ 132-й. На твердой горизонтальной плоскости стоитъ столъ, состоящій изъ твердой доски, опирающейся на n вертикальныхъ ножекъ равной длины; эти ножки предполагаются упругими и имѣютъ равныя длины только въ ненапряженномъ состояніи. Предполагается, что доска стола не имѣетъ вѣса, такъ что, если бы на нее не было ничего положено, то она была бы горизонтальна и всѣ ножки имѣли бы равныя длины l.

На доску положены грузы, центръ давленій которыхъ имѣетъ на горизонтальной плоскости координаты α и β; сумма вѣсовъ грузовъ равна P. Вслѣдствіе давленія этихъ грузовъ, ножки укоротятся, причемъ доска можетъ искривиться и наклониться къ горизонту, но мы будемъ предполагать, что доска вполнѣ тверда и не искривляется при наложеніи грузовъ, но только наклоняется къ горизонту, причемъ ножки, не сдвигаясь съ мѣста, остаются вертикальными. Требуется узнать рас-

предѣленіе давленій на ножки стола, предполагая, что извѣстны модули упругости и площади поперечныхъ сѣченій всѣхъ ножекъ.

Пусть $z=0$ есть уравненіе плоскости доски до наложенія на нее грузовъ и $z=ax+by+c$ *) — уравненіе ея плоскости при обремененіи стола грузами; коэфиціенты a, b и c намъ еще не извѣстны. Означимъ черезъ E_i модуль упругости i-той ножки, черезъ ω_i — площадь ея поперечнаго сѣченія, черезъ λ_i — величину вертикальнаго давленія, сжимающаго эту ножку, черезъ x_i и y_i — координаты слѣда ножки на горизонтальной плоскости.

Величина сжатія этой ножки выразится величиною ординаты $z_i=ax_i+by_i+c$; а величина давленія λ_i, производящаго такое сжатіе, опредѣлится по извѣстной формулѣ для упругихъ растяженій и сжатій стержней:

$$\lambda_i=\frac{E_i\omega_i}{l}(ax_i+by_i+c).$$

Подставимъ эти выраженія для λ_i въ равенства (1028), получимъ:

$$a\sum q_ix_i+b\sum q_iy_i+c\sum q_i=P,$$

$$a\sum q_ix_iy_i+b\sum q_iy_i^2+c\sum q_iy_i=P\beta,$$

$$a\sum q_ix_i^2+b\sum q_ix_iy_i+c\sum q_ix_i=P\alpha;\ q_i=\frac{E_i\omega_i}{l}.$$

Эти три уравненія, служащія для опредѣленія коэфиціентовъ a, b, c, получатъ замѣтное упрощеніе, если за начало координатъ возьмемъ центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, совпадающихъ со слѣдами ножекъ на горизонтальной плоскости и имѣющихъ массы пропорціональныя величинамъ q_1, q_2, ... q_n; кромѣ того, за оси координатъ Xовъ и Yовъ примемъ главныя оси инерціи этой системы воображаемыхъ точекъ; тогда получимъ:

$$a=\frac{P\alpha}{\Sigma q_ix_i^2},\quad b=\frac{P\beta}{\Sigma q_iy_i^2},\quad c=\frac{P}{\Sigma q_i}.$$

Подставивъ эти величины въ выраженія для λ_1, λ_2, .. λ_n, получимъ вполнѣ опредѣленныя значенія для величинъ λ; но при этомъ можетъ

---

*) Положительная ось Zовъ направлена внизъ.

оказаться, что нѣкоторыя изъ величинъ λ имѣютъ отрицательныя значенія; это будетъ значить, что соотвѣтствующія ножки должны подвергаться не сжатію, а растяженію, причемъ нижніе концы ихъ должны быть прикрѣплены къ плоскости, а не должны опираться на нее сверху.

Если же намъ извѣстно, что всѣ ножки стола только опираются на горизонтальную плоскость сверху, такъ что ни одна изъ нихъ не можетъ подвергаться растяженію, то рѣшеніе, дающее отрицательныя величины для нѣкоторыхъ λ, должно быть признано неудовлетворительнымъ.

Во всякомъ случаѣ, для каждаго стола можетъ быть найдено условіе относительно положенія центра инерціи грузовъ, при соблюденіи котораго всѣ λ будутъ положительны; напримѣръ, возьмемъ случай стола, стоящаго на четырехъ ножкахъ равнаго поперечнаго сѣченія и равнаго модуля упругости, расположенныхъ въ вершинахъ прямоугольника длины $2A$ и ширины $2B$.

Въ этомъ случаѣ:

$$a = \frac{P\alpha}{4q\,A^2}, \quad b = \frac{P\beta}{4q\,B^2}, \quad c = \frac{P}{4q};$$

давленія на ножки будутъ таковы:

$$\lambda_1 = \frac{P}{4}\left(\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + 1\right), \quad \lambda_2 = \frac{P}{4}\left(\frac{-\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + 1\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{P}{4}\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} + 1\right), \quad \lambda_4 = \frac{P}{4}\left(\frac{-\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} + 1\right).$$

Всѣ эти давленія будутъ положительны, если точка (α, β) будетъ находиться внутри ромба, вершины котораго суть середины сторонъ прямоугольника.

§ 170. Положенія равновѣсія какой либо системы, подверженной дѣйствію силъ, имѣющихъ потенціалъ. Критеріумъ устойчивости равновѣсія.

При выводѣ условій равновѣсія какой либо системы, составленной изъ матерьяльныхъ точекъ или сплошныхъ тѣлъ, можно начать съ составленія равенства (567, b) стр. 399, выражающаго начало возможныхъ перемѣщеній; затѣмъ надо выразить возможныя варьяціи координатъ точекъ и твердыхъ тѣлъ помощью варьяцій отъ незави-

симыхъ координатныхъ параметровъ (см. формулы (564) на стр. 382); подставивъ эти выраженія въ равенство (567, b) и приравнявъ въ немъ нулю коэфиціенты варьяцій; получимъ условія равновѣсія.

Примѣръ 133-й. Бифиляръ. Тяжелый однородный стержень длины $2c$ и вѣса P подвѣшенъ за концы D и E (черт. 140) на двухъ нерастяжимыхъ нитяхъ AD и BE равной длины l; верхніе концы этихъ нитей прикрѣплены къ точкамъ A и B, находящимся на одномъ горизонтѣ въ разстояніи $2a$ одна отъ другой. Если къ стержню не приложено никакихъ силъ, за исключеніемъ силы тяжести, то онъ можетъ быть въ покоѣ въ горизонтальномъ положеніи, причемъ нити натянуты, середина C находится на вертикальной линіи подъ точкою O (серединою длины AB) и самъ стержень параллеленъ длинѣ AB.

Если къ стержню, кромѣ его вѣса, приложена пара силъ, дѣйствующая въ горизонтальной плоскости и имѣющая моментъ $Л$, то стержень будетъ имѣть иное положеніе равновѣсія, причемъ точка C будетъ имѣть нѣкоторое положеніе C_1 на вертикальной линіи OC, а стержень будетъ составлять нѣкоторый уголъ φ съ прежнею вертикальною плоскостью или съ линіею C_1K, параллельною линіи OA. Опредѣлить величину этого угла φ.

Составимъ по формулѣ (763) стр. 544-й и 589-й выраженіе работы, совершаемой задаваемыми силами при ничтожно-маломъ возможномъ перемѣщеніи стержня ED; такъ какъ здѣсь главный векторъ задаваемыхъ силъ равенъ силѣ тяжести стержня и направленъ по оси $Z^{овъ}$ (внизъ), а главный моментъ ихъ вокругъ C равенъ $Л$ и направленъ вверхъ, то выраженіе (763) будетъ здѣсь имѣть слѣдующій видъ:

$$P\varepsilon_c \cos(\varepsilon_c, Z) - Л\theta\cos(\theta, Z),$$

гдѣ ε_c есть возможное перемѣщеніе центра инерціи стержня, а θ — возможное угловое перемѣщеніе стержня; знакъ минусъ поставленъ передъ вторымъ членомъ потому, что моментъ $Л$ направленъ вверхъ, противоположно положительной оси $Z^{овъ}$.

Такъ какъ проэкція ε_c на ось $Z^{овъ}$ равна δz_c, а проэкція θ на ось $Z^{овъ}$ равна θ_z, а по третьей изъ формулъ (747) стр. 538 оказывается, что въ настоящемъ случаѣ $\theta_z = -\delta\varphi$, потому что теперь $\phi = \frac{\pi}{2}$, $ж = -\varphi$, то равенство (567, b) получитъ такой видъ:

$$P\delta z_c + Л\delta\varphi = 0.$$

Нити AD и BE нерастяжимы, такъ что длина AD_1 остается постоянно равною l; слѣдовательно, уголъ φ и ордината z_c центра инерціи стержня связаны между собою равенствомъ:

$$z_c^2 + a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2 - l^2 = 0,$$

изъ котораго составимъ слѣдующую зависимость между возможными варьяціями δz_c и $\delta\varphi$:

$$z_c\delta z_c + ac\,\delta\varphi\sin\varphi = 0.$$

Исключивъ δz_c изъ составленныхъ двухъ равенствъ, получимъ:

$$(Лz_c - acP\sin\varphi)\,\delta\varphi = 0,$$

откуда:

$$\sin\varphi = \frac{Л}{P}\frac{z_c}{ac} = \frac{Л}{Pac}\sqrt{l^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos\varphi}.$$

Если l весьма велика сравнительно съ a и c, то довольствуются приближеннымъ выраженіемъ для $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{Лl}{Pac}.$$

Примѣръ 134-й. Однородная тяжелая сфера радіуса R и массы M находится на наклонной плоскости, составляющей уголъ J съ горизонтомъ; по поверхности этой сферы можетъ свободно перемѣщаться точка массы m, подверженная силѣ тяжести и притяженію къ нѣкоторой точкѣ O наклонной плоскости; сила притяженія имѣетъ величину $\mu^2 mr$, гдѣ r — разстояніе точки m отъ точки O. Опредѣлить положеніе равновѣсія этой системы.

Оси ординатъ расположимъ такъ: OX по линіи наибольшаго наклона внизъ (черт. 141), ось OY — горизонтально, ось OZ — перпендикулярно къ наклонной плоскости, вверхъ.

Шаръ долженъ постоянно оставаться на наклонной плоскости, поэтому $z_c = R$; прочія координаты шара, именно: x_c, y_c, $ф$, $ж$ и $э$ могутъ быть какія угодно.

Положеніе точки m на поверхности сферы выразимъ въ сферическихъ координатахъ φ и ψ, принимая за полярную ось — направленіе, проведенное изъ C параллельно положительной оси $Z^{овъ}$, а за плоскость перваго меридіана — плоскость параллельную плоскости ZX.

Составимъ теперь выраженіе работы вѣса шара при ничтожно-маломъ возможномъ перемѣщеніи его; оно будетъ:

$$Mg\,\delta x_c \sin J; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(1029)}$$

далѣе, составимъ выраженіе работы, совершаемой приложенными къ точкѣ m силами на протяженіи ничтожно-малаго возможнаго перемѣщенія этой точки; оно будетъ:

$$mg(\delta x \sin J - \delta z \cos J) - \mu^2 m(x\delta x + y\delta y + z\delta z), \ldots \quad \mathbf{(1030)}$$

гдѣ x, y, z суть координаты точки m, которыя могутъ быть выражены въ независимыхъ координатныхъ параметрахъ x_c, y_c, φ, ψ слѣдующимъ образомъ:

$$x = x_c + R\sin\varphi\cos\psi,\quad y = y_c + R\sin\varphi\sin\psi,$$

$$z = R + R\cos\varphi.$$

Изъ послѣднихъ выраженій слѣдуетъ:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x_c^2 + y_c^2 + 2R^2 + 2R^2\cos\varphi +$$

$$+ 2R\sin\varphi(x_c\cos\psi + y_c\sin\psi).$$

Теперь надо взять сумму выраженій (1029) и (1030), приравнять ее нулю и выразить варьяціи δx, δy, δz посредствомъ независимыхъ варьяцій δx_c, δy_c, $\delta\varphi$, $\delta\psi$; а именно:

$$\delta x \sin J - \delta z \cos J = \delta x_c \sin J - R\sin\varphi\sin\psi\sin J\,\delta\psi$$

$$+ R(\cos\varphi\cos\psi\sin J + \sin\varphi\cos J)\,\delta\varphi$$

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = r\delta r = \delta x_c (x_c + R\sin\varphi\cos\psi) +$$

$$+ \delta y_c (y_c + R\sin\varphi\sin\psi) + R\,\delta\psi \sin\varphi (y_c\cos\psi - x_c\sin\psi) +$$

$$+ R\,\delta\varphi\, ((x_c\cos\psi + y_c\sin\psi)\cos\varphi - R\sin\varphi);$$

тогда получимъ равенство:

$$\Big[(M + m)\, g\sin J - \mu^2 m (x_c + R\sin\varphi\cos\psi)\Big]\,\delta x_c -$$

$$- \mu^2 m (y_c + R\sin\varphi\sin\psi)\,\delta y_c +$$

$$+ mR\Big[\cos\varphi(\cos\psi(g\sin J - \mu^2 x_c) - \mu^2 y_c\sin\psi) + \sin\varphi(g\cos J + \mu^2 R)\Big]\delta\varphi -$$

$$- mR\sin\varphi\Big[\sin\psi(g\sin J - \mu^2 x_c) + \mu^2 y_c\cos\psi\Big]\,\delta\psi = 0.$$

Приравнявъ нулю коэфиціенты варьяцій δx_c, δy_c, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, получимъ четыре условія равновѣсія системы — четыре равенства, изъ которыхъ опредѣлимъ значенія x_c, y_c, φ и ψ при положеніяхъ равновѣсія системы.

Исключивъ x_c и y_c изъ перваго, втораго и четвертаго равенствъ, получимъ:

$$Mg\sin J\sin\psi = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что $\psi = 0$ или $\psi = \pi$.

Вслѣдствіе этого, первое, второе и третье равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$x_c \pm R\sin\varphi = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{g}{\mu^2}\sin J,\ y_c = 0,$$

$$\mu^2 R\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi) + g\sin\varphi\cos J \mp g\,\frac{M}{m}\cos\varphi\sin J = 0,$$

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ положеніямъ, при которыхъ $\psi = 0$, а нижніе — положеніямъ, при которыхъ $\psi = \pi$.

Послѣднее изъ трехъ предыдущихъ равенствъ служитъ уравненіемъ для опредѣленія значеній φ при положеніяхъ равновѣсія.

Обратимъ вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ вся совокупность задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ системѣ, имѣетъ потенціалъ.

Въ этихъ случаяхъ, если всѣ связи удерживающія, то положенія равновѣсія системы суть тѣ положенія, при которыхъ полная возможная варьяція перваго порядка отъ потенціала равна нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этихъ случаяхъ равенство (567, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0,$$

то есть:

$$\delta U = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1031)}$$

гдѣ U есть потенціалъ задаваемыхъ силъ.

Если выразимъ декартовы координаты системы функціями независимыхъ координатныхъ параметровъ, вслѣдствіе чего U тоже выразится функціею этихъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots . \partial q_n$, и примемъ во вниманіе, что варьяціи $\delta q_1, \delta q_2, \ldots\ldots . q_n$ произвольны, то изъ равенства (1031) получимъ слѣдующія условія равновѣсія системы:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \ldots\ldots . \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \ldots . . \textbf{(1032)}$$

Если нѣкоторыя изъ связей принадлежатъ къ неудерживающимъ, то положенія равновѣсія системы суть тѣ положенія, при выходѣ изъ которыхъ $\delta U = 0$ для всѣхъ возможныхъ варьяцій, не ослабляющихъ ни одной изъ неудерживающихъ связей, и $\delta U < 0$ для такихъ возможныхъ варьяцій, при которыхъ одна или нѣсколько неудерживающихъ связей ослабѣваютъ.

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots . . \varkappa_n$ есть одна изъ совокупностей значеній величинъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots\ldots . q_n$, обращающая полную варьяцію δU въ нуль; пусть U_e есть значеніе, получаемое функціею U при этихъ величинахъ координатныхъ параметровъ.

Составимъ выраженіе полной варьяціи втораго порядка отъ U, т. е.:

$$\delta^2 U = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^2} (\delta q_k)^2 + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \, \partial q_j} \delta q_k \delta q_j$$

и подставимъ въ него вышесказанныя величины $\varkappa_1$, $\varkappa_2, \ldots \varkappa_\kappa$ вмѣсто $q_1, q_2, \ldots q_\kappa$; если окажется, что $\delta^2 U$, при всякихъ значеніяхъ возможныхъ варьяцій $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_\kappa$, имѣетъ знакъ отрицательный, то это будетъ значить, что U_e есть максимумъ.

Примѣчаніе 1-е. Варьяцію $\delta^2 U$ можно представить въ видѣ слѣдующей суммы κ членовъ:

$$\delta^2 U = Q_1 \varepsilon_1^2 + Q_2 \varepsilon_2^2 + Q_3 \varepsilon_3^2 + \ldots + Q_\kappa \varepsilon_\kappa^2, \ldots \quad (1033)$$

гдѣ:

$$Q_1 = U_{11}, \quad \varepsilon_1 = \delta q_1 + \frac{U_{12}}{U_{11}} \delta q_2 + \ldots + \frac{U_{1\kappa}}{U_{11}} \delta q_\kappa,$$

$$Q_2 = U_{22} - \frac{U_{12}^2}{U_{11}}, \quad \varepsilon_2 = \delta q_2 + B_{23} \delta q_3 + \ldots + B_{2\kappa} \delta q_\kappa,$$

$$B_{23} = \frac{1}{Q_2} \left(U_{23} - \frac{U_{12} U_{12}}{U_{11}} \right), \ldots$$

$$Q_3 = U_{33} - \frac{U_{13}^2}{U_{11}} - \frac{B_{23}^2}{Q_2}, \quad \varepsilon_3 = \delta q_3 + C_{34} \delta q_4 + \ldots + C_{3\kappa} \delta q_\kappa,$$

. . . .

$$Q_\kappa = U_{\kappa\kappa} - \frac{U_{1\kappa}^2}{U_{11}} - \frac{B_{2\kappa}^2}{Q_2} - \frac{C_{3\kappa}^2}{Q_3} - \ldots, \quad \varepsilon_\kappa = \delta q_\kappa,$$

$U_{11}, U_{12}, \ldots$ означаютъ здѣсь частныя производныя втораго порядка отъ U по координатнымъ параметрамъ.

Для того, чтобы U_e было максимумомъ, надо, чтобы всѣ величины $Q_1, Q_2, \ldots Q_\kappa$ были отрицательныя.

Примѣчаніе 2-е. Если при $q_1 = \varkappa_1$, $q_2 = \varkappa_2, \ldots q_\kappa = \varkappa_\kappa$ величина U_e есть максимумъ сплошной функціи U, то, при $q_1 = \varkappa_1 + \alpha_1$, $q_2 = \varkappa_2 + \alpha_2, \ldots q_\kappa = \varkappa_\kappa + \alpha_\kappa$, гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ суть безконечно-малыя величины перваго порядка, значеніе функціи U будетъ менѣе величины U_e на безконечно-малую величину втораго порядка.

Обратно, тѣ значенія координатныхъ параметровъ, при которыхъ U менѣе U_e на безконечно-малую величину втораго порядка,

разнятся отъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ безконечно-малыми величинами перваго порядка; это слѣдуетъ изъ того, что величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots,$ заключающіяся въ выраженіи (1033), суть линейныя однородныя функціи приращеній $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$.

Можно доказать, что тѣ положенія системы, при которыхъ U имѣетъ максимумъ, суть *положенія устойчиваго равновѣсія*. Предварительно слѣдуетъ сказать, какимъ образомъ судятъ объ устойчивости или неустойчивости положеній равновѣсія.

Сужденіе объ этомъ составляется по характеру движенія, получаемаго системою послѣ незначительнаго отклоненія ея изъ положенія равновѣсія и послѣ сообщенія ничтожныхъ скоростей ея точкамъ; если, при всякихъ ничтожно-малыхъ отклоненіяхъ и скоростяхъ, движеніе получаетъ характеръ ничтожно-малыхъ колебаній около положенія равновѣсія, то послѣднее — устойчиво. Если же, даже не при всѣхъ, а только при нѣкоторыхъ начальныхъ ничтожно-малыхъ отклоненіяхъ или скоростяхъ, система все болѣе и болѣе отклоняется отъ положенія равновѣсія, то послѣднее — неустойчиво.

Согласно съ этимъ, для изслѣдованія устойчивости положенія $q_1 = x_1, \; q_2 = x_2, \ldots \ldots q_n = x_n$, надо дать точкамъ системы какія либо безконечно-малыя начальныя отклоненія и сообщить имъ безконечно-малыя начальныя скорости; если убѣдимся, что, при полученномъ вслѣдствіе этого движеніи, отклоненія системы отъ положенія равновѣсія не превзойдутъ нѣкоторыхъ безконечно-малыхъ предѣловъ, то должны будемъ заключить, что положеніе равновѣсія — устойчиво.

Пусть T_0 есть начальная живая сила, U_0 — начальная величина функціи U; T_0 и $(U_e - U_0)$ суть безконечно-малыя положительныя величины втораго порядка, такъ что сумма ихъ, которую мы означимъ черезъ β_2, есть тоже безконечно-малая величина втораго порядка малости; отсюда:

$$U_0 - T_0 = U_e - \beta_2.$$

Движенія системы должны удовлетворять закону живой силы:

$$T = U - U_0 + T_0,$$

а такъ какъ T не можетъ быть менѣе нуля, то U никогда не можетъ быть менѣе $(U_0 - T_0)$, то есть $(U_e - U)$ не можетъ болѣе β_2; на основаніи примѣчанія 2-го мы должны отсюда заключить, что отклоненія точекъ системы отъ положеній равновѣсія не выходятъ изъ безконечно-малыхъ предѣловъ.

И такъ, *тѣ положенія равновѣсія системы, при которыхъ U есть максимумъ, суть положенія устойчивыя.*

§ 171. Примѣры.

Приводимъ рядъ примѣровъ опредѣленія условій и положеній равновѣсія несвободныхъ твердыхъ тѣлъ и системъ.

Примѣръ 135-й. Тяжелый однородный стержень вѣса P и длины $2l$ опирается однимъ концомъ A въ неподвижную точку; къ другому концу B приложена сила Q, направленная въ вертикальной плоскости подъ угломъ α къ стержню (см. черт. 142); какъ велика должна быть сила Q для того, чтобы стержень составлялъ уголъ θ съ горизонтомъ и уголъ $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ съ вертикальною линіею, направленною вверхъ? Опредѣлить также величину и направленіе реакціи λ точки опоры конца A.

Означимъ черезъ P вѣсъ стержня. Уравненіе моментовъ силъ вокругъ точки A будетъ:

$$lP\cos\theta = 2Ql\sin\alpha;$$

отсюда опредѣлимъ Q. Проэкціи реакціи точки опоры на оси координатъ опредѣлятся изъ уравненій:

$$\lambda\cos(\lambda,\ X) = -Q\cos(\alpha + \theta),$$

$$\lambda\cos(\lambda,\ Y) = Q\sin(\alpha + \theta) - P.$$

Примѣръ 136-й. Стержень вѣса P опирается однимъ концомъ A въ неподвижную точку, другимъ концомъ B въ вертикальную стѣну (черт. 143). Опредѣлить давленія концовъ стержня на стѣну и точку опоры.

Они опредѣлятся изъ равенствъ:

$$D_1 = -D\cos(D,\ X),\ \ D\cos(D,\ Y) = P,$$

$$P\overline{AC}\cos\alpha = D\overline{AB}\sin\alpha.$$

Примѣръ 137-й. Стержень ACA_1A_2B вѣса P (центръ тяжести его — въ точкѣ C) опирается концомъ A на горизонтальную плоскость, а боковою поверхностью на неподвижный горизонтальный болтъ A_2, перпендикулярный къ длинѣ стержня; другимъ такимъ же болтомъ A_1 стержень придерживается сверху (см. черт. 144). Опредѣлить давленія D, D_1 и D_2 стержня на плоскость, на болтъ A_1 и на болтъ A_2.

Означимъ черезъ Λ, λ_1 и λ_2 реакціи плоскости, болта A_1 и болта A_2; составимъ три уравненія равновѣсія силъ и реакцій, приложенныхъ къ стержню, причемъ за центръ моментовъ примемъ точку A:

$$\Lambda \sin\alpha = P\sin\alpha, \quad \Lambda\cos\alpha - P\cos\alpha + \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$

$$\overline{AC}P\cos\alpha + \lambda_1\overline{AA_1} - \lambda_2\overline{AA_2} = 0.$$

Отсюда:

$$D = \Lambda = P, \; D_1 = D_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1A_2}} P\cos\alpha.$$

Примѣръ 138-й. Стержень AB (черт. 145), неимѣющій вѣса, опирается концомъ A въ неподвижную точку опоры и поддерживается въ горизонтальномъ положеніи концомъ D другаго стержня, опирающагося концомъ C въ неподвижную точку. Точки A и C находятся на одной вертикальной линіи и конецъ D стержня CD опирается въ опредѣленную точку стержня AB и не можетъ скользить вдоль по длинѣ послѣдняго. Къ концу B стержня AB привѣшенъ грузъ Q; опредѣлить величины и направленія давленій: стержня BA на точку A, стержня DC на точку C и того же стержня на точку D стержня AB.

Вмѣсто давленій мы опредѣлимъ величины и направленія равныхъ и противоположныхъ имъ реакцій. Пусть λ_1 означаетъ величину и направленіе реакціи точки опоры конца A, λ_2 — реакцію точки опоры конца C, Λ — величину и направленіе реакціи конца D стержня CD; со стороны стержня AB на конецъ D стержня CD дѣйствуетъ реакція равная и противоположная реакціи Λ.

Составивъ уравненія равновѣсія стержня CD, мы найдемъ, что λ_2 направлено по CD, Λ — по продолженію CD и что $\Lambda = \lambda_2$.

Составимъ уравненія равновѣсія стержня AB:

$$\Lambda\cos\alpha + \lambda_1\cos(\lambda_1, X) = 0, \quad \Lambda\sin\alpha = Q + \lambda_1\sin(\lambda_1, Y),$$

$$Q.\overline{AB} = \Lambda\,\overline{AD}\sin\alpha.$$

Отсюда:

$$\Lambda = Q\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}\sin\alpha}; \quad \lambda_1\cos(\lambda_1, X) = -Q\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\operatorname{cotg}\alpha,$$

$$\lambda_1\sin(\lambda_1, Y) = Q\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}.$$

Примѣръ 139-й. Найти положеніе равновѣсія тяжелаго однороднаго стержня (вѣсъ P, длина $2l$), опирающагося на болтъ O (черт. 146) и упирающагося концомъ A въ вертикальную стѣну A, которая отстоитъ отъ болта O въ разстояніи b; къ концу B привѣшенъ грузъ Q.

Пусть k есть длина нити, на которой привѣшенъ грузъ Q; означимъ черезъ θ уголъ XOB.

Потенціалъ силъ, дѣйствующихъ на систему, будетъ:

$$U = -P(l\sin\theta - b\operatorname{tg}\theta) + Q(k - 2l\sin\theta + b\operatorname{tg}\theta).$$

Составимъ выраженія первой и второй варьяцій отъ U:

$$\delta U = \left[\frac{b(P+Q)}{\cos^2\theta} - l(P+2Q)\cos\theta\right]\delta\theta,$$

$$\delta^2 U = \left[\frac{2b(P+Q)}{\cos^3\theta} + l(P+2Q)\right]\sin\theta(\delta\theta)^2.$$

Отсюда оказывается, что положеніе равновѣсія будетъ при углѣ θ, косинусъ котораго равенъ:

$$\cos\theta = \left(\frac{b(P+Q)}{l(P+2Q)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

При этомъ углѣ:

$$\delta^2 U = 3l(P+2Q)(\delta\theta)^2\sin\theta;$$

т. е. $\delta^2 U > 0$; слѣдовательно, положеніе неустойчивое.

Примѣръ 140-й. Тяжелый стержень AB (длина a, вѣсъ P, разстояніе центра инерціи C отъ конца B равно c) опирается концомъ A на наклонную плоскость DE (черт. 147), составляющую уголъ J съ горизонтомъ; къ другому концу B этого стержня прикрѣпленъ конецъ гибкой нерастяжимой нити длины l, перекинутой черезъ весьма малый неподвижный блокъ O и поддерживающей грузъ Q; разстояніе OK плоскости отъ блока равно h. Найти положеніе равновѣсія и узнать, устойчиво ли оно, или нѣтъ.

Означимъ черезъ b длину OB, черезъ θ — уголъ KAB, черезъ φ — уголъ, составляемый направленіемъ BO съ направленіемъ DE; примемъ точку O за начало координатъ и направимъ ось $Y^{овъ}$ вертикально внизъ.

Составимъ выраженіе потенціала U:

$$U = Q(l - b) + P(b \sin(J + \varphi) + c \sin(J + \theta)).$$

Здѣсь входятъ три перемѣнныя величины b, φ, θ, между которыми существуетъ слѣдующая зависимость:

$$h = b \sin\varphi + a \sin\theta,$$

такъ какъ сумма проэкцій длинъ OB и BA на направленіе OK равна h.

Отсюда слѣдуетъ, что между варьяціями δb, $\delta\varphi$ и $\delta\theta$ существуетъ такая зависимость:

$$b\delta\varphi \cos\varphi + \delta b \sin\varphi + a\delta\theta \cos\theta = 0 \ldots\ldots\ldots \textbf{(1034)}$$

Составимъ выраженіе δU и исключимъ изъ него $\delta\varphi$ при помощи равенства (1034); получимъ:

$$\delta U \cos\varphi = (P \sin J - Q \cos\varphi)\,\delta b +$$

$$+ P(c \cos\varphi \cos(J + \theta) - a \cos\theta \cos(J + \varphi))\,\delta\theta \ldots \textbf{(1035)}$$

Приравнявъ δU нулю и имѣя въ виду, что b и θ суть перемѣнныя независимыя, получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\cos\varphi = \frac{P}{Q} \sin J,\ \operatorname{tg}\theta = \frac{a}{c} \operatorname{tg}\varphi - \left(\frac{a}{c} - 1\right) \operatorname{cotg} J \ldots \textbf{(1036)}$$

Для полученія выраженія $\delta^2 U$ возьмемъ варьяцію отъ равенства (1035), причемъ примемъ во вниманіе, что при положеніи равновѣсія $\delta U = 0$. Вторую часть составленнаго выраженія можно преобразовать при помощи равенствъ (1036), такъ что получимъ:

$$\delta^2 U \cos\varphi = P \sin J \left(\frac{(\delta b \sin\varphi + \delta\theta\, a \cos\theta)}{\cos\varphi}\,\delta\varphi - c\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\,(\delta\theta)^2\right);$$

исключивъ отсюда δb при помощи равенства (1034), получимъ:

$$\delta^2 U = - Q\left(b(\delta\varphi)^2 + c\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\,(\delta\theta)^2\right).$$

Изъ этого выраженія видно, что найденное положеніе устойчиво.

Примѣръ 141-й. Въ системѣ предыдущаго примѣра предположить существованіе силы тренія между концомъ A стержня и плоскостью DE и взять тотъ случай, когда послѣдняя горизонтальна. Опредѣлить всѣ возможныя положенія равновѣсія стержня въ плоскости XY (черт. 148), предполагая, что h болѣе a и что P больше Q.

Означимъ черезъ λ реакцію плоскости DE, приложенную къ концу A; сила тренія, приложенная къ тому же концу, направлена параллельно положительной или отрицательной оси $X^{овъ}$ и равна $\lambda\varkappa$, гдѣ $\varkappa$ есть численный коэфиціентъ, заключающійся между нулемъ и наибольшимъ коэфиціентомъ k_1 тренія при состояніи покоя.

Проэкцію силы тренія на ось $X^{овъ}$ мы выразимъ такъ: $(\pm\lambda\varkappa)=\pm\lambda \operatorname{tg}\varepsilon$, гдѣ верхній знакъ относится къ тому случаю, когда сила тренія параллельна положительной оси $X^{овъ}$, а нижній — къ тому, когда сила эта параллельна отрицательной оси $X^{овъ}$.

Составимъ уравненія равновѣсія силъ и реакцій приложенныхъ къ стержню (моменты — вокругъ конца A).

$$Q\cos\varphi \pm \lambda \operatorname{tg}\varepsilon = 0,\quad P - Q\sin\varphi - \lambda = 0,$$

$$P(a-c)\cos\theta = Qa\sin(\varphi-\theta).$$

Исключивъ λ изъ первыхъ двухъ уравненій, получимъ условіе равновѣсія, опредѣляющее уголъ φ:

$$Q\cos(\varphi\pm\varepsilon) = \mp P\sin\varepsilon;$$

отсюда и изъ третьяго уравненія получимъ:

$$a\operatorname{tg}\theta = c\operatorname{tg}\varphi \pm (a-c)\operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Уголъ ε можетъ имѣть всякія значенія отъ нуля до угла тренія ε_1 (см. стр. 275), поэтому система можетъ имѣть безчисленное множество положеній равновѣсія.

Разсмотримъ эти положенія; начнемъ съ того положенія, при которомъ величина силы тренія равна нулю, т. е. $\varepsilon=0$; тогда $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$, т. е. стержень и нить BO вертикальны (черт. 149, положеніе A_1B_1). Если дадимъ углу ε какое либо значеніе меньшее ε_1 и меньшее угла, синусъ котораго равенъ отношенію Q къ P, то можемъ получить два положенія равновѣсія, при которыхъ коэфиціентъ силы

тренія равенъ тангенсу выбраннаго угла; въ одномъ изъ этихъ положеній сила тренія параллельна отрицательной оси $X^{овъ}$ и уголъ φ менѣе прямаго, а въ другомъ — сила тренія параллельна положительной оси $X^{овъ}$ и уголъ φ болѣе прямаго. Для перваго положенія (A_2B_2 на черт. 149) углы φ и θ выражаются такъ:

$$Q\cos(\varphi-\varepsilon)=P\sin\varepsilon,\ a\,\mathrm{tg}\,\theta=c\,\mathrm{tg}\,\varphi-(a-c)\cot g\,\varepsilon,$$

для втораго положенія (A_3B_3 на черт. 149) — такъ:

$$Q\cos(\varphi+\varepsilon)=-P\sin\varepsilon,\ a\,\mathrm{tg}\,\theta=c\,\mathrm{tg}\,\varphi+(a-c)\cot g\,\varepsilon.$$

Предѣлами этихъ двухъ рядовъ положеній служатъ тѣ положенія, при которыхъ $\varepsilon=\varepsilon_1$, если $\sin\varepsilon_1$ менѣе отношенія Q къ P; если $\sin\varepsilon_1$ болѣе этого отношенія, то предѣлами положеній равновѣсія служатъ положенія соотвѣтствующія тому углу ε, синусъ котораго равенъ $(Q:P)$.

Примѣръ 142-й. Тяжелый стержень AB опирается концомъ A въ неподвижную точку, а концомъ B на негладкую вертикальную стѣну. Опредѣлить положенія равновѣсія стержня (черт. 150).

Опустимъ изъ точки A перпендикуляръ на плоскость стѣны; основаніе этого перпендикуляра примемъ за начало координатъ, направленіе OA — за положительную ось $Y^{овъ}$; за ось $X^{овъ}$ возьмемъ горизонтальное направленіе въ плоскости стѣны.

Означимъ черезъ α величину постояннаго угла OAB и черезъ θ уголъ, составляемый направленіемъ OB съ осью $X^{овъ}$; пусть a есть длина стержня, c — разстояніе центра инерціи его отъ конца B.

Условіе равновѣсія получимъ, составивъ уравненіе моментовъ вокругъ вертикальной оси, проведенной черезъ точку A:

$$\lambda a\cos\theta\sin\alpha=\lambda a\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos\alpha\sin\theta.$$

Положеній равновѣсія безчисленное множество, такъ какъ ε можетъ имѣть всякое значеніе, заключающееся въ предѣлахъ $(-\varepsilon_1)$ и $(+\varepsilon_1)$.

Примѣръ 143-й. Нерастяжимая нить длины l, прикрѣплена однимъ концомъ къ неподвижной точкѣ O, а другимъ — къ концу B тяжелаго однороднаго стержня длины $2a$ и вѣса P; этотъ стержень другимъ концомъ A (черт. 151) упирается въ вертикальную шероховатую плоскость, заключающую въ себѣ точку O.

Опредѣлить всѣ возможныя положенія равновѣсія стержня.

Точку O возьмемъ за начало координатъ, плоскость — за плоскость YZ, ось Z направимъ вертикально внизъ.

Назовемъ: черезъ Λ — реакцію нити, направленную вдоль по ней, черезъ λ — реакцію плоскости, черезъ $\varkappa = \operatorname{tg} \varepsilon$ величину коэфиціента тренія, черезъ γ — уголъ, составляемый направленіемъ силы тренія съ осью $Z^{овъ}$ (считая этотъ уголъ отъ оси $Z^{овъ}$ въ сторону оси $Y^{овъ}$).

Прежде всего должно замѣтить, что въ положеніи равновѣсія моментъ силы тяжести вокругъ линіи OA долженъ быть нуль; изъ этого слѣдуетъ, что линія OA должна быть вертикальна, т. е. точка A должна находиться на оси $Z^{овъ}$.

Означимъ черезъ φ и θ углы ZOB и ZAB и черезъ ψ уголъ, составляемый плоскостью BOA съ плоскостью XZ. Между углами φ и θ и разстояніемъ $\overline{OA} = z$ существуетъ зависимость:

$$l \sin\varphi = 2a \sin\theta, \quad z = l \cos\varphi - 2a \cos\theta.$$

Составимъ уравненія равновѣсія стержня:

$$\lambda = \Lambda \sin\varphi \cos\psi, \quad \lambda\varkappa \sin\gamma = \Lambda \sin\varphi \sin\psi,$$

$$P + \lambda\varkappa \cos\gamma = \Lambda \cos\varphi,$$

$$Pa \sin\theta \sin\psi - \lambda \varkappa z \sin\gamma = 0,$$

$$\lambda z - Pa \sin\theta \cos\psi = 0.$$

Изъ этихъ уравненій получимъ:

$$\varkappa \sin\gamma = \operatorname{tg}\psi, \quad \varkappa \cos\gamma = \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon - \operatorname{tg}^2 \psi},$$

$$\Lambda = \frac{Pl}{2z}, \quad \lambda = \frac{Pl}{2z} \sin\varphi \cos\psi;$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, когда направленіе силы тренія составляетъ острый уголъ съ осью $Z^{овъ}$.

Исключивъ изъ уравненій величины λ, Λ, γ и z, а также и уголъ θ, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$(16a^2 - 4l^2 - l^2(\operatorname{tg}^2 \varepsilon \cos^2\psi - \sin^2\psi)) \operatorname{tg}^2\varphi \mp$$

$$\mp 2l^2 \operatorname{tg}\varphi \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon \cos^2\psi - \sin^2\psi} + 16a^2 - l^2 = 0,$$

изъ котораго найдемъ, вообще говоря, по четыре положенія равновѣсія для каждаго ε и для каждаго ψ не большаго ε.

Примѣръ 144-й. Опредѣлить положеніе равновѣсія тяжелаго гладкаго стержня AB (черт. 152-й) (длина a, разстояніе $\overline{AC}$ равно c, вѣсъ — P), упирающагося концомъ A въ поверхность гладкой полусферы (радіусъ R) и опирающагося на край ея D.

Примѣнимъ здѣсь пріемъ рѣшенія, приведенный въ § 162 на примѣрѣ 125-мъ.

При положеніи равновѣсія направленіе AO реакціи сферы и направленіе DN реакціи края D должны пересѣчься въ точкѣ N, находящейся на одной вертикальной линіи съ центромъ инерціи C стержня; направленіе DN проходитъ черезъ центръ сферы O, направленіе DN перпендикулярно къ длинѣ стержня.

Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый стержнемъ съ горизонтомъ; такъ какъ CN вертикально, то нетрудно удостовѣриться, что уголъ CNB равенъ θ, а уголъ CNA равенъ $\frac{\pi}{2}-2\theta$; далѣе:

$$\overline{AD}=2R\cos\theta,\quad c=\overline{AN}\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},\quad AN=\frac{\overline{AD}}{\cos\theta}=2R;$$

отсюда:

$$c\cos\theta=4R\cos^2\theta-2R,$$

$$\cos\theta=\frac{c}{8R}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{8R}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Примѣръ 145-й. Тяжелый стержень находится въ вертикальной плоскости, опираясь концомъ A на горизонтальную, а концомъ B на вертикальную плоскость; обѣ послѣднія плоскости шероховаты. Опредѣлить положенія равновѣсія стержня (черт. 153-й).

Къ концу A стержня приложена реакція λ_1 горизонтальной плоскости и сила тренія $\lambda_1\varkappa=\lambda_1\operatorname{tg}\varepsilon$, гдѣ ε означаетъ уголъ, составляемый направленіемъ равнодѣйствующей R_1 этихъ двухъ силъ съ направленіемъ реакціи λ_1; къ концу B приложена равнодѣйствующая R_2 изъ реакціи λ_2 вертикальной плоскости и силы тренія $\lambda_2\varkappa'=\lambda_2\operatorname{tg}\varepsilon'$, гдѣ ε' означаетъ уголъ, составляемый направленіемъ R_2 съ направленіемъ λ_2; условимся считать уголъ ε положительнымъ, если направленіе R_1 составляетъ острый уголъ съ отрицательною осью $X^{овъ}$, а уголъ ε' будемъ считать положительнымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе R_2 составляетъ острый уголъ съ положительною осью $Y^{овъ}$.

При положеніи равновѣсія стержня, направленія силъ R_1, R_2 должны пересѣчься въ точкѣ N, находящейся на одной вертикальной линіи съ центромъ инерціи C стержня.

Означимъ черезъ a и c длины AB и AC, черезъ α — уголъ, составляемый направленіемъ AB съ горизонтомъ.

Въ треугольникѣ ACN уголъ при вершинѣ N будетъ ε, уголъ при вершинѣ A будетъ $(90^0 - \varepsilon - \alpha)$; въ треугольникѣ CNB углы при вершинахъ N, B и C будутъ: $(90^0 - \varepsilon')$, $(\alpha + \varepsilon')$ и $(90^0 - \alpha)$.

Напишемъ слѣдующія равенства:

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{AC}} = \frac{\cos(\varepsilon + \alpha)}{\sin \varepsilon}, \quad \frac{\overline{NC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\varepsilon' + \alpha)}{\cos \varepsilon'};$$

исключивъ изъ нихъ $\overline{NC}$, получимъ:

$$a \operatorname{tg} \alpha = c \operatorname{cotg} \varepsilon - (a - c) \operatorname{tg} \varepsilon' \ldots \ldots \ldots (1037)$$

Изъ чертежа 153-го прямо видно, что, при положеніи равновѣсія, уголъ ε долженъ быть положительнымъ, т. е. направленіе R_1 должно составлять тупой уголъ съ положительною осью $X^{овъ}$, иначе точка N не придется надъ точкою C; уголъ ε' можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ.

Слѣдовательно, во второй части послѣдней формулы, уголъ ε можетъ имѣть значенія отъ нуля до $+\varepsilon_1$, а уголъ ε' отъ $(-\varepsilon'_1)$ до $(+\varepsilon_1')$, гдѣ ε_1 и ε_1' означаютъ величины угловъ при вершинахъ *конусовъ тренія* (см. стр. 276) въ точкахъ A и B; поэтому α можетъ имѣть всевозможныя значенія, соотвѣтствующія всякимъ сочетаніямъ возможныхъ значеній угловъ ε и ε' *).

Примѣръ 146-й. Опредѣлить положеніе равновѣсія твердаго тяжелаго однороднаго равносторонняго треугольника, опирающагося своими вершинами на гладкую поверхность сферической полости. Радіусъ сферы — R, высота треугольника — h, длина каждой изъ равныхъ сторонъ — a.

---

*) Если выбрать одно изъ возможныхъ значеній угла α и искать тѣ значенія угловъ ε и ε', которыя ему соотвѣтствуютъ, то уравненіе (1037) дастъ намъ неопредѣленное рѣшеніе: можно выбрать произвольное значеніе для ε и тогда только найдемъ изъ уравненія (1037) нѣкоторое значеніе для ε'. Слѣдовательно, всякое изъ положеній равновѣсія можетъ существовать при безчисленномъ множествѣ сочетаній между величинами силъ тренія на концахъ стержня.

Реакціи поверхности, приложенныя къ вершинамъ треугольника, направлены по радіусамъ сферы; слѣдовательно, когда треугольникъ находится въ положеніи равновѣсія, тогда центръ тяжести его C (черт. 154) долженъ находиться на одной вертикальной линіи съ центромъ сферы. Кромѣ того, можемъ еще замѣтить слѣдующее: такъ какъ двѣ стороны треугольника имѣютъ равныя длины, то, при положеніи равновѣсія, третья сторона AA' должна быть горизонтальна.

Представимъ себѣ кругъ ADA_1B, описанный черезъ вершины треугольника и проведемъ діаметръ этого круга черезъ точку B. Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый плоскостью этого круга съ горизонтомъ.

Обратимъ вниманіе на прямоугольный треугольникъ COE, гдѣ E центръ круга ADA_1B. Уголъ COE очевидно равенъ θ, сторона OE равна корню изъ $R^2 - b^2$, гдѣ b есть радіусъ вышесказаннаго круга, сторона CE равна $(\overline{CB} - \overline{EB})$; притомъ:

$$\overline{EB} = b = \frac{a^2}{2h}, \text{ (см. черт. 155)}; \qquad \overline{CB} = \frac{2}{3}h;$$

поэтому:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4h^2 - 3a^2}{3\sqrt{4h^2R^2 - a^4}}.$$

Примѣръ 147-й. Равнобедренный прямоугольный однородный тяжелый треугольникъ ABB_1 (черт. 156) опирается на два болта K и K_1, находящіеся на одномъ уровнѣ; высота треугольника h, разстояніе KK_1 равно $2n$. Опредѣлить положенія равновѣсія треугольника, когда онъ въ вертикальной плоскости.

Середину O разстоянія KK_1 примемъ за начало координатъ, ось $Y^{овъ}$ направимъ вертикально внизъ; черезъ θ означимъ уголъ, составляемый направленіемъ AC съ вертикальною линіею.

Потенціалъ силы тяжести въ этомъ случаѣ равенъ Py_c; ординату центра инерціи C надо выразить функціею угла θ.

Разность ординатъ точекъ A и C равна $\frac{2}{3}h\cos\theta$; ордината точки A равна $\overline{OA}$, умноженной на синусъ угла DOA; такъ какъ треугольникъ KAK_1 — прямоугольный, то $\overline{OA}$ равна $\overline{OK}$, т. е. n, и уголъ DOA вдвое болѣе угла DKA, т. е. $\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$; поэтому:

$$U = P\left(n\cos 2\theta - \frac{2}{3}h\cos\theta\right),$$

$$\delta U = P\left(\frac{2}{3} h \sin\theta - 2n \sin 2\theta\right)\delta\theta,$$

$$\delta^2 U = P\left(\frac{2}{3} h \cos\theta - 4n \cos 2\theta\right)(\delta\theta)^2.$$

Изъ этихъ выраженій видно, что если h менѣе $6n$, то треугольникъ имѣетъ три положенія равновѣсія:

Одно устойчивое: $\theta = 0$, такъ какъ при немъ

$$\delta^2 U = -4n P\left(1 - \frac{h}{6n}\right)(\delta\theta)^2,$$

и два неустойчивыхъ: $\theta = +\theta_1$, $\theta = -\theta_1$, гдѣ $6n \cos\theta_1 = h$, такъ какъ при этихъ положеніяхъ:

$$\delta^2 U = 4n P\left(1 - \frac{h^2}{36n^2}\right)(\delta\theta)^2.$$

Если же h болѣе $6n$, то возможно только первое положеніе равновѣсія, которое тогда неустойчиво.

Примѣръ 148-й. На два болта K и K_1, расположенные какъ указано въ предыдущемъ примѣрѣ, опирается тяжелый однородный дискъ эллиптической формы, остающійся постоянно въ вертикальной плоскости; вѣсъ диска P, длины полуосей эллипса a и b. Опредѣлить положенія равновѣсія и распознать ихъ устойчивость.

Потенціалъ вѣса диска можетъ быть выраженъ такъ:

$$U = -P . \overline{CO} \sin\varphi,$$

гдѣ φ есть уголъ, составляемый направленіемъ $\overline{CO}$ съ горизонтальнымъ направленіемъ $C\Xi$ (см. черт. 157).

Длину $\overline{CO}$ и уголъ φ выразимъ въ длинѣ α полудіаметра $C\Xi$, параллельнаго хордѣ KK_1; означимъ черезъ β длину полудіаметра CY, сопряженнаго этой хордѣ; какъ извѣстно, по свойствамъ эллипса:

$$\frac{(\overline{CO})^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\alpha^2} = 1, \quad \pi ab = \pi\alpha\beta \sin\varphi.$$

Поэтому:

$$U = -P\frac{ab}{n} u\sqrt{1-u^2}, \quad \delta U = -P\frac{ab}{n}\frac{(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}}\delta u,$$

гдѣ u означаетъ отношеніе $(n:\alpha)$.

Означимъ черезъ θ уголъ ΞCX_1, гдѣ CX_1 есть наибольшій полудіаметръ α; такъ какъ:

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2},$$

то:

$$u\delta u = n^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta,$$

$$u\delta^2 u + (\delta u)^2 = n^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos 2\theta\,(\delta\theta)^2.$$

Приравнявъ δU нулю, получимъ три положенія равновѣсія; первое: $\theta = 0$, второе: $\theta = \frac{\pi}{2}$, третье: $2u^2 = 1$. Разсмотримъ устойчивость этихъ положеній.

1) $\theta = 0$, $\alpha = a$,

$$\delta^2 U.\sqrt{1 - u_1^2} = -P\frac{ab}{n}(1 - 2u_1^2)\,\delta^2 u,$$

$$\delta^2 u = an\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)(\delta\theta)^2,$$

гдѣ $u_1 a = n$; если n менѣе a, дѣленнаго на квадратный корень изъ двухъ, то это положеніе устойчиво.

2) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = b$,

$$\delta^2 U.\sqrt{1 - u_2^2} = -P\frac{ab}{n}(1 - 2u_2^2)\,\delta^2 u,$$

$$\delta^2 u = -bn\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)(\delta\theta)^2,$$

гдѣ $u_2 b = n$; если n болѣе b, дѣленнаго на квадратный корень изъ двухъ, то это положеніе устойчиво.

3) $2u_3^2 = 1$, $\alpha = n\sqrt{2}$,

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}};$$

это положеніе равновѣсія можетъ существовать только тогда, когда два первыя положенія устойчивы, т. е. когда $2n^2$ болѣе чѣмъ b^2 и менѣе, чѣмъ a^2; оно неустойчиво, потому что при немъ:

$$\delta^2 U = 4P\frac{ab}{n}(\delta u)^2.$$

Примѣръ 149-й. Шаръ вѣса P и радіуса R повѣшенъ за центръ C на нити длины l; на другой нити виситъ грузъ Q; вторая нить длиннѣе первой (длина L), но обѣ имѣютъ одну и ту же точку прикрѣпленія O. Опредѣлить положеніе системы, предполагая, что вторая нить не можетъ проникнуть внутрь шара (черт. 158).

$$U = Pl\cos\theta + Q(\overline{DQ} + \overline{OK}),$$

$$\overline{OK} = l\cos\theta,\ \overline{DQ} = L - \sqrt{l^2 - R^2} - R\theta_1,$$

$$\theta + \theta_1 = \arcsin\frac{R}{l}.$$

$$\delta U = (QR - (P + Q)l\sin\theta)\,\delta\theta.$$

Положеніе устойчивое.

Примѣръ 150-й. Въ неподвижной точкѣ O прикрѣплены верхніе концы трехъ равныхъ нитей длины $(l - r)$; къ нижнимъ концамъ этихъ нитей подвѣшены три гладкіе твердые тяжелые шара одинаковаго вѣса p и равнаго объема (радіусы r). На этихъ трехъ шарахъ покоится четвертый тяжелый шаръ (вѣсъ P, радіусъ R), тоже совершенно гладкій.

Найти положенія равновѣсія системы и изслѣдовать ихъ устойчивость. Если радіусъ R будетъ весьма великъ сравнительно съ радіусами r, то, при нѣкоторыхъ положеніяхъ системы, нитямъ OA, OA_1, OA_2, (черт. 159), чтобы быть несогнутыми, придется проникнуть сквозь вещество верхняго шара; для того, чтобы устранить это стѣсненіе, можно замѣнить нити твердою сферою радіуса $(l + r)$, на которую могли бы опираться нижніе шары.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый каждою изъ нитей OA, OA_1, OA_2 съ вертикальною осью OZ, черезъ ψ — уголъ, составляемый линіями CA, CA_1, CA_2 съ тою же осью, черезъ u — разстоянія между центрами нижнихъ шаровъ, черезъ z — разстояніе OC.

Когда три нижніе шара соприкасаются между собою, тогда синусъ угла φ и z имѣютъ слѣдующія значенія:

$$l\sqrt{3}\sin\varphi_1 = 2r = (R+r)\sqrt{3}\sin\psi_1,$$

$$z_1 = l\cos\varphi_1 - (R+r)\cos\psi_1.$$

Меньше этой величины φ_1 уголъ φ быть не можетъ; z можетъ быть менѣе z_1, но для этого нужно, чтобы шаръ C отдѣлился отъ нижнихъ шаровъ.

При z большемъ z_1, разстоянія u болѣе $2r$, притомъ углы φ и ψ и разстояніе z могутъ быть выражены функціями отъ u слѣдующимъ образомъ:

$$l\sqrt{3}\sin\varphi = (R+r)\sqrt{3}\sin\psi = u,$$

$$z = l\cos\varphi - (R+r)\cos\psi.$$

Потенціалъ силъ тяжести выразится такъ:

$$U = 3pl\cos\varphi + Pz.$$

Для u большихъ $2r$ первая и вторая варьяціи отъ U могутъ быть выражены такъ:

$$\delta U = \left[\frac{P}{\sqrt{3(R+r)^2 - u^2}} - \frac{3p+P}{\sqrt{3l^2 - u^2}}\right]\frac{u\delta u}{\sqrt{3}}, \ldots\ldots \quad (1038)$$

$$\delta^2 U = \left[\frac{P(R+r)^2}{(3(R+r)^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(3p+P)l^2}{(3l^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\sqrt{3}(\delta u)^2.$$

Для u равнаго $2r$ и для положительныхъ δz, варьяція δU выражается тою же формулою (1038), но вмѣсто u надо подставить $2r$ и притомъ должно имѣть въ виду, что $\delta u > 0$; составится слѣдующее выраженіе:

$$\delta_1 U = \left[\frac{P}{\sqrt{3(R+r)^2 - 4r^2}} - \frac{3p+P}{\sqrt{3l^2 - 4r^2}}\right]\frac{2r\delta u}{\sqrt{3}}; \quad \delta u > 0.$$

Въ томъ же положеніи, для отрицательныхъ δz, варьяція δU будетъ слѣдующая:

$$\delta_2 U = P\delta z; \quad \delta z < 0.$$

Положеніе $z = z_1$ будетъ положеніемъ равновѣсія, если $\delta_1 U$ будетъ отрицательною, подобно $\delta_2 U$; для этого необходимо, чтобы было:

$$(3p + P) > Pf(2r), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1039)}$$

гдѣ $f(u)$ есть обозначеніе слѣдующей функціи отъ u:

$$f(u) = \sqrt{\frac{3l^2 - u^2}{3(R+r)^2 - u^2}}.$$

Относительно этой функціи слѣдуетъ замѣтить, что она возрастаетъ съ увеличеніемъ u, потому что l болѣе $(R+r)$; поэтому, для $u > 2r$:

$$f(u) > f(2r) > f(0);$$

при $u = \sqrt{3}\,(R+r)$ функція f обращается въ ∞.

Если условіе (1039) удовлетворено, т. е., если вѣсъ P верхняго шара менѣе $3p:(f(2r) - 1)$, то существуетъ еще одно положеніе равновѣсія при такомъ u_0, которое удовлетворяетъ равенству:

$$(3p + P) = Pf(u_0),$$

потому что при этомъ u выраженіе (1038) обращается въ нуль; однако, это положеніе неустойчивое, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться.

Примѣръ 151-й. Положенія равновѣсія тяжелой твердой оболочки, имѣющей видъ сферическаго сегмента и тяжелаго стержня, упирающагося однимъ концомъ A во внутреннюю поверхность ея; сегментъ лежитъ на горизонтальной плоскости. Принять въ разсчетъ треніе конца A о поверхность оболочки и боковой поверхности стержня о край D (см. черт. 160).

Для того, чтобы стержень ADB находился въ положеніи равновѣсія подъ вліяніемъ приложенныхъ къ нему силъ R_1 и R_2 и вѣса, необходимо, чтобы точка N пересѣченія направленій силъ R_1 и R_2 приходилась на одной вертикальной линіи съ центромъ инерціи C_2 стержня.

Для того, чтобы вся система находилась въ равновѣсіи подъ вліяніемъ вѣса ея и реакціи плоскости въ точкѣ опоры H, необходимо, чтобы общій центръ C_0 инерціи оболочки и стержня находился на вертикальной линіи OH.

Выразивъ эти два условія формулами, получимъ условія равновѣсія системы.

Пусть OC_1M есть ось симметріи сегмента, C_1 — его центръ инерціи, β — уголъ MOD и φ — уголъ, составляемый осью симметріи OC_1M съ вертикальною линіею OH при положеніи равновѣсія системы.

Пусть a есть разстояніе центра инерціи C_2 стержня отъ конца A, E — середина длины AD, θ — уголъ, составляемый направленіемъ OE съ вертикальною линіею OH (это-же есть уголъ наклоненія стержня къ горизонту), ε и ε' — углы, составляемые направленіями силъ R_1 и R_2 съ нормалями AO и Dn; P_1 и P_2 вѣса сегмента и стержня.

Выразимъ, что точки N и C_2 находятся на одной вертикальной линіи: для этого, написавъ слѣдующія равенства:

$$\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AN}}=\frac{\sin(ANC_2)}{\sin(NC_2A)};\quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AN}}=\frac{\sin(AND)}{\sin(NDA)},$$

выразимъ заключающіеся здѣсь углы въ углахъ β, φ, θ, ε, ε', принимая въ разсчетъ, что NC_2 вертикально:

$$NC_2A=\frac{\pi}{2}+\theta,\ NDA=\frac{\pi}{2}-\varepsilon',\ EOD=\beta-\varphi-\theta,$$

$$ANC_2=\beta+\varepsilon-\varphi-2\theta,\ AND=\beta+\varepsilon+\varepsilon'-\varphi-\theta.$$

Затѣмъ исключимъ изъ этихъ двухъ равенствъ AN и выразимъ AD такимъ образомъ:

$$AD=2R\sin(\beta-\varphi-\theta),$$

тогда получимъ условіе равновѣсія стержня:

$$a\cos\theta\sin(\beta+\varepsilon+\varepsilon'-\varphi-\theta)=$$

$$=2R\cos\varepsilon'\sin(\beta-\varphi-\theta)\sin(\beta+\varepsilon-\varphi-2\theta).$$

Далѣе, чтобы выразить, что точка C_0 находится на вертикальной линіи OH, напишемъ слѣдующее равенство:

$$P_1.\overline{OC_1}\sin\varphi=P_2(a\cos\theta-R\sin(\beta-\varphi-2\theta));$$

это будетъ второе условіе равновѣсія.

Примѣръ 152-й. Четыре равныя однородныя чугунныя ядра расположены въ видѣ треугольной ядерной кучи на горизонтальномъ полу; каковы должны быть коэфиціенты тренія чугуна о чугунъ и чугуна о полъ, для того, чтобы куча могла быть въ равновѣсіи и чтобы три нижнія ядра прикасались между собою, не нажимая другъ на друга?

Центры четырехъ шаровъ должны быть вершинами правильнаго тетраэдра и синусъ угла, составляемаго каждымъ изъ трехъ негоризонтальныхъ реберъ этого тетраэдра съ отвѣсною линіею, равенъ $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Къ верхнему ядру приложены слѣдующія силы: вѣсъ его P, реакціи λ нижнихъ ядеръ и силы тренія $\lambda\varkappa$ со стороны тѣхъ же ядеръ; реакціи направлены по наклоннымъ ребрамъ вышесказаннаго тетраэдра вверхъ, а силы тренія направлены въ вертикальныхъ плоскостяхъ, касательно къ поверхности ядра, тоже вверхъ.

Проэктируемъ на отвѣсную линію всѣ силы и реакціи, приложенныя къ верхнему ядру, и составляемъ равенство:

$$P = 3\lambda\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\lambda\varkappa\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Силы, приложенныя къ каждому нижнему ядру, заключаются въ одной вертикальной плоскости, а именно въ вертикальной плоскости, проведенной черезъ центръ этого ядра и черезъ центръ верхняго ядра; эти силы — слѣдующія: вѣсъ P, реакція λ верхняго ядра и сила тренія его $\lambda\varkappa$ (см. черт. 161), реакція λ_1 пола и сила тренія $\lambda_1\varkappa_1$ со стороны пола. Составимъ уравненіе моментовъ вокругъ горизонтальной оси, проведенной черезъ O перпендикулярно къ плоскости, въ которой дѣйствуютъ эти силы, а также составимъ уравненія проэкцій силъ на отвѣсную и на горизонтальную оси; получимъ:

$$\lambda\varkappa = \lambda_1\varkappa_1, \quad P + \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} + \lambda\varkappa\sqrt{\frac{1}{3}} = \lambda_1,$$

$$\lambda_1\varkappa_1 + \lambda\varkappa\sqrt{\frac{2}{3}} = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Изъ этихъ четырехъ равенствъ найдемъ:

$$\lambda_1 = \frac{4}{3}P, \quad \varkappa = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0{,}3179...$$

$$\lambda = \frac{P}{3}, \quad \varkappa_1 = \frac{1}{4}\varkappa.$$

Примѣръ 153-й. Однородный тяжелый стержень (длина $2a$, вѣсъ P) помѣщенъ въ горизонтальномъ положеніи внутри шероховатой сферы радіуса R; опредѣлить самое высокое горизонтальное положеніе его, принимая въ разсчетъ треніе между сферою и концами стержня.

Возьмемъ самое нижнее горизонтальное положеніе равновѣсія стержня (черт. 162); въ этомъ положеніи стержень AB опирается своими концами на сферу въ точкахъ ея большаго вертикальнаго круга. Силы R и R', приложенныя къ концамъ стержня и образующіяся изъ реакцій поверхности и тренія, должны заключаться въ плоскости этого круга и направленія ихъ должны пересѣчься въ какой либо точкѣ N вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ инерціи C стержня (а слѣдовательно и черезъ центръ сферы), такъ что направленія этихъ силъ должны быть одинаково наклонены къ вертикальной линіи. Это условіе все таки не можетъ вполнѣ опредѣлить направленій силъ R и R', потому что уголъ, составляемый ими съ нормалями AO и BO, можетъ имѣть произвольное положительное или отрицательное значеніе, не большее ε_1, угла тренія. На чертежѣ 162 изображены слѣды конусовъ тренія (см. стр. 276) точекъ A и B; силы R и R' могутъ имѣть всякія направленія, заключающіяся внутри угловъ N_1AN_2 и N_1BN_2.

Представимъ себѣ, что стержень переведенъ въ сосѣднее горизонтальное положеніе, въ которомъ плоскость AOB уже не вертикальна; проведемъ черезъ AB вертикальную плоскость Π (черт. 163). Если взятое положеніе стержня есть положеніе равновѣсія, то силы R и R' должны заключаться въ плоскости Π и направленія ихъ должны пересѣчься на вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ инерціи; но направленія этихъ силъ должны заключаться либо внутри, либо на поверхности конусовъ тренія; слѣдовательно, внутри угловъ N_2AN_1 и N_2BN_1 (черт. 163), образуемыхъ пересѣченіемъ плоскости Π съ конусами тренія, заключаются всѣ тѣ направленія, которыя могутъ имѣть силы R и R', уравновѣшивающіяся съ силою тяжести стержня въ разсматриваемомъ положеніи его.

Переводя стержень въ дальнѣйшія горизонтальныя положенія равновѣсія, подымая его все выше и выше, мы будемъ замѣчать, что величины угловъ N_1AN_2, N_1BN_2 уменьшаются все болѣе и болѣе, пока наконецъ не достигнемъ до такого горизонтальнаго положенія, при которомъ вертикальная плоскость Π будетъ касательною плоскостью къ конусамъ тренія; это и будетъ самымъ высшимъ горизонтальнымъ положеніемъ стержня.

При этомъ положеніи равновѣсія стержня, направленія силъ R и

R' могутъ имѣть единственныя направленія, а именно направленія тѣхъ производящихъ AN и BN (черт. 164) конусовъ тренія, по которымъ эти конусы прикасаются къ вертикальной плоскости П; по свойству касательной плоскости къ прямому конусу, плоскости NAO и NBO, проведенныя черезъ оси конусовъ и черезъ производящія AN и BN, должны быть перпендикулярны къ плоскости П, а поэтому линія NO пересѣченія плоскостей NAO и NBO должна быть горизонтальна. Если принять въ разсчетъ, что $\overline{AO}$ и $\overline{BO}$ равны R, что уголъ NBO равенъ ε_1 и что $\overline{CB}$ равно a, то изъ треугольниковъ OBN и NBC найдемъ слѣдующее выраженіе разстоянія NC (черт. 164):

$$\overline{NB} = R\cos\varepsilon_1, \quad \overline{NC} = \sqrt{R^2\cos^2\varepsilon_1 - a^2}.$$

Изъ этого выраженія видно, что если $R\cos\varepsilon_1 = a$, то стержень можетъ быть поднятъ до горизонтальной плоскости, проходящей черезъ центръ шара.

§ 172. Веревочные многоугольники.

Представимъ себѣ систему точекъ $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$, заключающихся въ плоскости XY; пусть къ каждой изъ нихъ приложена сила данной величины и даннаго направленія, заключающагося въ той же плоскости: къ точкѣ M_1 — сила F_1, къ точкѣ M_2 — сила $F_2, \ldots\ldots$ къ точкѣ M_n — сила F_n; точки M_1 и M_2 связаны между собою неизмѣняемою связью длины l_{12}, точки M_2 и M_3 — такою же связью длины l_{23}, точки M_3 и M_4 — такою же связью длины $l_{34}, \ldots$ точки M_{n-1} и M_n — неизмѣняемою связью длины $l_{n-1,n}$. Найти положеніе равновѣсія системы.

Прежде всего сочтемъ число условныхъ уравненій въ подобномъ вопросѣ. Число уравненій равновѣсія равно $2n$, число связей равно $(n-1)$, слѣдовательно, условій равновѣсія будетъ $(n+1)$.

Всѣ связи — неизмѣняемыя, поэтому для равновѣсія системы необходимо, чтобы главный векторъ задаваемыхъ силъ былъ равенъ нулю; это выразится двумя равенствами:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1040)}$$

которыя должны принадлежать къ числу условій равновѣсія.

Для опредѣленія положеній точекъ системы мы будемъ имѣть не болѣе $(2n - 2)$ равенствъ, а именно $(n - 1)$ уравненій связей и не болѣе $(n - 1)$ условій равновѣсія, такъ какъ два условія равновѣсія (1040) не заключаютъ координатъ; число же координатъ равно $2n$, поэтому двѣ координаты могутъ быть произвольны. По характеру связей очевидно, что за произвольныя координаты можно взять обѣ координаты одной изъ точекъ системы.

Примемъ за произвольныя — координаты точки M_1. Положенія остальныхъ точекъ можемъ опредѣлить или вычисленіемъ, или при помощи слѣдующаго построенія.

Къ точкѣ M_1 (черт. 165, a) приложена данная сила F_1 и реакція λ_{12} первой связи; такъ какъ эти двѣ силы должны взаимно уравновѣшиваться, то реакція λ_{12} должна быть равна и противоположна F_1, а потому неизмѣняемая связь l_{12} должна быть направлена вдоль по F_1 или противоположно F_1; если это есть стержень, то можетъ быть либо то, либо другое, если же это есть нерастяжимая нить, то она должна расположиться отъ точки M_1 по направленію противоположному F_1, потому что реакціи нити должны быть направлены внутрь натянутой нити (см. стр. 345).

Отложивъ по направленію неизмѣняемой связи длину l_{12}, получимъ положеніе точки M_2.

Къ точкѣ M_2 приложены: реакція λ_{12}' связи l_{12}, равная и противоположная реакціи λ_{12}, а, слѣдовательно, равная и одинаково направленная съ силою F_1, далѣе сила F_2 и наконецъ реакція λ_{23} связи l_{23}; такъ какъ эти три силы должны взаимно уравновѣшиваться, то величину и направленіе реакціи λ_{23} получимъ, построивъ геометрическую сумму длинъ F_1 и F_2 (см. черт. 165, b). Если связь l_{23} есть нерастяжимая нить, то она должна расположиться отъ точки M_2 по направленію λ_{23} (т. е. параллельно $\overline{bO}$), если же это есть стержень, то онъ можетъ имѣть и противоположное направленіе. Отложивъ по направленію неизмѣняемой связи длину l_{23}, получимъ положеніе точки M_3.

Продолжаемъ такимъ же образомъ далѣе; направленіе $\overline{M_3 M_4}$ параллельно или противоположно-параллельно направленію $\overline{cO}$ гео-

метрической суммы длинъ $\overline{Ob}$ и $\overline{bc} = F_3$ (см. черт. 165, b); величина натяженія связи l_{34} представится величиною длины $\overline{cO}$, и т. д.

Наконецъ, направленіе послѣдней связи (l_{56}) представится направленіемъ $\overline{eO}$ на чертежѣ 165, b, величина же длины $\overline{eO}$ должна представить силу F_6 и натяженіе послѣдней нити.

Такимъ образомъ построеніе веревочнаго многоугольника $M_1 M_2 M_3 \ldots M_6$ дѣлается при помощи другаго многоугольника $OabcdeO$, называемаго *многоугольникомъ силъ*; діагонали или лучи Oa, Ob, Oc, Od, Oe этого многоугольника представляютъ направленія нитей и величины ихъ натяженій.

Если связи суть стержни, а не нити, то многоугольникъ стержней можетъ имѣть нѣсколько другихъ видовъ, хотя вспомогательный многоугольникъ силъ — тотъ же самый; напримѣръ стержни могутъ образовать многоугольникъ $M_1 M_2 M_3' M_4' M_5' M_6'$, представленный на чертежѣ (165, a). Многоугольники веревочные и стержневые можно назвать общимъ именемъ *многоугольниковъ плечъ*.

Соотношеніе между многоугольникомъ плечъ и многоугольникомъ силъ было указано Вариньономъ въ сочиненіи: Projet d'une nouvelle Méchanique, 1687 *).

Относительно всякой части многоугольника плечъ можно замѣтить, что главный векторъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ этой части и натяженій, приложенныхъ къ крайнимъ точкамъ ея, равенъ нулю; напримѣръ, обратимъ вниманіе на часть $M_2 M_3 M_4$ многоугольника плечъ, изображеннаго на чертежѣ (165, a); къ вершинамъ M_2, M_3, M_4 этой части приложены силы F_2, F_3, F_4, а къ точкамъ M_2

---

*) Указанное здѣсь соотношеніе между многоугольникомъ силъ и многоугольникомъ плечъ служитъ основаніемъ графическаго способа рѣшенія вопросовъ о равновѣсіи совокупности силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и дѣйствующихъ въ одной плоскости; на этомъ же соотношеніи основывается графическое опредѣленіе напряженій въ частяхъ стропильныхъ и мостовыхъ фермъ, а кромѣ того рѣшеніе другихъ задачъ графической статики. Здѣсь, въ этой книгѣ, мы не можемъ дать мѣста изложенію этихъ примѣненій веревочнаго многоугольника, а потому ограничиваемся только этимъ замѣчаніемъ и ссылкою на слѣдующія сочиненія:

M. Levy, Statique graphique 1874. Culmann, Die graphische Statik, 1875. Favaro. Leçons de Statique graphique, traduites de l'italien p. Terrier, 1879.

и M_4 — натяженія λ_{12}' и λ_{45}; взглянувъ на многоугольникъ силъ (черт. 165, b), прямо увидимъ, что величины и направленія этихъ силъ и натяженій образуютъ замкнутый многоугольникъ $OabcdO$; то же самое относится и ко всякой части многоугольника плечъ, находящагося въ положеніи равновѣсія.

Кромѣ того, слѣдуетъ замѣтить, что равенъ нулю также и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ, и натяженій, приложенныхъ къ оконечностямъ какой либо части многоугольника плечъ, находящагося въ положеніи равновѣсія; это видно изъ того, что главный моментъ одной силы и двухъ натяженій, приложенныхъ къ каждой вершинѣ, равенъ нулю и изъ того, что моменты натяженій каждаго плеча многоугольника равны и прямопротивоположны.

По этому можемъ сказать слѣдующее:

Силы, приложенныя къ вершинамъ какой либо части многоугольника плечъ, находящагося въ положеніи равновѣсія, и натяженія, приложенныя къ оконечностямъ этой части, взаимноуравновѣшиваются черезъ посредство плечъ этой части такъ, что главный векторъ и главный моментъ ихъ равны нулю; слѣдовательно, равновѣсіе этой части многоугольника плечъ не измѣнилось бы, если бы она вдругъ отвердѣла и обратилась бы въ неизмѣняемую систему. Тоже самое относится ко всякой части многоугольника плечъ . . . . **(1041)**

При рѣшеніи вопроса о равновѣсіи веревочнаго многоугольника мы задались предположеніемъ, что направленія всѣхъ силъ F_1, F_2, ... F_n параллельны одной плоскости или заключаются въ одной плоскости; но такое ограниченіе не необходимо: силы $F_1, F_2, \ldots$ F_n могутъ имѣть какія угодно направленія и какія угодно величины, лишь бы главный векторъ ихъ былъ равенъ нулю; во всякомъ случаѣ вышеизложенное построеніе рѣшаетъ вопросъ и совершается по тому же правилу, не смотря на то, что многоугольникъ силъ и многоугольникъ плечъ могутъ оказаться не плоскими фигурами. Положеніе (1041) тоже справедливо и въ примѣненіи къ неплоскимъ многоугольникамъ плечъ.

§ 173. Дифференціальныя уравненія равновѣсія гибкой безконечно-тонкой нерастяжимой нити.

Эти уравненія могутъ быть получены изъ уравненій (1018) параграфа 158-го главы XII, стоитъ только замѣнить x'', y'', z'' — нулями.

Здѣсь выведемъ дифференціальныя уравненія равновѣсія гибкой *нерастяжимой* нити инымъ путемъ, разсматривая такую нить, какъ веревочный многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ безконечно-короткихъ сторонъ.

Вообразимъ себѣ какой либо веревочный многоугольникъ и предположимъ, что увеличиваемъ число сторонъ его, уменьшая вмѣстѣ съ тѣмъ ихъ длины и величины силъ, приложенныхъ къ промежуточнымъ вершинамъ его; представимъ себѣ, что такое увеличеніе числа сторонъ продолжается до безконечности, причемъ длины сторонъ уменьшаемъ до безконечной малости, а силы, приложенныя къ промежуточнымъ вершинамъ *), уменьшаемъ въ такой степени, чтобы суммы ΣX, ΣY, ΣZ проэкцій (на оси координатъ) силъ, приложенныхъ ко всѣмъ вершинамъ, находящимся на протяженіи единицы длины нити, приближались къ конечнымъ величинамъ и чтобы по крайней мѣрѣ одна изъ этихъ суммъ не обращалась въ нуль; тогда веревочный многоугольникъ будетъ приближаться къ безконечно-тонкой матерьяльной нерастяжимой гибкой нити, къ точкамъ которой приложены нѣкоторыя силы.

Относительно силъ, приложенныхъ къ нити, сдѣлаемъ слѣдующее ограниченіе: будемъ предполагать, что силы, приложенныя къ каждымъ двумъ сосѣднимъ безконечно-близкимъ вершинамъ многоугольника, замѣняющаго гибкую нить, различаются безконечно мало другъ отъ друга, какъ величинами, такъ и направленіями, т. е., что силы распредѣлены сплошнымъ образомъ вдоль по нити; на чертежѣ 166-мъ изображенъ примѣръ такого сплошнаго распредѣленія силъ, приложенныхъ къ многоугольнику съ безконечно-близкими вершинами.

---

*) Силы, приложенныя къ оконечностямъ многоугольника, остаются конечными.

Сдѣланное ограниченіе не препятствуетъ намъ разсматривать и тѣ случаи, въ которыхъ распредѣленіе силъ претерпѣваетъ разрывъ сплошности по величинѣ или по направленію, какъ въ точкахъ A и B на чертежѣ 167-мъ; тогда надо только раздѣлить гибкую линію на части, не заключающія такихъ мѣстъ разрыва и разсматривать каждую часть отдѣльно.

Мѣсто какой либо точки M на нити выражается такимъ же образомъ, какъ и мѣсто точки на траэкторіи (см. стр. 14-ю кинематической части), а именно разстояніемъ s, считаемымъ по длинѣ нити отъ одной изъ точекъ S_0 ея; одно изъ направленій по кривой считается положительнымъ, въ этомъ направленіи s увеличивается.

Силы, приложенныя къ точкамъ нити *разсчитываются на единицу длины нити*, т. е. слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что мы хотимъ разсчитать подобнымъ образомъ силы, приложенныя къ нити въ точкѣ M (черт. 166) и въ сосѣдствѣ съ нею; беремъ весьма малую часть $\mu\mu_1$ нити, заключающую въ себѣ точку M, составляемъ суммы ΣX, ΣY, ΣZ проэкцій на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ части $\mu\mu_1$ нити и дѣлимъ эти суммы на длину Δs части $\mu\mu_1$, получимъ отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta s},\ \frac{\Sigma Y}{\Delta s},\ \frac{\Sigma Z}{\Delta s};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1042)}$$

затѣмъ будемъ брать все меньшія и меньшія длины $\mu'\mu'_1$, $\mu''\mu''_1,\ldots$, заключающія въ себѣ точку M, составляя для нихъ такія отношенія, какъ (1042); по мѣрѣ того, какъ мы будемъ приближать длину выдѣляемой части къ нулю, величины составляемыхъ для нея отношеній (1042) будутъ приближаться къ нѣкоторымъ предѣламъ $\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{Y}_s$, $\mathfrak{Z}_s$, которые и называются проэкціями на оси координатъ *силы, дѣйствующей въ точкѣ M оси нити и разсчитанной на единицу длины*.

Изъ этого слѣдуетъ, что проэкціи на оси координатъ совокупности силъ, приложенныхъ къ ничтожно-малому элементу Δs, заключающему въ себѣ точку M, будутъ равны:

$$(\mathfrak{X}_s + \varepsilon_1)\,\Delta s,\ (\mathfrak{Y}_s + \varepsilon_2)\,\Delta s,\ (\mathfrak{Z}_s + \varepsilon_3)\,\Delta s,$$

гдѣ ε_1, ε_2, ε_3 суть величины, дѣлающіяся безконечно-малыми при приближеніи Δs къ нулю.

Если бы силы, приложенныя ко всѣмъ точкамъ нити, были бы равны и параллельны между собою, то величины отношеній (1042) не зависѣли бы отъ длины Δs выдѣляемой части и равнялись бы суммамъ проэкцій на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ единицѣ длины нити; вотъ почему величины $\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{Y}_s$, $\mathfrak{Z}_s$ называются проэкціями силъ, разсчитанныхъ на единицу длины нити.

Величины $\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{Y}_s$, $\mathfrak{Z}_s$ предполагаются сплошными функціями отъ s или отъ координатъ точки M.

Очевидно, что при уменьшеніи сторонъ веревочнаго многоугольника, при увеличеніи числа этихъ сторонъ и при уменьшеніи величинъ силъ, приложенныхъ къ промежуточнымъ вершинамъ, стороны многоугольника силъ будутъ уменьшаться, а число сторонъ будетъ увеличиваться; въ предѣлѣ многоугольникъ силъ, приложенныхъ къ промежуточнымъ вершинамъ веревочнаго многоугольника, обратится въ кривую линію $a\Lambda\Lambda_1 b$ (черт. 168), а лучи многоугольника обратятся въ радіусы векторы этой кривой; величины этихъ радіусовъ векторовъ будутъ представлять величины натяженій *) нити, а направленія ихъ — направленія касательныхъ къ нити, въ разныхъ точкахъ ея; направленія Oa и bO представляютъ направленія силъ AF_1 и BF_2 (черт. 169), приложенныхъ къ концамъ нити A и B, а величины этихъ радіусовъ векторовъ представляютъ величины этихъ силъ.

Обратимъ вниманіе на какой либо элементъ нити, начинающійся въ точкѣ M (координаты — x, y, z, разстояніе AM отъ конца A по дугѣ кривой равно s) и кончающійся въ точкѣ M_1 (разстояніе AM_1 равно $(s + \Delta s)$); условимся считать направленія касательныхъ къ кривой въ сторону возрастающихъ s. Кромѣ силъ, приложенныхъ къ внутреннимъ точкамъ этого элемента, къ концамъ его приложены:

---

*) Натяженія направлены по касательнымъ къ нити внаружу разсматриваемой части ея; въ точкѣ M на часть MM_1B (черт. 169) дѣйствуетъ натяженіе противоположно касательной MT, а на часть M_1A — такое же натяженіе вдоль по MT.

въ M — натяженіе λ, изображаемое радіусомъ векторомъ $O\Lambda$ (черт. 168) параллельнымъ и противоположнымъ касательной MT въ этой точкѣ M, въ M_1 — натяженіе λ_1, изображаемое длиною $\Lambda_1 O$, параллельною касательной M_1T_1 въ точкѣ M_1. На основаніи положенія (1041), примѣненнаго къ элементу MM_1, можемъ написать слѣдующее равенство:

$$-\lambda \frac{dx}{ds} + \lambda_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 + (\mathfrak{X}_s + \varepsilon_1)\,\Delta s = 0;$$

раздѣливъ это равенство на Δs и переходя къ предѣлу, т. е. приближая точку M_1 къ точкѣ M, получимъ первое изъ трехъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)}{ds} + \mathfrak{X}_s = 0,\\ &\frac{d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)}{ds} + \mathfrak{Y}_s = 0,\\ &\frac{d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)}{ds} + \mathfrak{Z}_s = 0; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \mathbf{(1043)}$$

подобнымъ же образомъ получимъ и два остальныя уравненія.

Точка M есть которая либо изъ точекъ нити; слѣдовательно, *для всякой точки оси нити, находящейся въ положеніи равновѣсія, должны быть удовлетворены уравненія вида (1043).*

Что касается концовъ нити, то натяженія въ нихъ должны быть равны силамъ, приложеннымъ къ этимъ концамъ, а если концы закрѣплены, то направленія и величины натяженій нити на концахъ должны быть равны реакціямъ точекъ привѣса нити.

§ 174. Общіе законы относительно натяженія и кривизны въ точкахъ гибкой нерастяжимой нити, находящейся въ равновѣсіи. Связь между вопросами о равновѣсіи гибкой нити и вопросами о движеніи матерьяльной точки.

Если даны силы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ какъ функціи отъ x, y, z, то дифференціальныя уравненія (1043) должны служить для опредѣленія вида

кривой, образуемой нитью въ положеніи равновѣсія и для опредѣленія натяженія λ въ функціи отъ s.

Независимо отъ вида функцій, выражающихъ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, можно вывести три общіе закона относительно натяженія и кривизны въ точкахъ нити, находящейся въ положеніи равновѣсія.

Представимъ дифференціальныя уравненія (1043) такъ:

$$\left.\begin{aligned}\lambda\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d\lambda}{ds}\,\frac{dx}{ds}+\mathfrak{X}_s&=0,\\ \lambda\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d\lambda}{ds}\,\frac{dy}{ds}+\mathfrak{Y}_s&=0,\\ \lambda\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d\lambda}{ds}\,\frac{dz}{ds}+\mathfrak{Z}_s&=0.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\textbf{(1043 bis)}$$

Означимъ черезъ T направленіе касательной къ кривой, проведенной въ сторону возрастающихъ s, черезъ ρ — направленіе главной нормали къ центру кривизны, черезъ b — направленіе бинормали, перпендикулярное къ плоскости кривизны; имѣя въ виду формулы (286) стр. 247 кинематической части, можно представить предыдущія равенства такъ:

$$\frac{\lambda}{\rho}\cos(\rho,\ X)+\frac{d\lambda}{ds}\cos(T,X)=-\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F},X),$$

$$\frac{\lambda}{\rho}\cos(\rho,\ Y)+\frac{d\lambda}{ds}\cos(T,Y)=-\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F},Y),$$

$$\frac{\lambda}{\rho}\cos(\rho,\ Z)+\frac{d\lambda}{ds}\cos(T,Z)=-\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F},Z),$$

гдѣ $\mathfrak{F}$ означаетъ величину и направленіе силы (разсчитанной на единицу длины), дѣйствующей въ разсматриваемой точкѣ нити.

Изъ этихъ равенствъ можемъ получить три другія:

$$\frac{d\lambda}{ds}=-\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F},T)\ldots\ldots\textbf{(1044)},$$

$$\frac{\lambda}{\rho}=-\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F},\rho)\ldots\ldots\textbf{(1045)},\quad 0=\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F},b),\,.\textbf{(1046)}$$

которыя выражаютъ слѣдующее:

1) Натяженіе λ есть такая функція отъ s, что производная отъ нея по s равняется отрицательно-взятой величинѣ проэкціи силы $\mathfrak{F}$ на направленіе касательной, проведенной въ сторону возрастающихъ s; (1044).

2) Во всякой точкѣ нити плоскость кривизны заключаетъ въ себѣ направленіе силы $\mathfrak{F}$; (1046).

3) Во всякой точкѣ нити главная нормаль составляетъ тупой уголъ съ направленіемъ $\mathfrak{F}$ и величина кривизны равняется проэкціи силы $\mathfrak{F}$ на направленіе главной нормали, дѣленной на величину натяженія; (1045).

Если силы $\mathfrak{F}$ имѣютъ потенціалъ, т. е. если:

$$\mathfrak{X}_s = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}, \ \mathfrak{Y}_s = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}, \ \mathfrak{Z}_s = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z},$$

то проэкція $\mathfrak{F}$ на направленіе касательной выразится такъ:

$$\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{F}, T) = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{d\mathfrak{U}}{ds},$$

а потому тогда уравненіе (1044) дастъ слѣдующій интегралъ:

$$\lambda + \mathfrak{U} = C = \lambda_0 + \mathfrak{U}_0, \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(1047)}$$

здѣсь λ_0 означаетъ величину натяженія въ точкѣ A, гдѣ $s = 0$, а $\mathfrak{U}_0$ — значеніе потенціала въ этой точкѣ.

Предположивъ, что силы $\mathfrak{F}$ имѣютъ потенціалъ, помножимъ дифференціальныя уравненія (1043) на λ; принявъ во вниманіе полученное выраженіе (1047) для λ, можно будетъ представить эти уравненія такъ:

$$\lambda\frac{d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \lambda\frac{d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \lambda\frac{d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

гдѣ:

$$Q = \frac{1}{2}(C - \mathfrak{U})^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(1048)}$$

Съ другой стороны, дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки, подверженной силѣ, имѣющей потенціалъ $(Q\,\textit{в}^2 : \textit{м})$, *) могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v\,\frac{d\left(v\,\frac{dx}{d\sigma}\right)}{d\sigma} = \frac{\textit{в}^2}{\textit{м}^2}\,\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$v\,\frac{d\left(v\,\frac{dy}{d\sigma}\right)}{d\sigma} = \frac{\textit{в}^2}{\textit{м}^2}\,\frac{\partial Q}{\partial y},\quad v\,\frac{d\left(v\,\frac{dz}{d\sigma}\right)}{d\sigma} = \frac{\textit{в}^2}{\textit{м}^2}\,\frac{\partial Q}{\partial z}\text{**}),$$

если масса точки равна единицѣ; кромѣ того, скорость этой точки выразится, по закону живой силы, такъ:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,\frac{\textit{в}^2}{\textit{м}^2}\,(Q - Q_0)};$$

если же начальное положеніе движущейся точки будетъ въ точкѣ A кривой линіи, по которой располагается нить, и если начальная скорость направлена по положительному направленію касательной въ этой точкѣ и равна $(\lambda_0\,\textit{в} : \textit{м})$, то во всѣхъ положеніяхъ движущейся точки скорость ея выразится такъ:

$$v = \frac{\textit{в}}{\textit{м}}\,(C - \mathfrak{U}) = \frac{\textit{в}}{\textit{м}}\,\lambda.$$

Послѣ этого нетрудно уже показать, что изъ дифференціальныхъ уравненій равновѣсія нити мы должны получить тѣ же самые результаты, какіе получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки, а именно, что функціи отъ s, выражающія координаты точекъ нити, тождественны съ функціями отъ σ, выражающими координаты точекъ траэкторіи.

Слѣдовательно, *кривая линія, по которой располагается свободная гибкая нерастяжимая нить, находясь въ положеніи равновѣсія при дѣйствіи силъ* $\mathfrak{F}$, *имѣющихъ потенціалъ* $\mathfrak{U}$, *тождественна съ траэк-*

---

*) Надо замѣтить, что λ имѣетъ измѣренія силы, $\mathfrak{F}$ — измѣренія силы дѣленной на длину, $\mathfrak{U}$ — измѣренія силы, Q — измѣренія квадрата силы. Единицы длины, массы и времени мы будемъ обозначать буквами *д, м, в*.

**) σ означаетъ длину дуги по траэкторіи движущейся точки.

торіею, описываемою свободною матерьяльною точкою при дѣйствіи силы, имѣющей потенціалъ

$$U = \frac{1}{2}\frac{в^2}{м^2}(\lambda_0 + \mathfrak{U}_0 - \mathfrak{U})^2,$$

если масса точки равна единицѣ, если начальное положеніе движущейся точки находится въ какой либо точкѣ A кривой, если направленіе начальной скорости совпадаетъ съ направленіемъ касательной въ точкѣ A и если величина начальной скорости равна $(\lambda_0 в : м)$, *гдѣ* λ_0 *есть величина натяженія въ точкѣ A;* $\mathfrak{U}_0$ *есть величина потенціала въ той же точкѣ.*

Въ слѣдующемъ параграфѣ приведены примѣры.

§ 175. Примѣры вопросовъ относительно положеній равновѣсія свободной гибкой нерастяжимой нити.

Составимъ дифференціальныя уравненія равновѣсія свободной тяжелой нити.

Предположимъ, что за начало координатъ взята начальная точка нити, что положительная ось $У^{овъ}$ направлена вертикально внизъ, оси $X^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ горизонтальны, и что вертикальная плоскость $XУ$ проведена черезъ касательную линію къ начальной точкѣ кривой; такъ какъ проэкціи силъ тяжести на ось $Z^{овъ}$ равны нулю, то третье изъ уравненій (1043) будетъ имѣть видъ:

$$\frac{d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 0;$$

очевидно, оно имѣетъ интегралъ: $\lambda\frac{dz}{ds} = C$, но такъ какъ въ началѣ координатъ касательная къ кривой перпендикулярна къ оси $Z^{овъ}$, то и на всемъ протяженіи кривой $\frac{dz}{ds}$ равно нулю, а, слѣдовательно, вся кривая заключается въ плоскости $XУ$.

Проэкція силъ тяжести на ось $X^{овъ}$ равна нулю, а проэкція на ось $У^{овъ}$ вѣса элемента ds равна $g\varkappa ds$, гдѣ $\varkappa$ есть *линейная плотность* нити въ одной изъ точекъ элемента; поэтому: $\mathfrak{X}=0$, $\mathfrak{Y}=g\varkappa$,

гдѣ $\varkappa$ есть нѣкоторая функція отъ s, если нить неоднородной линейной плотности.

Дифференціальныя уравненія равновѣсія свободной тяжелой нити будутъ, стало быть, таковы:

$$\frac{d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=0,\quad \frac{d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)}{ds}=-\varkappa g,\ \ldots\ldots \mathbf{(1049)}$$

гдѣ $\varkappa$ можетъ быть какою либо функціею отъ s.

Первое изъ этихъ уравненій даетъ интегралъ:

$$\lambda\frac{dx}{ds}=C_1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1050)}$$

при посредствѣ котораго можно преобразовать второе дифференціальное уравненіе слѣдующимъ образомъ.

Имѣя въ виду, что y изъ уравненія кривой выразится функціею отъ x, можемъ сдѣлать слѣдующее:

$$\lambda\frac{dy}{ds}=\lambda\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}=C_1\frac{dy}{dx}=C_1y';$$

далѣе, производную отъ y по x можно разсматривать какъ функцію отъ x, поэтому:

$$\frac{d(C_1y')}{ds}=C_1y''\frac{dx}{ds}=\frac{C_1y''}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

$$\varkappa=-\frac{C_1}{g}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds}=-\frac{C_1y''}{g\sqrt{1+(y')^2}}\ \ldots\ldots \mathbf{(1051)}$$

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

Примѣръ 154-й. Нить имѣетъ одинаковую линейную плотность по всей своей длинѣ, т. е. $\varkappa$ есть величина постоянная для всѣхъ s; опредѣлить видъ нити.

Для полученія уравненія кривой можно бы было интегрировать два раза уравненіе (1051), но, вмѣсто этого, мы поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Интегрируя уравненія (1049), получимъ:

$$\lambda \frac{dy}{ds} = C_2 - g\varkappa s \,..(1052),\quad \lambda \frac{dx}{ds} = C_1 \,......\, (1050)$$

Затѣмъ составимъ уравненіе (1044); въ настоящемъ случаѣ оно будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d\lambda}{ds} = - g\varkappa \frac{dy}{ds};$$

его интегралъ:

$$\lambda = C_3 - g\varkappa y \,............\, (1053)$$

Изъ этого интеграла и изъ интеграла (1050) можно исключить λ, получимъ дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{C_3 - g\varkappa y}{C_1}.$$

Сдѣлаемъ въ немъ подстановку:

$$\frac{C_3 - g\varkappa y}{C_1} = \eta,\quad \frac{g\varkappa}{C_1} = \frac{1}{k},\quad \frac{x}{k} = \xi_1,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{d\eta}{d\xi_1};$$

тогда изъ него получимъ:

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = - d\xi_1.$$

Произведемъ интегрированіе; получимъ

$$\log\left(\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}\right) = C_4 - \xi_1 = \xi;$$

или

$$\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} = e^{\xi};\,............\,(1054)$$

а отсюда

$$\frac{1}{\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}} = e^{-\xi},$$

или

$$\eta - \sqrt{\eta^2 - 1} = e^{-\xi} \,...........\,(1055)$$

Изъ равенствъ (1054) и (1055) получимъ:

$$\eta = \frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}),$$

то есть:

$$-y = -\frac{C_3}{g\varkappa} + \frac{k}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}),\ \xi = C_4 - \frac{x}{k}.$$

Обратимъ теперь вниманіе на значеніе постоянныхъ произвольныхъ.

Изъ интеграла (1050) видно, что C_1 есть величина натяженія въ той точкѣ кривой, гдѣ $\frac{dx}{ds}$ равно единицѣ, т. е. гдѣ касательная къ кривой горизонтальна; назовемъ величину этого натяженія знакомъ λ_0 и координаты этой точки буквами a и b. Такъ какъ $\eta C_1 = \lambda$, то въ этой точкѣ $\eta = 1$, а изъ равенства (1054) слѣдуетъ, что гдѣ $\eta = 1$ тамъ $\xi = 0$; поэтому:

$$C_1 = \lambda_0, \quad k = \frac{\lambda_0}{g\varkappa}, \quad C_3 = \lambda_0\left(1 + \frac{b}{k}\right), \quad C_4 = \frac{a}{k}.$$

Если перенести начало координатъ въ такую точку, старыя координаты которой суть $x = a$, $y = b + k$ и затѣмъ перемѣнить направленія положительныхъ осей координатъ на 180 градусовъ, то старыя координаты выразятся въ новыхъ x_1, y_1; такъ: $x = a - x_1$, $y = b + k - y_1$, а тогда уравненіе кривой получитъ слѣдующій видъ:

$$y_1 = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x_1}{k}} + e^{-\frac{x_1}{k}}\right);$$

но это есть извѣстное уравненіе *цѣпной линіи*; точка, въ которой касательная горизонтальна, есть самая нижняя точка S_0 (черт. 170) кривой и ордината ея равна k (въ новыхъ координатахъ).

Длина какой либо части дуги кривой опредѣлится безъ новаго интегрированія изъ интеграла (1052); условимся считать длину дуги отъ точки S_0; тогда $C_2 = 0$, а потому:

$$s = -\frac{\lambda}{g\varkappa}\,y'\,\frac{dx}{ds} = -\frac{\lambda_0}{g\varkappa}\,y' = -ky';$$

но

$$y' = \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\eta^2 - 1},$$

а изъ (1054) и (1055) найдемъ:

$$\sqrt{\eta^2 - 1} = \frac{1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}),$$

поэтому получимъ:

$$s = -\frac{k}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x_1}{k}} - e^{-\frac{x_1}{k}}\right) \ldots \textbf{(1056)}$$

Натяженіе выразится слѣдующею формулою:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{y_1}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1053, bis)}$$

И такъ, *тяжелая однородная гибкая нерастяжимая нить, находясь въ положеніи равновѣсія, принимаетъ видъ цѣпной линіи; натяженіе имѣетъ наименьшую величину въ самой нижней точкѣ кривой, а въ прочихъ точкахъ имѣетъ значенія, выражаемыя формулою (1053 bis).*

Примѣръ 155-й. При какомъ законѣ распредѣленія массы нити вдоль по ея длинѣ, свободная тяжелая нить, находясь въ положеніи равновѣсія, будетъ имѣть видъ параболы: $x^2 = 2py$? Положительная ось $Y^{овъ}$ направлена вертикально вверхъ.

Отвѣтъ. По формулѣ (1051) найдемъ:

$$\varkappa ds = \frac{C_1}{gp} dx,$$

т. е. массы всѣхъ элементовъ нити должны быть пропорціональны проэкціямъ ихъ длинъ на горизонтальную ось.

Примѣръ 156-й. Предполагается, что распредѣленіе массы нити такое, при которомъ отношеніе линейной плотности къ величинѣ натяженія имѣетъ одну и ту же величину μ по всему протяженію нити; каковъ видъ нити и законъ распредѣленія натяженій? Положительная ось $Y^{овъ}$ вертикально вверхъ.

Такъ какъ $\varkappa = \mu\lambda$, то:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \mu\lambda g \frac{dy}{ds}, \quad \lambda = C_3 e^{\mu g y}.$$

Подставивъ это выраженіе для λ въ интегралъ (1050), отдѣливъ перемѣнныя и интегрируя, получимъ уравненіе кривой:

$$y = -\frac{1}{\mu g} \log\left[\frac{C_3}{C_1} \cos\left(\mu g x + C_4\right)\right].$$

Если возьмемъ начало координатъ въ той точкѣ кривой, въ которой касательная горизонтальна и означимъ черезъ λ_0 величину натяженія въ этой точкѣ, то

$$C_1 = \lambda_0, \quad C_3 = \lambda_0, \quad C_4 = 0.$$

Законъ распредѣленія плотности:

$$\varkappa = \frac{\mu\lambda_0}{\cos(\mu g x)}.$$

Для того, чтобы получить выраженіе длины дуги, надо интегрировать уравненіе:

$$ds = \frac{\lambda}{\lambda_0}\, dx = \frac{dx}{\cos \mu g x};$$

если длины дугъ считать отъ начала координатъ, получимъ:

$$s = \frac{1}{2\mu g} \log\left[\frac{1 + \sin \mu g x}{1 - \sin \mu g x}\right].$$

Примѣръ 157-й. Однородная нить находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ слѣдующихъ силъ:

$$\mathfrak{X} = \omega^2 x, \quad \mathfrak{Y} = \omega^2 y, \quad \mathfrak{Z} = 0;$$

опредѣлить видъ нити.

(Это суть силы, отталкивающія точки нити отъ оси $Z^{овъ}$ пропорціонально разстояніямъ отъ нея).

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія равновѣсія нити таковы:

$$\frac{d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)}{ds} + \omega^2 x = 0, \quad \frac{d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)}{ds} + \omega^2 y = 0, \quad \frac{d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 0.$$

Прежде всего можемъ получить интегралы:

$$\lambda \frac{ds}{ds} = C_1, \quad \lambda = C_2 - \frac{\omega^2\rho^2}{2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2;$$

затѣмъ изъ первыхъ двухъ уравненій можно исключить ω^2, вслѣдствіе чего получится дифференціальное уравненіе, которое можно интегрировать; интегралъ будетъ:

$$\lambda\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C_3 = \lambda\rho^2\frac{d\theta}{ds}.$$

Изъ перваго и изъ третьяго интеграла слѣдуетъ:

$$\rho^2\frac{d\theta}{ds} = \frac{C_3}{C_1}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1057)$$

поэтому первый интегралъ можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{1}{C_1^2}\left(C_2 - \frac{\omega^2\rho^2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 + \frac{C_3^2}{C_1^2\rho^2}.$$

Интегрируя это дифференціальное уравненіе, получимъ одно изъ уравненій кривой линіи въ видѣ зависимости между ρ и s; выразивъ s въ функціи отъ ρ или обратно ρ въ функціи отъ s, можно будетъ исключить одну изъ этихъ двухъ перемѣнныхъ изъ уравненія (1057); интегрируя это уравненіе, получимъ другое уравненіе кривой.

Въ частномъ случаѣ эта кривая можетъ быть винтовою линіею; если C_3 равно нулю, то кривая будетъ плоскою.

Примѣръ 158-й. Однородная нить, заключающаяся въ плоскости XY, подвержена дѣйствію силъ, имѣющихъ потенціалъ:

$$\mathfrak{U} = -\mu\rho,$$

причемъ $\lambda_0 = \mu\rho_0$.

Опредѣлить видъ кривой, законъ натяженія и разсмотрѣть соотвѣтственный вопросъ движенія матерьяльной точки.

Сила $\mathfrak{F}$ здѣсь притягательная къ началу координатъ, такъ какъ:

$$\mathfrak{X} = -\mu\frac{x}{\rho}, \quad \mathfrak{Y} = -\mu\frac{y}{\rho}.$$

Интегралъ (1047) въ настоящемъ случаѣ будетъ:

$$\lambda = \mu\rho;$$

Затѣмъ, изъ дифференціальныхъ уравненій равновѣсія составимъ дифференціальное уравненіе:

$$x\frac{d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)}{ds}-y\frac{d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=0,\ldots\ldots(\mathbf{1057},\text{bis})$$

имѣющее слѣдующій интегралъ:

$$\lambda\rho^2\frac{d\theta}{ds}=\lambda_0\rho_0\sin(T_0,\ \rho_0)=\alpha.$$

Если принять во вниманіе, что:

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2},$$

то изъ полученныхъ двухъ интеграловъ составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=\frac{\mu^2\rho^6}{\alpha^2}-\rho^2,$$

которое легко интегрируется; оказывается, что кривая есть равносторонняя гипербола:

$$x^2-y^2=\frac{\alpha}{\mu}.$$

Опредѣлимъ теперь видъ траекторіи, описываемой матерьяльною точкою массы равной единицѣ при дѣйствіи силы, имѣющей потенціалъ:

$$U=\frac{в^2}{м}\,\frac{\mu^2\rho^2}{2},$$

причемъ:

$$v_0=\frac{в}{м}\lambda_0,\quad \rho_0v_0\sin(v_0,\ \rho_0)=\alpha\frac{в}{м}.$$

Окажется, что траекторія есть та же самая гипербола.

Примѣръ 159-й. Подобнымъ же образомъ разсмотрѣть тотъ случай, когда:

$$U=-\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}+n^2},\quad \lambda_0=\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}+n^2}.$$

Найдемъ: законъ натяженія:

$$\lambda=\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}+n^2},$$

сила — отталкивающая отъ начала координатъ, дифференціальное уравненіе кривой:

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{2\mu}{\alpha^2}\,\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}$$

и уравненіе кривой въ конечномъ видѣ:

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\theta+\gamma)};\; p=\frac{\alpha^2}{\mu},\quad e=\sqrt{1+\frac{n^2\alpha^2}{\mu^2}}.$$

Матерьяльная точка, движущаяся подъ вліяніемъ силы, имѣющей потенціалъ:

$$U=\frac{в^2}{м}\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{n^2}{2}\right),$$

описываетъ такую же траэкторію, если масса ея равна единицѣ и притомъ

$$v_0=\frac{в}{м}\lambda_0,\quad \rho_0 v_0\sin(v_0,\rho_0)=\alpha\frac{в}{м}.$$

§ 176. Положеніе равновѣсія гибкой нерастяжимой нити, помѣщенной на данной поверхности. Геодезическія линіи.

Если гибкая нерастяжимая нить помѣщена на какой либо вполнѣ *гладкой поверхности*, то въ числѣ приложенныхъ къ ней силъ будутъ заключаться нормальныя реакціи поверхности, которыя мы также будемъ разсчитывать на единицу длины нити, подобно силѣ $\mathfrak{F}$; а именно, величину главнаго вектора реакцій поверхности, приложенныхъ къ элементу ds, выразимъ такъ:

$$\Lambda\, ds\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

а проэкціи его на оси координатъ выразимъ произведеніями:

$$\Lambda\frac{\partial f}{\partial x}ds,\quad \Lambda\frac{\partial f}{\partial y}ds,\quad \Lambda\frac{\partial f}{\partial z}ds,$$

гдѣ f означаетъ функцію отъ x, y, z, представляющую первую часть уравненія $f(x,y,z)=0$ поверхности, а Λ есть неизвѣстная намъ функція отъ s.

Дифференціальныя уравненія равновѣсія нити будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)}{ds} + \mathfrak{X} + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)}{ds} + \mathfrak{Y} + \Lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \frac{d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)}{ds} + \mathfrak{Z} + \Lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1058)$$

Пользуясь этими уравненіями, надо имѣть въ виду, что координаты точекъ нити должны удовлетворять уравненію поверхности

$$f(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1059)$$

и что косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ касательною къ кривой, должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0 \ldots\ldots\ldots (1060)$$

Изъ уравненій (1058) можно составить дифференціальное уравненіе для опредѣленія λ въ функціи отъ s; для этого надо поступить такимъ же образомъ, какъ было поступлено съ дифференціальными уравненіями равновѣсія свободной нити, а именно надо помножить первое изъ уравненій (1058) на $\frac{dx}{ds}$, второе — на $\frac{dy}{ds}$, третье — на $\frac{dz}{ds}$ и затѣмъ сложить всѣ три уравненія; принявъ во вниманіе равенство (1060), получимъ то самое уравненіе (1044), какое получилось въ случаѣ нити свободной.

Для того, чтобы найти форму кривой линіи и законъ натяженія, надо интегрировать уравненіе (1044) и два дифференціальныя уравненія, получаемыя по исключеніи Λ изъ уравненій (1058).

Обратимъ сначала вниманіе на тѣ случаи, когда $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ равны нулю, т. е. *когда нить, натянутая на гладкой поверхности, под-*

вержена только реакціямъ этой поверхности; тогда интегралъ уравненія (1044) будетъ $\lambda = \lambda_0$ (т. е. *натяженіе нити одинаково по всей длинѣ нити*), а поэтому уравненія (1058) получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\Lambda}{\lambda_0}\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\Lambda}{\lambda_0}\frac{df}{dy}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\Lambda}{\lambda_0}\frac{df}{dz},$$

тождественный съ видомъ уравненій (320) страницы 199-й; слѣдовательно, *нить располагается по геодезической кривой.*

Если силы $\mathfrak{F}$ имѣютъ потенціалъ $\mathfrak{U}$, то натяженіе нити будетъ выражаться разностью $(C - \mathfrak{U})$, гдѣ C — постоянная; сравнивъ дифференціальныя уравненія (1058), помноженныя на λ, съ дифференціальными уравненіями движенія матерьяльной точки, имѣющей массу равную единицѣ, остающейся на поверхности (1059) и подверженной дѣйствію силъ, имѣющихъ потенціалъ

$$U = \frac{в^2}{м}\frac{1}{2}(C - \mathfrak{U})^2,$$

можемъ заключить, что траэкторія этой точки тождественна съ кривою линіею, образуемою нитью въ положеніи равновѣсія, если начальное положеніе движущейся точки совпадаетъ съ начальною точкою нити, если начальная скорость v_0 имѣетъ направленіе касательной къ нити и если $v_0 м = \lambda_0 в$. Между Λ и реакціею $\mathfrak{N}$ поверхности, приложенною къ движущейся точкѣ, оказывается слѣдующая зависимость:

$$\Lambda = \frac{м}{в^2}\frac{\mathfrak{N}}{(C - \mathfrak{U})\Delta f}.$$

Примѣръ 160-й. Положеніе равновѣсія тяжелой однородной нити на гладкой сферической поверхности.

Здѣсь:

$$\mathfrak{U} = g\varkappa z = g\varkappa R\cos\varphi,$$

если положительная ось Z^овъ^ направлена вертикально внизъ.

Составивъ два первыя дифференціальныя уравненія (1058) для разсматриваемаго теперь случая и исключивъ изъ нихъ Λ, получимъ уравненіе (1057, bis), имѣющее интегралъ:

$$\lambda\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = \alpha, \quad \lambda R^2\sin^2\varphi\frac{d\psi}{ds} = \alpha; \ldots \quad \textbf{(1061)}$$

а такъ какъ:

$$\lambda = h - g\varkappa R\cos\varphi, \quad \frac{ds}{d\psi} = R\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 + \sin^2\varphi},$$

то интегралъ (1061) можетъ быть представленъ въ видѣ слѣдующаго дифференціальнаго уравненія:

$$\alpha^2 R^2 \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2 = (R^2 - z^2)^2 \left[(h - g\varkappa z)^2 (R^2 - z^2) - \alpha^2\right].$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ уравненіе кривой, имѣющей нѣкоторое сходство съ тою кривою, которую описываетъ тяжелая точка на поверхности шара; на чертежѣ 171-мъ изображена часть подобной кривой.

Если предполагаютъ существованіе силъ тренія между поверхностью и нитью, то величину такой силы, приложенной къ элементу ds, полагаютъ равною $k\Lambda\Delta f ds$, гдѣ k есть положительное отвлеченное количество не большее коэфиціента тренія между веществомъ нити и веществомъ поверхности; направленіе силы тренія полагается въ касательной плоскости къ поверхности.

Примѣръ 161-й. Къ элементамъ нити, натянутой на данной поверхности, приложены только реакціи поверхности и силы тренія, направленныя по касательнымъ къ кривой линіи, образуемой нитью; опредѣлить видъ кривой и законъ натяженія нити, предполагая, что коэфиціентъ k имѣетъ наибольшую величину во всѣхъ точкахъ нити.

Въ этомъ случаѣ изъ уравненій равновѣсія нити можно составить три уравненія, аналогичныя уравненіямъ (367) стр. 222, а именно:

$$\frac{d\lambda}{ds} = -k\Lambda\Delta f, \quad \frac{\lambda}{\mathfrak{R}} = \Lambda\Delta f, \quad \frac{\lambda}{\mathfrak{R}}\operatorname{tg}(\rho, N) = 0;$$

изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

1) что нить должна расположиться по геодезической линіи,

2) что натяженіе вдоль по нити слѣдуетъ закону:

$$\lambda = \lambda_0 e^{f(s)}, \; f(s) = -k\int_0^s \frac{ds}{\mathfrak{R}}.$$

Такъ, на прямомъ цилиндрѣ съ круговымъ сѣченіемъ, геодезическая линія есть винтовая линія; пусть уголъ, составляемый касательною къ

такой линіи съ производящими, равенъ α, а радіусъ круга основанія равенъ R, пусть θ означаетъ, по прежнему, одну изъ цилиндрическихъ координатъ; какъ извѣстно, кривизна нормальнаго сѣченія поверхности цилиндра и длина дуги винтовой линіи выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{\Re} = \frac{\sin^2\alpha}{R}, \quad s = \frac{R\theta}{\sin\alpha},$$

поэтому законъ натяженія будетъ такой:

$$\lambda = \lambda_0 e^{-k\theta \sin\alpha},$$

т. е. натяженіе убываетъ, вслѣдствіе тренія, въ геометрической прогрессіи.

Положимъ, что $k = 0{,}25$, что $\alpha = 30^\circ$ и что нить обернута четыре раза вокругъ цилиндра; тогда отношеніе между натяженіями на концахъ нити достигаетъ величины:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = e^{\pi} = 23{,}14;$$

если же нить будетъ обернута 12 разъ, то отношеніе натяженій достигнетъ величины:

$$e^{3\pi} = 12396.$$

ГЛАВА XIV.

Объ ударѣ системы точекъ и твердыхъ тѣлъ о связи.

§ 177. Ударъ системы свободныхъ матерьяльныхъ точекъ о связь.

Положимъ, что система матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію какихъ либо силъ, связана неудерживающею связью:

$$s(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, t) \geqslant 0; \ldots (1062)$$

положимъ, что въ начальный моментъ эта связь находилась въ состояніи ослабленія, такъ что матерьяльныя точки получили нѣкоторое свободное движеніе, выражаемое слѣдующими функціями:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_{11}(t),\ x_2 = f_{21}(t), \ldots x_n = f_{n1}(t), \\ y_1 = f_{12}(t),\ y_2 = f_{22}(t), \ldots y_n = f_{n2}(t), \\ z_1 = f_{13}(t),\ z_2 = f_{23}(t), \ldots z_n = f_{n3}(t). \end{array}\right\} \ldots (1063)$$

Это движеніе будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока матерьяльныя точки не встрѣтятъ связи (1062), т. е. пока функція ϑ не обратится въ нуль. Моментъ t_0 встрѣчи долженъ быть наименьшимъ положительнымъ корнемъ уравненія:

$$\vartheta\,(f_{11}(t_0),\ f_{12}(t_0),\ f_{13}(t_0), \ldots . f_{n3}(t_0),\ t_0) = 0.$$

Если скорости $v_{01}, v_{02}, \ldots . v_{0n}$, которыми обладаютъ матерьяльныя точки въ моментъ встрѣчи, не удовлетворяютъ условію (506, *a*, стр. 321), т. е. если:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0 = \sum_{i=1}^{i=n} v_{0i}(P_i\vartheta)\cos(P_i\vartheta,\ v_{0i}) + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} < 0, \ldots (1064)$$

то произойдетъ ударъ точекъ о связь, состоящій въ томъ, что въ связи разовьются мгновенныя реакціи, которыя, дѣйствуя въ теченіи ничтожно-малаго промежутка времени $\mathfrak{T}$, измѣнятъ скорости v_{01}, $v_{02}, \ldots \ldots v_{0n}$ матерьяльныхъ точекъ въ другія скорости $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots \mathrm{v}_n$, удовлетворяющія условію (506, *a*):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{v}_i(P_i\vartheta)\cos(P_i\vartheta,\ \mathrm{v}_i) + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} \geqslant 0 \ldots \ldots \ldots (1065)$$

Вычисленіе дѣйствія этого удара основывается на такихъ же самыхъ соображеніяхъ, какія были приведены на стр. 291 — 295, причемъ, также какъ и тамъ, координаты матерьяльныхъ точекъ

предполагаются постоянными во все время удара, а импульсами немгновенныхъ силъ за время удара пренебрегаютъ; поэтому, измѣненія скоростей матерьяльныхъ точекъ во время удара выразятся слѣдующимъ образомъ (здѣсь написаны только равенства, относящіяся къ точкѣ i-той):

$$m_i \frac{dx_i}{dt} - m_i x_{0i}' = \frac{\partial 8}{\partial x_i} j,$$

$$m_i \frac{dy_i}{dt} - m_i y_{0i}' = \frac{\partial 8}{\partial y_i} j, \qquad j = \int_{t_0}^{t} \lambda dt,$$

$$m_i \frac{dz_i}{dt} - m_i z_{0i}' = \frac{\partial 8}{\partial z_i} j,$$

гдѣ t есть какой либо моментъ времени, заключающійся въ промежуткѣ между t_0 и $(t_0 + \mathfrak{T})$; въ частныя производныя отъ 8 должны быть подставлены: вмѣсто t — моментъ t_0 и вмѣсто координатъ точекъ — тѣ значенія ихъ, которыя онѣ имѣютъ въ этотъ моментъ; величины x_{0i}', y_{0i}', z_{0i}' суть проэкціи скорости v_{0i} на оси координатъ.

Изъ этихъ уравненій можно составить слѣдующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i (P_i 8) \cos(P_i 8, v_i) = \sum_{i=1}^{i=n} v_{0i} (P_i 8) \cos(P_i 8, v_{0i}) + j \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i 8)^2,$$

изъ котораго видно, что сумма

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1066)}$$

непрерывно возрастаетъ во время удара, такъ какъ непрерывно возрастаетъ интегралъ j, который въ этомъ равенствѣ помноженъ на положительную величину:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} P_i^2.$$

При такомъ непрерывномъ возрастаніи суммы (1066) долженъ наступить такой моментъ τ удара, въ который эта сумма, бывшая въ началѣ менѣе $\left(-\frac{\partial 8}{\partial t}\right)$, сдѣлается равною этой величинѣ; означимъ черезъ α_i, β_i, γ_i значенія проэкцій на оси координатъ скорости точки m_i въ этотъ моментъ, а самую скорость означимъ черезъ $\mathfrak{v}_i$ (соотвѣтственныя знаки для другихъ точекъ).

Этимъ моментомъ τ весь процессъ удара раздѣлится на два акта: первый актъ отъ момента t_0 до момента τ, второй — отъ момента τ до момента $t_0 + \vartheta = \mathfrak{t}$.

Такъ какъ въ моментъ τ скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial 8}{\partial x_i}\alpha_i + \frac{\partial 8}{\partial y_i}\beta_i + \frac{\partial 8}{\partial z_i}\gamma_i\right) + \frac{\partial 8}{\partial t} = 0, \ldots\ldots \mathbf{(1067)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{v}_i\, P_i \cos(P_i, \mathfrak{v}_i) + \frac{\partial 8}{\partial t} = 0, \ldots\ldots\ldots \mathbf{(1067,}\ \text{bis)}$$

то величина интеграла:

$$J = \int_{t_0}^{\tau} \lambda dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1068)}$$

за время перваго акта опредѣлится по формулѣ:

$$J = -\frac{\frac{\partial 8}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_{0i}\, P_i \cos(P_i, v_{0i})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} P_i^2} \ldots\ldots \mathbf{(1069)}$$

и тогда величины α_i, β_i, γ_i опредѣлятся по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i \alpha_i &= m_i x_{0i}' + J \frac{\partial в}{\partial x_i} \\ m_i \beta_i &= m_i y_{0i}' + J \frac{\partial в}{\partial y_i} \\ m_i \gamma_i &= m_i z_{0i}' + J \frac{\partial в}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (1070, i)$$

По этимъ формуламъ разсчитывается измѣненіе скоростей матерьяльныхъ точекъ за время перваго акта удара; что касается до момента τ, раздѣляющаго оба акта, то онъ можетъ быть опредѣленъ слѣдующими словами: *это есть тотъ моментъ удара, въ который скорости точекъ удовлетворяютъ равенству (1067).*

Чтобы вычислить измѣненіе скоростей за время втораго акта удара, надо знать величину интеграла:

$$I = \int_{\tau}^{t} \lambda dt$$

за время этого акта.

Основываясь на аналогіи между процессомъ удара системы точекъ о связь и процессомъ удара одной точки о поверхность, дѣлаютъ слѣдующее предположеніе:

Предполагается, что отношеніе $(I : J)$ есть отвлеченная дробь ε, величина которой не зависитъ ни отъ положеній точекъ системы, ни отъ скоростей ихъ, а только отъ упругихъ свойствъ частей механизма, замѣняющаго связь.

Дробь ε называется *коэфиціентомъ возстановленія связи.*

Если величина коэфиціента возстановленія связи извѣстна, то проэкціи x_i', y_i', z_i' на оси координатъ скоростей точекъ въ моментъ окончанія удара могутъ быть вычислены по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i x_i' &= m_i x_{0i}' + J \frac{\partial в}{\partial x_i} (1 + \varepsilon) \\ m_i y_i' &= m_i y_{0i}' + J \frac{\partial в}{\partial y_i} (1 + \varepsilon) \\ m_i z_i' &= m_i z_{0i}' + J \frac{\partial в}{\partial z_i} (1 + \varepsilon) \end{aligned}\right\} \dots (1071, i)$$

Приводимъ примѣры.

Примѣръ 162-й. Двѣ матерьяльныя точки m_1 и m_2 ограничены связью, выражаемою условіемъ:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - (R_1 + R_2) \geqslant 0;$$

(эту связь можно представить себѣ такъ, какъ упомянуто на стр. 306 въ примѣрѣ 55-мъ); предполагается, что точки эти движутся такимъ образомъ, что въ нѣкоторый моментъ разстояніе между ними становится равнымъ $(R_1 + R_2)$, скорости же ихъ въ этотъ моментъ не удовлетворяютъ условію, приведенному на страницѣ 324-й, такъ что:

$$v_{02} \cos(\overline{M_1 M_2},\, v_{02}) - v_{01} \cos(\overline{M_1 M_2},\, v_{01}) < 0.$$

Требуется опредѣлить результатъ удара, предполагая, что дана величина коэфиціента возстановленія связи.

Чтобы по возможности упростить разсчеты, предположимъ, что линія, соединяющая положенія точекъ въ моментъ встрѣчи, взята за ось $X^{\text{овъ}}$; такъ что во все время удара координаты y_1, y_2, z_1, z_2 равны нулю, $x_1 = x_2 + R_1 + R_2$, частныя производныя отъ s по y_1, y_2, z_1 и z_2 равны нулю, а частная производная по x_1 и отрицательно-взятая частная производная по x_2 равны единицѣ.

Дифференціальные параметры P_1 и P_2 равны единицѣ и направлены внаружу кратчайшаго разстоянія, т. е. P_1 направленъ по положительной оси $X^{\text{овъ}}$, а P_2 — противоположно ей; поэтому формула (1069) въ примѣненіи къ настоящему примѣру дастъ слѣдующее:

$$J = \frac{m_1 m_2 (x_{02}' - x_{01}')}{m_1 + m_2},$$

а изъ формулъ (1071) окажется:

$$x_1' = \frac{m_1 x_{01}' + m_2 x_{02}' + \varepsilon m_2 (x_{02}' - x_{01}')}{m_1 + m_2}, \ldots\ldots \textbf{(1072)}$$

$$x_2' = \frac{m_1 x_{01}' + m_2 x_{02}' - \varepsilon m_1 (x_{02}' - x_{01}')}{m_1 + m_2}, \ldots\ldots \textbf{(1073)}$$

$$y_1' = y_{01}', \quad z_1' = z_{01}', \quad y_2' = y_{02}', \quad z_2' = z_{02}'.$$

Слѣдовательно, *проэкціи скоростей точекъ на плоскость перпендикулярную къ линіи, соединяющей положенія точекъ, не измѣняются вслѣдствіе удара; измѣняются только проэкціи скоростей на эту линію.*

Полученныя формулы обыкновенно примѣняются къ вычисленію результата соударенія двухъ шаровъ; положивъ $\varepsilon = 0$, получимъ формулы для неупругихъ шаровъ, а при $\varepsilon = 1$ — для вполнѣ упругихъ.

Примѣръ 163-й. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки (массы m_1 и m_2) связаны одна съ другою нерастяжимою гибкою нитью длины l; въ моментъ $t = 0$ обѣ онѣ находились въ началѣ координатъ и первая получила начальную скорость α по горизонтальной оси $X^{\text{овъ}}$, вторая же не получила никакой начальной скорости.

Опредѣлить движеніе этихъ точекъ и изслѣдовать весь рядъ послѣдовательныхъ соудареній, совершающихся черезъ нить, предполагая, что коэфиціентъ возстановленія ε нити извѣстенъ.

Въ этомъ случаѣ уравненіе связи, находящейся въ состояніи напряженія, можетъ быть представлено такъ:

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 0,$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -2(x_1 - x_2); \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = 2(x_1 - x_2);$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = -2(y_1 - y_2); \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = 2(y_1 - y_2), \; P_1 = P_2 = 2l.$$

Съ самаго начала движеніе точекъ будетъ совершаться по закону:

$$x_1 = \alpha t, \quad y_1 = \frac{gt^2}{2}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{gt^2}{2},$$

такъ что кратчайшее разстояніе между ними будетъ параллельно горизонту во все время этой части движенія и въ моментъ начала перваго соударенія; этотъ моментъ t_1 опредѣлится изъ равенства:

$$l - (x_1 - x_2) = 0, \text{ т. е. } l - \alpha t_1 = 0.$$

Координаты и скорости точекъ въ этотъ моментъ будутъ:

$$x_{11} = l, \quad x_{21} = 0, \quad y_{11} = y_{21} = \frac{gl^2}{2\alpha^2},$$

$$x_{11}' = \alpha, \quad x_{21}' = 0, \quad y_{11}' = y_{21}' = \frac{gl}{\alpha},$$

поэтому:

$$\frac{\partial 8}{\partial x_1} = -2l, \ \frac{\partial 8}{\partial x_2} = 2l, \ \frac{\partial 8}{\partial y_1} = \frac{\partial 8}{\partial y_2} = 0.$$

Такъ какъ производныя первой части уравненія связи по y_1 и y_2 равны нулю (потому что $y_{11} = y_{21}$), то проэкціи скоростей точекъ на ось $Y^{овъ}$ неизмѣнятся вслѣдствіе удара; то же самое должно сказать и относительно всѣхъ послѣдующихъ ударовъ, а слѣдовательно движеніе точекъ параллельно оси $Y^{овъ}$ не претерпѣваетъ никакого измѣненія, такъ что кратчайшее разстояніе между ними остается всегда параллельнымъ горизонту.

$$J_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{x_{11}' - x_{21}'}{2l} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\alpha}{2l},$$

$$\mathrm{x}_{11}' = \alpha - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \alpha (1 + \varepsilon) = \alpha \frac{m_1 - m_2 \varepsilon}{m_1 + m_2},$$

$$\mathrm{x}_{21}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \alpha (1 + \varepsilon); \quad \mathrm{x}_{11}' - \mathrm{x}_{21}' = -\alpha\varepsilon.$$

Послѣ этого движеніе точекъ будетъ совершаться по закону:

$$x_1 = l + \mathrm{x}_{11}'(t - t_1), \ y_1 = g\frac{t^2}{2} = y_2, \ x_2 = \mathrm{x}_{21}'(t - t_1),$$

пока не наступитъ моментъ t_2 втораго соударенія, который опредѣлится изъ уравненія:

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0, \text{ т. е. } l^2 - (l - \alpha\varepsilon(t - t_1))^2 = 0;$$

одинъ изъ двухъ корней этого уравненія есть t_1, другой t_2:

$$t_2 = t_1 + \frac{2l}{\alpha\varepsilon}.$$

Въ этотъ моментъ $x_{12} - x_{22} = -l$, а скорости точекъ по оси $X^{овъ}$ суть x_{11}' и x_{21}', поэтому теперь:

$$\frac{\partial 8}{\partial x_1} = 2l, \ \frac{\partial 8}{\partial x_2} = -2l, \ J_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathrm{x}_{11}' - \mathrm{x}_{21}'}{2l},$$

и скорости точекъ послѣ втораго соудареніа будутъ:

$$x_{12}' = x_{11}' - \frac{m_2}{m_1+m_2}(x_{11}' - x_{21}')(1+\varepsilon) = \alpha\frac{m_1+m_2\varepsilon^2}{m_1+m_2},$$

$$x_{22}' = x_{21}' + \frac{m_1}{m_1+m_2}(x_{11}' - x_{21}')(1+\varepsilon) = \alpha\frac{m_1(1-\varepsilon^2)}{m_1+m_2},$$

$$x_{12}' - x_{22}' = -(x_{11}' - x_{21}')\varepsilon = \alpha\varepsilon^2.$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, найдемъ, что промежутокъ времени между моментами ударовъ $(2n-1)$-аго и $2n$-аго имѣетъ величину $(2l:\alpha\varepsilon^{2n-1})$, а потому:

$$t_{2n} = \frac{l}{\alpha} + \frac{2l}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^{2n-1}}\right).$$

Скорости точекъ послѣ этого момента будутъ:

$$(x_1')_{2n} = \alpha - \frac{m_2}{m_1+m_2}\alpha(1+\varepsilon)(1-\varepsilon+\varepsilon^2-\ldots-\varepsilon^{2n-1}) =$$

$$= \alpha\frac{m_1+m_2\varepsilon^{2n}}{m_1+m_2},$$

$$(x_2')_{2n} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\alpha(1+\varepsilon)(1-\varepsilon+\varepsilon^2-\ldots-\varepsilon^{2n-1}) = \alpha m_1\frac{1-\varepsilon^{2n}}{m_1+m_2},$$

а координаты точекъ въ моментъ t_{2n+1} будутъ:

$$(x_1)_{2n+1} = l + \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{2l}{\varepsilon^{2n}}\frac{1-\varepsilon^{2n}}{1-\varepsilon} = (x_2)_{2n+1} + l.$$

Если $\varepsilon = 0$, то послѣ перваго удара обѣ точки будутъ продолжать движеніе по параболамъ параллельнымъ той, которую описываетъ ихъ центръ инерціи; дальнѣйшихъ ударовъ не будетъ, потому что разстояніе между точками будетъ оставаться постояннымъ.

Если $\varepsilon = 1$, скорости точекъ послѣ 2-го, 4-го,.... и вообще послѣ всякаго четнаго удара будутъ:

$$(x_1')_{2n} = \alpha, \quad (x_2')_{2n} = 0,$$

а послѣ всякаго нечетнаго удара:

$$(x_1')_{2n+1} = \alpha\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}, \quad (x_2')_{2n+1} = \frac{2\alpha m_1}{m_1+m_2}.$$

Абциссы точекъ въ моменты нечетныхъ ударовъ:

$$(x_1)_{2n-1} = l + \frac{4l\,m_1(n-1)}{m_1+m_2}, \quad (x_2)_{2n-1} = \frac{4l\,m_1(n-1)}{m_1+m_2},$$

а въ моменты четныхъ ударовъ:

$$(x_1)_{2n} = -l + \frac{4l\,m_1 n}{m_1+m_2}, \quad (x_2)_{2n} = \frac{4l\,m_1 n}{m_1+m_2}.$$

На чертежѣ 173-мъ представлено движеніе въ случаѣ $m_2 = 3m_1$.

Примѣръ 164-й. Три матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3, неподверженныя никакимъ силамъ, находятся въ слѣдующемъ состояніи на плоскости XY:

$$x_1 = 0, \; x_2 = a, \; x_3 = 0$$

$$y_1 = 0, \; y_2 = 0, \; y_3 = 4a - t\alpha;$$

опредѣлить, какъ будутъ онѣ двигаться послѣ соударенія, которое произойдетъ при встрѣчѣ точками связи:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - a^2 \geqslant 0.$$

Окажется, что соудареніе произойдетъ въ моментъ $t_0 = \frac{3a}{\alpha}$; въ этотъ моментъ координата y_3 равна a.

По имѣющимся формуламъ найдемъ, что

$$J = \frac{m_1 m_2 m_3}{2m_2 m_3 + m_1(m_2+m_3)} \frac{\alpha}{a} = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mu} \frac{\alpha}{a}$$

и что скорости точекъ послѣ удара будутъ таковы:

$$x_1' = -\frac{m_2 m_3}{\mu}\alpha(1+\varepsilon), \quad y_1' = -\frac{m_2 m_3}{\mu}\alpha(1+\varepsilon)$$

$$x_2' = \frac{m_3 m_1}{\mu}\alpha(1+\varepsilon), \quad y_2' = 0, \; x_3' = 0,$$

$$y_3' = -\alpha + \frac{m_1 m_2}{\mu}\alpha(1+\varepsilon).$$

§ 178. Ударъ системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, о связь неудерживающую.

Когда матерьяльныя точки системы связаны нѣсколькими удерживающими связями:

$$s_1 = 0,\ s_2 = 0, \ldots\ldots s_p = 0,$$

то, при вычисленіи удара, происходящаго при встрѣчѣ точками неудерживающей связи (1062), предполагается, что скорости точекъ удовлетворяютъ равенствамъ (493, 1, 2,...p) (стр. 351) не только до и послѣ удара, но и во все время удара.

Чтобы получить уравненія, выражающія измѣненія скоростей точекъ въ теченіи удара, составимъ дифференціальныя уравненія движенія точекъ, подверженныхъ задаваемымъ силамъ и реакціямъ связей $s_1, s_2, \ldots s_p$, s и произведемъ надъ ними интегрированіе по времени въ предѣлахъ отъ t_0 до t (гдѣ t_0 есть моментъ начала удара); получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} m_i\frac{dx_i}{dt} &= m_i x_{0i}' + \mu_1\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + \mu_2\frac{\partial s_2}{\partial x_i} + \ldots + \mu_p\frac{\partial s_p}{\partial x_i} + j\frac{\partial s}{\partial x_i},\\ m_i\frac{dy_i}{dt} &= m_i y_{0i}' + \mu_1\frac{\partial s_1}{\partial y_i} + \mu_2\frac{\partial s_2}{\partial y_i} + \ldots + \mu_p\frac{\partial s_p}{\partial y_i} + j\frac{\partial s}{\partial y_i},\\ m_i\frac{dz_i}{dt} &= m_i z_{0i}' + \mu_1\frac{\partial s_1}{\partial z_i} + \mu_2\frac{\partial s_2}{\partial z_i} + \ldots + \mu_p\frac{\partial s_p}{\partial z_i} + j\frac{\partial s}{\partial z_i},\end{aligned}\right\} \quad (1074,1)$$

гдѣ:

$$\mu_1 = \int_{t_0}^{t}\lambda_1\,dt,\ \ \mu_2 = \int_{t_0}^{t}\lambda_2\,dt, \ldots \mu_p = \int_{t_0}^{t}\lambda_p\,dt,\ \ j = \int_{t_0}^{t}\lambda\,dt.$$

Можно доказать, что и въ этихъ случаяхъ разность:

$$\frac{ds}{dt} - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1075)$$

непрерывно возрастаетъ съ возрастаніемъ интеграла j.

Для доказательства, составимъ изъ уравненій (1074) слѣдующія $(p+1)$ равенства:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\vartheta}{dt}+\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0+jP_{00}+\mu_1P_{01}+\mu_2P_{02}+\ldots+\mu_pP_{0p}&=0,\\ jP_{10}+\mu_1P_{11}+\mu_2P_{12}+\ldots+\mu_pP_{1p}&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ jP_{p0}+\mu_1P_{p1}+\mu_2P_{p2}+\ldots+\mu_pP_{pp}&=0, \end{aligned}\right\}\quad(1076)$$

изъ которыхъ исключимъ p величинъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$; здѣсь P_{01}, $P_{11}, \ldots$ суть выраженія вида (520) стр. 353, составленныя изъ частныхъ производныхъ отъ $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ по координатамъ точекъ.

По исключеніи, получимъ слѣдующее равенство:

$$\left[\frac{d\vartheta}{dt}-\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0\right]\frac{\partial D}{\partial P_{00}}=jD, \ldots\ldots\ldots (1077)$$

гдѣ:

$$D=\begin{vmatrix} P_{00}, & P_{01}, & P_{02}, \ldots P_{0p}\\ P_{10}, & P_{11}, & P_{12}, \ldots P_{1p}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ P_{p0}, & P_{p1}, & P_{p2}, \ldots P_{pp} \end{vmatrix}$$

Но изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что симметричные опредѣлители такого вида, какъ D или производная отъ D по P_{00}, равняются суммамъ квадратовъ нѣсколькихъ опредѣлителей; поэтому отношеніе разности (1075) къ интегралу j равняется величинѣ положительной.

Изъ этого слѣдуетъ, что если въ моментъ t_0 скорости точекъ системы таковы, что $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0$ менѣе нуля (а тогда только и можетъ произойти ударъ), то въ теченіи удара величина $\frac{d\vartheta}{dt}$, непрерывно возрастая, должна когда нибудь обратиться въ нуль; тотъ моментъ времени, когда это произойдетъ, есть моментъ окончанія перваго акта удара и начала втораго акта.

Величина интеграла:

$$J = \int_{t_0}^{\tau} \lambda\, dt$$

опредѣлится изъ равенства:

$$J = -\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0 \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial P_{00}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1078)}$$

что же касается до величинъ прочихъ интеграловъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ за время перваго акта, то нѣтъ надобности заботиться объ ихъ опредѣленіи, потому что, какъ сейчасъ покажемъ, они могутъ быть совсѣмъ исключены изъ уравненій, служащихъ для опредѣленія скоростей точекъ по окончаніи удара.

Если ε есть коэфиціентъ возстановленія связи ϑ, то интегралъ j, за все время удара, будетъ равенъ $J(1+\varepsilon)$; означимъ черезъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_p$ величины интеграловъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ за то же самое время.

Изъ $3n$ равенствъ вида:

$$m_i \mathrm{x}_i' = m_i x_{0i}' + \varkappa_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_i} + \varkappa_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_i} + \ldots + \varkappa_p \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_i} + J \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(1+\varepsilon) \textbf{(1079)}$$

можно исключить p множителей $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\ldots\ldots \varkappa_p$; тогда получимъ $3n - p = \kappa$ равенствъ такого вида, какъ, напримѣръ, слѣдующее:

$$\begin{vmatrix} m_1(x_{01}' - \mathrm{x}_1') + J\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}(1+\varepsilon), & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_1} \\ m_2(x_{02}' - \mathrm{x}_2') + J\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}(1+\varepsilon), & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ m_s(x_{0s}' - \mathrm{x}_s') + J\frac{\partial \vartheta}{\partial x_s}(1+\varepsilon), & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_s}, \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_s}, \ldots \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_s} \end{vmatrix} = 0, \textbf{(1080)}$$

гдѣ $s = p + 1$; изъ этихъ равенствъ и изъ p равенствъ вида:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_i}\mathrm{x}_i' + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y_i}\mathrm{y}_i' + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z_i}\mathrm{z}_i'\right) + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \ldots \textbf{(1081, 1)}$$

можно вычислить величины скоростей x_1', y_1', z_1', x_2', ... z_n' всѣхъ точекъ системы по окончанiи удара.

Слѣдуетъ здѣсь замѣтить, что равенства вида (1080) могутъ быть получены еще другимъ образомъ.

Составимъ дифференцiальныя уравненiя движенiя точекъ данной системы, введя въ число приложенныхъ къ точкамъ силъ также и реакцiи связи ϑ; эти уравненiя будутъ такiя, какъ:

$$-m_i x_i'' + X_i + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_i} = 0;$$

изъ этихъ $3n$ уравненiй исключимъ p множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, получимъ $3n - p = н$ равенствъ такого вида какъ, напримѣръ, слѣдующее:

$$\begin{vmatrix} X_1 - m_1 x_1'' + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}, & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_1} \\ X_2 - m_2 x_2'' + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}, & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_s - m_s x_s'' + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s}, & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_s}, & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_s}, & \ldots & \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_s} \end{vmatrix} = 0 \ldots \textbf{(1082)}$$

Эти равенства примѣнимъ къ какому либо моменту удара и произведемъ надъ ними интегрированiе по времени въ предѣлахъ отъ t_0 до $t = t_0 + \mathfrak{T}$, т. е. отъ начала до конца удара; при интегрированiи надо принять во вниманiе:

1) Что импульсами немгновенныхъ силъ за время удара должно пренебречь, по ихъ ничтожной малости,

2) Что въ частныя производныя отъ $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_p$ должно подставить вмѣсто t — моментъ t_0, и координатамъ точекъ должно дать тѣ значенiя, которыя онѣ имѣютъ въ моментъ t_0, потому что продолжительность удара предполагается столь ничтожною, что въ теченiи ея матерьяльныя точки перемѣститься не успѣваютъ.

Въ силу втораго изъ этихъ замѣчанiй, величины частныхъ про-

изводныхъ отъ ε, ε_1, ε_2, ... ε_p постоянны въ теченіи всего времени удара; поэтому, очевидно, интегрируя въ вышесказанныхъ предѣлахъ уравненія (1082), получимъ равенства (1080).

Слѣдовательно, при разсчетѣ удара системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, о связь неудерживающую, можно поступить слѣдующимъ образомъ:

Надо составить тѣ $(3n-p)$ дифференціальныя уравненія движенія системы, которыя незаключаютъ множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, свойственныхъ удерживающимъ связямъ; въ этихъ уравненіяхъ надо замѣнить разности:

$$m_i x_i'' - X_i, \quad m_i y_i'' - Y_i, \quad m_i z_i'' - Z_i$$

разностями:

$$m_i(x_i' - x_{0i}'), \quad m_i(y_i' - y_{0i}'), \quad m_i(z_i' - z_{0i}'),$$

а множитель λ, свойственный неудерживающей связи ε, — величиною $J(1+\varepsilon)$, тогда получимъ $3n-p$ уравненій, которыя, вмѣстѣ съ равенствами (1081), послужатъ для опредѣленія скоростей точекъ послѣ удара; величина интеграла J выразится формулою (1078), которую можно получить изъ уравненій, относящихся къ первому акту удара.

Если декартовы координаты точекъ выразимъ помощію n независимыхъ координатныхъ параметровъ $q_1, q_2, \ldots q_n$, такъ что неудерживающая связь выразится условіемъ:

$$\varepsilon\,((q_1, q_2, \ldots q_n, t)) \geqslant 0,$$

то составимъ Лагранжевы дифференціальныя уравненія:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k + \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_k} \ldots\ldots\ldots (541, k)$$

и во вторыя части этихъ уравненій подставимъ значенія координатныхъ параметровъ и скоростей $q_{01}', q_{02}' \ldots q_{0n}'$ въ моментъ встрѣчи системы со связью ε, а вмѣсто t подставимъ t_0; затѣмъ произведемъ надъ

уравненіями (541) интегрированіе по t въ предѣлахъ отъ t_0 до $t=t_0+\vartheta$, причемъ примемъ во вниманіе, что интегралы

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}+Q_k\right)dt$$

за это время будутъ ничтожно малы, то получимъ слѣдующія равенства:

$$p_k-p_{0k}=J\frac{\partial \vartheta}{\partial q_k}(1+\varepsilon)\ldots\ldots\textbf{(1083, k)}$$

Величина интеграла J опредѣлится слѣдующимъ образомъ.

Означимъ черезъ $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_н$ значенія величинъ $p_1, p_2, \ldots p_н$ въ моментъ τ и черезъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_н$ значенія величинъ $q_1', q_2', \ldots q_н'$ въ тотъ же моментъ. Интегрируя уравненія (541) по времени въ предѣлахъ отъ t_0 до τ, получимъ равенства:

$$\pi_k-p_{0k}=J\frac{\partial \vartheta}{\partial q_k}\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(1084, k)}$$

Возьмемъ равенства (543) стр. 373-й

$$\varkappa_e=\beta_e+h_{1e}\pi_1+h_{2e}\pi_2+\ldots+h_{нe}\pi_н,$$

$$q_{0e}'=\beta_e+h_{1e}p_{01}+h_{2e}p_{02}+\ldots+h_{нe}\pi_{0н},$$

изъ нихъ и изъ равенствъ (1084) получимъ:

$$\varkappa_e-q_{0e}'=J\left(h_{1e}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_1}+h_{2e}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_2}+\ldots+h_{нe}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_н}\right)\ldots\textbf{(1085, e)}$$

Помноживъ это равенство на частную производную отъ ϑ по q_e, составивъ подобныя же выраженія для e, равнаго 1, 2, ... $н$, и сложивъ, получимъ:

$$0=\sum_{e=1}^{e=н}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_e}q_{0e}'+\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+J\sum_{k=1}^{k=н}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_k}\sum_{e=1}^{e=н}h_{ke}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_e},\ldots\textbf{(1086)}$$

потому что скорости въ моментъ τ удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial q_1}\varkappa_1+\frac{\partial \vartheta}{\partial q_2}\varkappa_2+\ldots\ldots+\frac{\partial \vartheta}{\partial q_н}\varkappa_н+\frac{\partial \vartheta}{\partial t}=0.$$

Величина J опредѣлится изъ равенства (1086); зная J, опредѣлимъ

скорости точекъ по окончаніи удара изъ равенствъ (1083, k) или изъ равенствъ:

$$q_k' = q_{0k}' + J(1+\varepsilon)\sum_{e=1}^{e=n} h_{ke}\frac{\partial s}{\partial q_e} \ldots\ldots (1087, k)$$

Примѣчаніе. Если система точекъ, связанныхъ удерживающими связями s_1 s_2, ... s_p была сначала въ покоѣ и въ нѣкоторый моментъ получила совокупность мгновенныхъ толчковъ, то скорости $q_1', q_2', \ldots q_n'$, пріобрѣтенныя вслѣдствіе этихъ мгновенныхъ силъ, опредѣлятся изъ слѣдующихъ выраженій.

Произведемъ надъ Лагранжевыми уравненіями (531) стр. 367 интегрированія по t въ предѣлахъ отъ нуля до ϑ, т. е. за время дѣйствія мгновенныхъ силъ; получимъ:

$$p_1 = \mathfrak{Q}_1,\ p_2 = \mathfrak{Q}_2, \ldots\ldots p_n = \mathfrak{Q}_n, \ldots\ldots (1088)$$

гдѣ

$$\mathfrak{Q}_k = \int_0^\vartheta Q_k\, dt = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\int_0^\vartheta X_i\, dt + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\int_0^\vartheta Y_i\, dt + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\int_0^\vartheta Z_i\, dt\right);$$

а скорости выразятся такъ:

$$q_k' = \beta_k + h_{1k}\mathfrak{Q}_1 + h_{2k}\mathfrak{Q}_2 + \ldots + h_{nk}\mathfrak{Q}_n \ldots (1089\, k)$$

Отсюда слѣдуетъ, что для того, чтобы сообщить покоющейся системѣ точекъ совокупность скоростей q_1', q_2', ... q_n', необходимо приложить къ ней такую совокупность мгновенныхъ силъ, чтобы составляющія по координатнымъ параметрамъ импульса всей совокупности были равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. По этой причинѣ величины $p_1, p_2, \ldots p_n$ могутъ быть названы *импульсами*, если величины q_1', q_2', ... q_n' можно называть скоростями.

Примѣръ 165-й. Четыре матерьяльныя точки M_1, M_2, M_3, M_4 связаны между собою нематерьяльными стержнями M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1 одинаковой длины l; массы всѣхъ четырехъ точекъ одинаковы и равны m. Весь ромбъ заключается въ плоскости XY, въ которой движется поступательно, параллельно положительной оси $Y^{овъ}$, причемъ точки M_1 и M_3 движутся вдоль по отрицательной части этой оси (черт. 174-й); это движеніе продолжается до встрѣчи точки M_1 съ осью $X^{овъ}$; опредѣлить результатъ удара точки M_1 о преграду:

$-y_1 \geqslant 0$, предполагая, что коэфиціентъ возстановленія ε этой преграды извѣстенъ.

Пусть V означаетъ величину скоростей точекъ въ моментъ начала удара; скорости эти параллельны положительной оси $Y^{овъ}$. Означимъ черезъ φ_0 величину угловъ $M_3M_1M_2$, $M_3M_1M_4$, въ моментъ начала удара.

Такъ какъ точки M_1 и M_3 не сойдутъ съ оси $Y^{овъ}$ во время удара, то положеніе системы можно вполнѣ опредѣлить двумя перемѣнными: ординатою y_c центра инерціи C и величиною φ угла $M_3M_1M_2$; координаты всѣхъ четырехъ точекъ выразятся слѣдующимъ образомъ въ этихъ двухъ координатныхъ параметрахъ:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = l \sin\varphi,\ x_3 = 0,\ x_4 = -l\sin\varphi,$$

$$y_1 = y_c + l\cos\varphi,\ y_2 = y_c,\ y_3 = y_c - l\cos\varphi,\ y_4 = y_c,$$

поэтому живая сила системы выразится такъ:

$$T = m\left(2(y_c')^2 + l^2(\varphi')^2\right),$$

а импульсы p_1, p_2 выразятся въ скоростяхъ y_c' и φ' такъ:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial y_c'} = 4m\, y_c',\ p_2 = 2ml^2\varphi'.$$

Живая сила выразится въ импульсахъ такимъ образомъ:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2}{4m} + \frac{p_2^2}{2ml^2}\right]; \qquad h_{11} = \frac{1}{4m}, \qquad h_{22} = \frac{1}{2ml^2}.$$

Аналитическое выраженіе преграды:

$$-(y_c + l\cos\varphi) \geqslant 0;$$

поэтому:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y_c} = -1, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} = l\sin\varphi_0.$$

Формула (1086) въ настоящемъ случаѣ будетъ:

$$-V + J\left(\frac{1}{4m} + \frac{\sin^2\varphi_0}{2m}\right) = 0,$$

а формулы (1087) дадутъ слѣдующія величины скоростей послѣ удара:

$$y_c' = V - \frac{V(1+\varepsilon)}{1+2\sin^2\varphi_0}, \quad (\varphi') = \frac{2V(1+\varepsilon)\sin\varphi_0}{l(1+2\sin^2\varphi_0)}.$$

Примѣръ 166-й. Ромбъ $M_1M_2M_3M_4$ состоитъ изъ четырехъ равныхъ матерьяльныхъ стержней, связанныхъ шарнирами въ вершинахъ ромба; стержни однородны, длина каждаго изъ нихъ l, масса m, моментъ инерціи стержня вокругъ середины его пусть будетъ mk^2. Видъ ромба и движеніе его въ моментъ встрѣчи оси $X^{овъ}$ съ точкою M_1 таковы же, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; опредѣлить результатъ удара.

Координаты центровъ инерціи стержней и угловыя скорости ихъ выразятся такъ:

M_1M_2	M_2M_3	M_3M_4	M_4M_1
$\frac{1}{2}l\sin\varphi$,	$\frac{1}{2}l\sin\varphi$,	$-\frac{1}{2}l\sin\varphi$,	$-\frac{1}{2}l\sin\varphi$,
$y_c+\frac{1}{2}l\cos\varphi$,	$y_c-\frac{1}{2}l\cos\varphi$,	$y_c-\frac{1}{2}l\cos\varphi$,	$y_c+\frac{1}{2}l\cos\varphi$,
φ',	$-\varphi'$,	φ'	$-\varphi'$;

поэтому живая сила системы, импульсы p_1, p_2 и прочія величины будутъ таковы:

$$T = \frac{m}{2}\left(4(y_c')^2 + (l^2+4k^2)(\varphi')^2\right)$$

$$p_1 = 4my_c', \quad p_2 = (l^2+4k^2)m\varphi',$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2}{4m} + \frac{p_2^2}{(l^2+4k^2)m}\right],$$

$$J = \frac{4m(l^2+4k^2)V}{l^2+4k^2+4l^2\sin^2\varphi_0},$$

$$y_c' = V - \frac{V(1+\varepsilon)(l^2+4k^2)}{l^2+4k^2+4l^2\sin^2\varphi_0}, \quad (\varphi') = \frac{4V(1+\varepsilon)l\sin\varphi_0}{l^2+4k^2+4l^2\sin^2\varphi_0}.$$

Примѣръ 167-й. Тотъ же самый ромбъ находится въ покоѣ на горизонтальной плоскости и къ точкѣ K стороны M_1M_2 (черт. 175-й) приложенъ импульсъ P, перпендикулярный къ направленію этой стороны. Отъ такого толчка ромбъ получитъ движеніе, сопровождаемое, вообще говоря, измѣненіемъ угла φ, но при нѣкоторой величинѣ раз-

стоянія M_1K ромбъ получитъ движеніе безъ измѣненія своего вида, такъ что уголъ φ сохранитъ начальную величину φ_0; опредѣлить величину этого разстоянія.

Означимъ черезъ ϑ величину угла, составляемаго направленіемъ CM_2 съ осью $X^{овъ}$; живую силу ромба можно выразить такъ:

$$T = \frac{m}{2}\left[4(x_c')^2 + 4(y_c')^2 + (l^2 + 4k^2)\left((\varphi')^2 + (\vartheta')^2\right)\right],$$

а импульсъ по координатному параметру φ — такъ:

$$\mathfrak{Q}_3 = P\left(\frac{\partial x_k}{\partial \varphi}\cos\varphi_0 + \frac{\partial y_k}{\partial \varphi}\sin\varphi_0\right),$$

гдѣ x_k и y_k суть координаты точки K:

$$x_k = x_c + b\sin\varphi\cos\vartheta - (l - b)\cos\varphi\sin\vartheta,$$

$$y_k = y_c + b\sin\varphi\sin\vartheta + (l - b)\cos\varphi\cos\vartheta,$$

b есть величина разстоянія M_1K, а начальная величина угла ϑ предполагается равною нулю.

Изъ равенствъ:

$$p_3 = (l^2 + 4k^2)\, m\,\varphi' = \mathfrak{Q}_3 = P(b - l\sin^2\varphi_0)$$

слѣдуетъ, что φ' будетъ равно нулю при всякой величинѣ P, если

$$b = l\sin^2\varphi_0.$$

§ 179. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на свободное твердое тѣло.

Положимъ, что къ свободному твердому тѣлу приложены мгновенныя силы, дѣйствующія въ теченіи ничтожно малаго промежутка времени отъ момента t_0 до момента $t_0 + \tau$; пусть

$$\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2, \ldots\ldots\ \mathfrak{X}_n,$$

$$\mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{Y}_2, \ldots\ldots\ \mathfrak{Y}_n,$$

$$\mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2, \ldots\ldots\ \mathfrak{Z}_n$$

суть проэкціи на оси координатъ импульсовъ этихъ силъ, а

$$a_1,\ a_2,\ \ldots . a_n,$$
$$b_1,\ b_2, \ldots . b_n,$$
$$c_1,\ c_2, \ldots . c_n.$$

координаты точекъ ихъ приложенія.

Для опредѣленія результата дѣйствія этихъ импульсовъ, надо взять интегралы по t (въ предѣлахъ отъ t_0 до $t_0 + \mathfrak{T}$) отъ шести дифференціальныхъ уравненій (616, A) (751) стр. 539-й; получимъ:

$$M(\mathrm{x}_c' - x_{0c}') = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{X}_i, \quad M(\mathrm{y}_c' - y_{0c}') = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Y}_i,$$

$$M(\mathrm{z}_c' - z_{0c}') = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_i \ldots\ldots\ldots (1090)$$

$$A_c(\mathrm{P} - P_0) - F_c(\mathrm{Q} - Q_0) - E_c(\mathrm{R} - R_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[(b_i - y_c)\mathfrak{Z}_i - (c_i - z_c)\mathfrak{Y}_i\right], \ldots (1091,\mathrm{a})$$

$$B_c(\mathrm{Q} - Q_0) - D_c(\mathrm{R} - R_0) - F_c(\mathrm{P} - P_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[(c_i - z_c)\mathfrak{X}_i - (a_i - x_c)\mathfrak{Z}_i\right], \ldots (1091,\mathrm{b})$$

$$C_c(\mathrm{R} - R_0) - E_c(\mathrm{P} - P_0) - D_c(\mathrm{Q} - Q_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[(a_i - x_c)\mathfrak{Y}_i - (b_i - y_c)\mathfrak{X}_i\right], \ldots (1091,\mathrm{c})$$

гдѣ A_c, B_c, C_c, D_c, E_c, F_c суть моменты и произведенія инерціи твердаго тѣла вокругъ осей, параллельныхъ осямъ координатъ, проведенныхъ черезъ центръ инерціи тѣла; P, Q, R суть проэкціи на

оси координатъ угловой скорости тѣла въ моментъ $t_0 + \mathfrak{T}$, а P_0, Q_0, R_0 проэкціи угловой скорости въ моментъ t_0; x_c', y_c', z_c' суть проэкціи скорости центра инерціи тѣла въ моментъ $t_0 + \mathfrak{T}$, а x_{0c}', y_{0c}', z_{0c}' — проэкціи скорости этой точки въ моментъ t_0.

Эти формулы опредѣляютъ *измѣненія* скорости центра инерціи и угловой скорости тѣла вслѣдствіе приложенія къ нему данныхъ импульсовъ; послѣднія три формулы (1091) значительно упрощаются, если за оси $X^{\text{овъ}}$, $Y^{\text{овъ}}$ и $Z^{\text{овъ}}$ будутъ взяты оси, параллельныя главнымъ центральнымъ осямъ инерціи тѣла; онѣ тогда получатъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{A}_c(\mathrm{P} - P_0) = (\mathfrak{L}_c)_x, \quad \mathfrak{B}_c(\mathrm{Q} - Q_0) = (\mathfrak{L}_c)_y,$$

$$\mathfrak{C}_c(\mathrm{R} - R_0) = (\mathfrak{L}_c)_z, \quad \ldots\ldots\ldots \textbf{(1092)}$$

гдѣ вторыя части суть проэкціи на оси координатъ главнаго момента импульсовъ вокругъ центра инерціи тѣла.

Изъ формулъ (1090) слѣдуетъ, что *скорость, сообщаемая центру инерціи свободнаго тѣла мгновенными силами, имѣетъ направленіе главнаго вектора импульсовъ и равна величинѣ главнаго вектора, дѣленной на массу тѣла*, такъ что дѣйствіе мгновенныхъ силъ на центръ инерціи тѣла не зависитъ отъ того, къ какимъ точкамъ тѣла приложены эти силы, а только отъ величинъ и направленій ихъ импульсовъ.

Изъ формулъ же (1092) видно, что направленіе угловой скорости, пріобрѣтаемой свободнымъ твердымъ тѣломъ, вообще говоря, не параллельно направленію главнаго момента импульсовъ вокругъ центра инерціи. Эти формулы могутъ быть истолкованы такъ:

Если къ центральному эллипсоиду инерціи провести касательную плоскость, перпендикулярную къ направленію главнаго момента $\mathfrak{L}$ *импульсовъ, то направленіе угловой скорости, пріобрѣтаемой свободнымъ тѣломъ, будетъ проходить черезъ точку прикосновенія этой плоскости къ эллипсоиду.* Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе какой либо касательной плоскости къ центральному эллипсоиду:

$$\mathfrak{A}_c x^2 + \mathfrak{B}_c y^2 + \mathfrak{C}_c z^2 = м\delta^4,$$

такое:

$$\mathfrak{A}_c x_0 x + \mathfrak{B}_c y_0 y + \mathfrak{C}_c z_0 z = м\delta^4;$$

для того, чтобы эта плоскость была перпендикулярна къ направленію $\mathfrak{L}$, надо чтобы координаты (x_0, y_0, z_0) точки прикосновенія ея къ эллипсоиду удовлетворяли равенствамъ:

$$\frac{\mathfrak{A}_c x_0}{\mathfrak{L}_x} = \frac{\mathfrak{B}_c y_0}{\mathfrak{L}_y} = \frac{\mathfrak{C}_c z_0}{\mathfrak{L}_z},$$

а эти равенства, на основаніи формулъ (1092), обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{x_0}{\mathrm{P} - P_0} = \frac{y_0}{\mathrm{Q} - Q_0} = \frac{z_0}{\mathrm{R} - R_0},$$

которыя выражаютъ, что геометрическая разность между угловою скоростью тѣла въ моментъ $(t_0 + \mathfrak{T})$ и угловою скоростью въ моментъ t_0 направлена вдоль по радіусу вектору эллипсоида, соединяющему центръ его съ точкою прикосновенія.

Каждую совокупность импульсовъ мгновенныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можно, подобно совокупности конечныхъ силъ (см. стр. 765), привести къ каноническому виду, замѣнивъ ее импульсомъ, направленнымъ вдоль по центральной оси совокупности и парою импульсовъ, дѣйствующею въ плоскости перпендикулярной къ центральной оси; такую каноническую совокупность мгновенныхъ силъ Болъ (Ball) называетъ *impulsive wrench.*

Всякое возможное безконечно-малое перемѣщеніе твердаго тѣла можно разсматривать какъ безконечно-малое винтовое движеніе вокругъ нѣкоторой центральной оси, т. е., какъ соединеніе безконечно малаго поступательнаго движенія параллельно этой оси съ безконечно-малымъ угловымъ вращеніемъ вокругъ нея; Болъ называетъ элементарное перемѣщеніе твердаго тѣла словомъ *twist*, означающимъ именно процессъ винтоваго движенія. Совокупность скоростей, которыми обладаютъ точки твердаго тѣла, можетъ быть разсматриваема какъ совокупность скоростей винтоваго движенія тѣла вокругъ центральной оси скоростей; Болъ называетъ совокупность скоростей точекъ твердаго тѣла *twist velocity.*

Каждый *twist* или каждая *twist velocity* характеризуется и вполнѣ выражается шестью величинами; пять изъ числа этихъ шести величинъ

54

опредѣляютъ нѣкоторый лѣвый винтъ; а именно: направленіе центральной оси опредѣляется двумя величинами (косинусами угловъ этого направленія съ двумя осями координатъ), далѣе, положеніе точки пересѣченія центральной оси съ плоскостью, проведенною черезъ начало координатъ перпендикулярно къ центральной оси, опредѣляется двумя координатами этой точки на этой плоскости, наконецъ, одна величина опредѣляетъ величину шага винта, это — отношеніе между величиною угловаго перемѣщенія и величиною поступательнаго перемѣщенія вдоль по центральной оси, а въ случаѣ *twist velocity* — отношеніе угловой скорости къ скорости точекъ центральной оси. Шестою величиною можетъ служить величина угловаго перемѣщенія или угловой скорости.

Каждый *wrench* или *impulsive wrench* также опредѣляется шестью величинами, а именно величиною главнаго вектора совокупности силъ или импульсовъ и еще пятью величинами, опредѣляющими винтъ, ось котораго совпадаетъ съ центральною осью силъ или импульсовъ и шагъ котораго измѣряется отношеніемъ главнаго центральнаго момента совокупности къ величинѣ главнаго вектора ея.

Всякій вопросъ объ опредѣленіи дѣйствія совокупности импульсовъ на свободное или несвободное твердое тѣло можетъ быть разсматриваемъ, какъ вопросъ объ опредѣленіи измѣненій, производимыхъ, надъ *twist velocity* тѣла, дѣйствіемъ даннаго *impulsive wrench*; точно также, всякій вопросъ объ опредѣленіи движенія даннаго свободнаго или не свободнаго твердаго тѣла подъ вліяніемъ данныхъ силъ есть вопросъ объ опредѣленіи винтовыхъ движеній тѣла въ каждый моментъ движенія подъ вліяніемъ данныхъ *wrench*. Упомянутая на стр. 765-й (въ выноскѣ) книга Боля (Ball): The theory of a screws; a study in the dynamics of a rigid body, 1876, представляетъ попытку изложенія механики твердаго тѣла въ этомъ направленіи. Недостатокъ мѣста не дозволяетъ намъ познакомить читателя съ этою механикою винтовыхъ движеній твердаго тѣла.

Если свободное покоющееся твердое тѣло подвержено одной мгновенной силѣ и если за оси координатъ взяты главныя центральныя оси инерціи тѣла, то проэкціи на эти оси скорости центра инерціи и угловой скорости, сообщаемыхъ этою силою, выразятся слѣдующими формулами:

$$M\alpha_c = \mathfrak{X}, \quad M\beta_c = \mathfrak{Y}, \quad M\gamma_c = \mathfrak{Z}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(1093)}$$

$$\mathfrak{A}_c p = b\mathfrak{Z} - c\mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{B}_c q = c\mathfrak{X} - a\mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{C}_c r = a\mathfrak{Y} - b\mathfrak{X}, . \quad \mathbf{(1094)}$$

[redacted]

гдѣ M — масса тѣла, a, b, c — координаты точки приложенія мгновенной силы, α_c, β_c, γ_c — проэкціи на главныя оси инерціи тѣла скорости центра инерціи, p, q, r — проэкціи на тѣ же оси угловой скорости.

Проэкціи на оси координатъ скорости какой либо точки твердаго тѣла могутъ быть выражены помощію извѣстныхъ формулъ въ координатахъ этихъ точекъ и въ величинахъ α_c, β_c, γ_c, p, q, r; составимъ выраженія проэкціи α_0, β_0, γ_0 скорости той точки, къ которой приложена мгновенная сила и замѣнимъ α_c, β_c, γ_c, p, q, r величинами, получаемыми изъ формулъ (1093, 1094); получимъ:

$$\alpha_0 = \mathfrak{X}\left(\frac{1}{M} + \frac{c^2}{\mathfrak{B}} + \frac{b^2}{\mathfrak{C}}\right) - \mathfrak{Y}\frac{ab}{\mathfrak{C}} - \mathfrak{Z}\frac{ac}{\mathfrak{B}},$$

$$\beta_0 = \mathfrak{Y}\left(\frac{1}{M} + \frac{a^2}{\mathfrak{C}} + \frac{c^2}{\mathfrak{A}}\right) - \mathfrak{Z}\frac{bc}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{X}\frac{ba}{\mathfrak{C}},$$

$$\gamma_0 = \mathfrak{Z}\left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{\mathfrak{A}} + \frac{a^2}{\mathfrak{B}}\right) - \mathfrak{X}\frac{ca}{\mathfrak{B}} - \mathfrak{Y}\frac{cb}{\mathfrak{A}}.$$

Вторыя части этихъ равенствъ суть частныя производныя по $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ отъ однородной функціи второй степени:

$$2T = \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{M} + \frac{(b\mathfrak{Z} - c\mathfrak{Y})^2}{\mathfrak{A}} + \frac{(c\mathfrak{X} - a\mathfrak{Z})^2}{\mathfrak{B}} +$$

$$+ \frac{(a\mathfrak{Y} - b\mathfrak{X})^2}{\mathfrak{C}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1095)$$

выражающей удвоенную величину живой силы тѣла:

$$2T = M(\alpha_c^2 + \beta_c^2 + \gamma_c^2) + \mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2.$$

Представимъ себѣ эллипсоидъ, выражаемый уравненіемъ (1095); черезъ точку $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ этого эллипсоида проведемъ касательную плоскость, на которую опустимъ перпендикуляръ D изъ центра эллипсоида; продолжимъ этотъ перпендикуляръ и отложимъ на немъ длину, равную $(2T : D)$, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты конца этой длины; эти координаты выразятся такъ:

$$x_1 = \frac{2T}{D}\cos(D, X) = \frac{\partial(2T)}{\partial\mathfrak{X}} = \alpha_0, \quad y_1 = \beta_0, \quad z_1 = \gamma_0;$$

слѣдовательно, длина $(2T : D)$, построенная какъ указано, изображаетъ величину и направленіе скорости точки (a, b, c) тѣла, если соотвѣтственный радіусъ векторъ эллипсоида (1095) представляетъ величину и направленіе импульса мгновенной силы, приложенной къ этой точкѣ.

§ 180. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, имѣющее постоянную неподвижную ось, вокругъ которой оно можетъ вращаться. Центръ удара.

Предположимъ, что къ какой либо точкѣ покоющагося твердаго тѣла, свобода котораго ограничена такъ, какъ объяснено въ § 138 (стр. 673), приложена мгновенная сила; требуется опредѣлить дѣйствіе этой силы на тѣло и ударъ на связи.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ суть проэкціи импульса на оси координатъ и a, b, c, — координаты точки приложенія импульса; предположимъ, что ось $X^{\text{овъ}}$ проведена перпендикулярно къ направленію импульса, такъ что $\mathfrak{X} = 0$.

Черезъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій (948), стр. 675, по t за время дѣйствія мгновенной силы, получимъ слѣдующія уравненія:

$$M\alpha_c = \mu_1 + \mu_4, \qquad \textbf{(1096, a)}$$

$$M\beta_c = \mathfrak{Y} + \mu_2 + \mu_5, \qquad \textbf{(1096, b)}$$

$$0 = \mathfrak{Z} + \mu_3 \qquad \textbf{(1096, c)}$$

$$л_x = -E_0 R = b\mathfrak{Z} - c\mathfrak{Y} - l\mu_5, \qquad \textbf{(1096, d)}$$

$$л_y = -D_0 R = -a\mathfrak{Z} + l\mu_4, \qquad \textbf{(1096, e)}$$

$$л_z = C_0 R = a\mathfrak{Y}, \qquad \textbf{(1096, f)}$$

гдѣ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 суть импульсы реакцій связей.

Послѣднее изъ этихъ равенствъ опредѣлитъ величину угловой скорости R вокругъ оси $Z^{\text{овъ}}$, получаемой тѣломъ вслѣдствіе дѣйствія

мгновенной силы; проэкціи α_c, β_c скорости центра инерціи тѣла выразятся такъ:

$$\alpha_c = -y_c R, \quad \beta_c = x_c R.$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ точки опоры оси вращенія тѣла не испытываютъ удара при дѣйствіи мгновенной силы, т. е. условія, при которыхъ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 и μ_5 равны нулю.

Изъ уравненія (1096, c) слѣдуетъ, что μ_3 будетъ равно нулю если $\mathfrak{Z} = 0$, т. е., если импульсъ будетъ перпендикуляренъ къ оси $Z^{овъ}$.

Если $\mathfrak{Z} = 0$, то изъ уравненія (1096, e) окажется, что μ_4 будетъ равно нулю при томъ условіи, чтобы D_0 было равно нулю.

Изъ уравненія же (1096, a) тогда окажется, что μ_1 будетъ равно нулю при условіи, чтобы y_c было равно нулю, т. е., центръ инерціи тѣла долженъ заключаться въ плоскости XZ, или, иначе говоря, импульсъ долженъ быть перпендикуляренъ не только къ оси $Z^{овъ}$, но и къ плоскости, проведенной черезъ эту ось и черезъ центръ инерціи тѣла.

Для того, чтобы μ_5 и μ_2 были равны нулю, надо, чтобы были удовлетворены слѣдующія равенства:

$$Mx_c R = \mathfrak{Y}, \quad c\mathfrak{Y} = E_0 R,$$

т. е.

$$\mathfrak{Y}\left(Mx_c \frac{a}{C_0} - 1\right) = 0, \quad \mathfrak{Y}\left(c - E_0 \frac{a}{C_0}\right) = 0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ опредѣляетъ координату a точки приложенія мгновенной силы; изъ него слѣдуетъ:

$$a = \frac{C_0}{Mx_c} = x_c + \frac{C_c}{Mx_c},$$

т. е. мгновенная сила должна быть приложена къ одной изъ точекъ оси качаній (см. стр. 681) тѣла вокругъ оси $Z^{овъ}$.

Второе изъ предыдущихъ равенствъ опредѣляетъ координату c; изъ него и изъ только что полученнаго выраженія для a слѣдуетъ:

$$cMx_c - E_0 = 0,$$

что можно написать такъ:

$$c\sum mx - \sum mzx = 0, \ \sum m(z-c)x = 0.$$

Проведемъ черезъ точку приложенія мгновенной силы плоскость перпендикулярную къ оси Z, пусть точка K есть точка пересѣченія этой плоскости съ осью $Z^{\text{овъ}}$; условія:

$$D_0 - cMy_c = 0, \quad E_0 - cMx_c = 0,$$

то есть:

$$\sum m(z-c)y = 0, \quad \sum m(z-c)x = 0,$$

выражаютъ, что ось $Z^{\text{овъ}}$ должна быть одною изъ главныхъ осей эллипсоида инерціи точки K.

Сопоставляя всѣ найденныя условія, можемъ сказать, что *для того, чтобы мгновенная сила не сообщила твердому тѣлу удара о точки опоры его неподвижной оси вращенія, необходимо*:

1) *чтобы направленіе мгновенной силы было перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ ось вращенія и черезъ центръ инерціи тѣла*,

2) *чтобы направленіе мгновенной силы заключалось въ плоскости, перпендикулярной къ оси $Z^{\text{овъ}}$ и проходящей черезъ такую точку K этой оси, для которой ось эта была бы главною осью инерціи*,

3) *и чтобы кратчайшее разстояніе направленія мгновенной силы отъ оси $Z^{\text{овъ}}$ равнялось бы разстоянію оси качаній твердаго тѣла вокругъ оси $Z^{\text{овъ}}$ отъ этой оси.*

Точка пересѣченія направленія мгновенной силы, удовлетворяющей этимъ условіямъ, съ осью качаній называется *центромъ удара*, соотвѣтствующимъ выбранной оси вращенія.

§ 181. О соударенiи двухъ твердыхъ тѣлъ.

Два какiя либо твердыя тѣла имѣли какое бы то ни было движенiе и въ нѣкоторый моментъ столкнулись; требуется опредѣлить результатъ ихъ соударенiя, принимая въ разсчетъ тренiе между ними, развивающееся во время процесса удара; предполагается, что между тѣлами только одна точка прикосновенiя.

Общую касательную плоскость обоихъ тѣлъ возьмемъ за плоскость XY, а точку прикосновенiя — за начало координатъ; проэкцiи скоростей центровъ инерцiи тѣлъ, угловыя скорости и координаты центровъ инерцiи обозначимъ слѣдующими буквами и знаками: x_1, y_1, z_1 — координаты центра инерцiи перваго тѣла, x_2, y_2, z_2 — втораго тѣла; α_1, β_1, γ_1 — проэкцiи на оси координатъ скорости центра инерцiи перваго тѣла въ моментъ начала удара, α_2, β_2, γ_2 — втораго тѣла; x_1', y_1', z_1' — проэкцiи скорости центра инерцiи перваго тѣла въ какой либо моментъ удара, x_2', y_2', z_2' — втораго тѣла; $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}_1$ — проэкцiи угловой скорости перваго тѣла въ моментъ начала удара, P_1, Q_1, R_1 — въ какой либо другой моментъ удара; $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{R}_2$, P_2, Q_2, R_2 — соотвѣтственныя величины для втораго тѣла; A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 — моменты и произведенiя инерцiи перваго тѣла вокругъ осей, проведенныхъ черезъ его центръ инерцiи параллельно осямъ координатъ, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 — моменты и произведенiя инерцiи втораго тѣла вокругъ осей, параллельныхъ осямъ координатъ, проведенныхъ черезъ его центръ инерцiи; M_1 и M_2 — массы тѣлъ.

Между тѣлами, въ точкѣ ихъ прикосновенiя, дѣйствуютъ: по нормали — реакцiи, а въ касательной плоскости — силы тренiя. Положимъ, что положительная ось $Z^{овъ}$ совпадаетъ съ тою частью общей нормали, которая направлена внутрь перваго тѣла и означимъ черезъ λ величину реакцiи, дѣйствующей въ какой либо моментъ t со стороны втораго тѣла на первое; эта реакцiя направлена по положительной оси $Z^{овъ}$, реакцiя же, дѣйствующая со стороны перваго тѣла на второе, направлена по отрицательной оси $Z^{овъ}$, но имѣетъ также величину λ. Означимъ черезъ F_x, F_y проэкцiи на оси $X^{овъ}$ и

$Y^{\text{овъ}}$ силы тренія F, дѣйствующей въ тотъ же моментъ t со стороны втораго тѣла на первое; проэкціи силы тренія, дѣйствующей со стороны перваго тѣла на втораго будутъ равны $(-F_x)$ и $(-F_y)$.

Относительно силы тренія, предположимъ:

1) что если проэкціи скоростей соприкасающихся точекъ обоихъ твердыхъ тѣлъ на общую касательную плоскость не равны по величинѣ и по направленію, то величина силы тренія равна $k\lambda$, а направленіе силы тренія, приложенной къ точкѣ перваго тѣла, противоположно направленію геометрической разности между проэкціями на общую касательную плоскость скорости этой точки и скорости точки прикосновенія втораго тѣла; k есть отвлеченная дробь—коэфиціентъ тренія между данными тѣлами;

2) если же проэкціи скоростей соприкасающихся точекъ равны и одинаково направлены, то $F = \varkappa\lambda$, гдѣ $\varkappa$ можетъ имѣть всякую величину отъ нуля до k.

Означимъ черезъ $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ слѣдующіе импульсы за время отъ момента t_0, начала удара, до какого либо момента t этого процесса:

$$\mathfrak{Z} = \int_{t_0}^{t} \lambda dt, \quad \mathfrak{X} = \int_{t_0}^{t} F_x dt, \quad \mathfrak{Y} = \int_{t_0}^{t} F_y dt,$$

такъ что:

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = \lambda, \quad \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = F_x, \quad \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = F_y \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\mathbf{(1097)}$$

Измѣненія скоростей центровъ инерціи тѣлъ и угловыхъ скоростей подъ вліяніемъ этихъ импульсовъ за время отъ t_0 до t опредѣлятся изъ двѣнадцати уравненій (для сокращенія, выписываемъ по одному уравненію изъ каждой группы):

$$M_1(x_1' - \alpha_1) = \mathfrak{X}, \,.\,.\,.\,\mathbf{(1098)} \quad M_2(x_2' - \alpha_2) = -\mathfrak{X}, \,.\,.\,.\,\mathbf{(1099)}$$

$$A_1(P_1 - \mathfrak{P}_1) - F_1(Q_1 - \mathfrak{Q}_1) - E_1(R_1 - \mathfrak{R}_1) = z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z}, \,.\,\mathbf{(1100)}$$

$$A_2(P_2 - \mathfrak{P}_2) - F_2(Q_2 - \mathfrak{Q}_2) - E_2(R_2 - \mathfrak{R}_2) = y_2\mathfrak{Z} - z_2\mathfrak{Y} \,.\,.\,\mathbf{(1101)}$$

Рѣшивъ три уравненія группы (1100) относительно разностей

$(P_1 - \mathfrak{P}_1)$, $(Q_1 - \mathfrak{Q}_1)$, $(R_1 - \mathfrak{R}_1)$, получимъ слѣдующія выраженія этихъ разностей:

$$K_1(P_1 - \mathfrak{P}_1) = \begin{vmatrix} z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z}, & -F_1, & -E_1 \\ x_1\mathfrak{Z} - z_1\mathfrak{X}, & B_1, & -D_1 \\ y_1\mathfrak{X} - x_1\mathfrak{Y}, & -D_1, & C_1 \end{vmatrix},$$

$$K_1(Q_1 - \mathfrak{Q}_1) = \begin{vmatrix} A_1, & z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z}, & -E_1 \\ -F_1, & x_1\mathfrak{Z} - z_1\mathfrak{X}, & -D_1 \\ -E_1, & y_1\mathfrak{X} - x_1\mathfrak{Y}, & C_1 \end{vmatrix},$$

$$K_1(R_1 - \mathfrak{R}_1) = \begin{vmatrix} A_1, & -F_1, & z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z} \\ -F_1, & B_1, & x_1\mathfrak{Z} - z_1\mathfrak{X} \\ -E_1, & -D_1, & y_1\mathfrak{X} - x_1\mathfrak{Y} \end{vmatrix},$$

$$K_1 = A_1B_1C_1 - A_1D_1^2 - B_1E_1^2 - C_1F_1^2 - 2D_1E_1F_1.$$

Если въ этихъ выраженіяхъ замѣнить значки $({}_1)$ — значками $({}_2)$, то будемъ имѣть выраженія для разностей:

$$\mathfrak{P}_2 - P_2, \ \mathfrak{Q}_2 - Q_2, \ \mathfrak{R}_2 - R_2,$$

тѣ самыя, которыя получимъ черезъ рѣшеніе уравненій группы (1101) относительно тѣхъ же разностей.

Означимъ черезъ $x'(O_1)$, $y'(O_1)$, $z'(O_1)$ проэкціи на оси координатъ скорости точки прикосновенія перваго тѣла, а черезъ $x'(O_2)$, $y'(O_2)$, $z'(O_2)$ — проэкціи скорости точки прикосновенія втораго тѣла. Ударъ между тѣлами происходитъ только въ томъ случаѣ, если, въ моментъ t_0 прикосновенія тѣлъ, проэкціи на ось $Z^{\text{овъ}}$ скоростей соприкасающихся точекъ удовлетворяютъ неравенству:

$$z'_0(O_1) - z'_0(O_2) < 0.$$

Знаки разностей:

$$x_0'(O_1) - x_0'(O_2), \qquad y_0'(O_1) - y_0'(O_2)$$

въ моментъ начала удара могутъ быть какіе угодно, но, такъ какъ выборъ направленій осей $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ совершенно свободенъ, то мы можемъ расположить эти оси такъ, что обѣ разности будутъ имѣть знаки положительные.

Три вышеприведенныя разности выражаютъ проэкціи на оси координатъ геометрической разности u между скоростями точекъ O_1 и O_2 въ моментъ t_0; означимъ черезъ U проэкцію на ось $Z^{овъ}$ и черезъ V — проэкцію на плоскость XY, геометрической разности между скоростями этихъ точекъ въ какой либо моментъ t удара, а черезъ φ — уголъ, составляемый направленіемъ V съ положительною осью X, такъ что:

$$V\cos\varphi = x'(O_1) - x'(O_2), \quad V\sin\varphi = y'(O_1) - y'(O_2),$$

$$U = z'(O_1) - z'(O_2);$$

U_0, V_0, φ_0 суть величины скоростей U, V и угла φ въ моментъ t_0.

По извѣстнымъ формуламъ кинематики твердаго тѣла составимъ выраженіе:

$$V\cos\varphi - V_0\cos\varphi_0 = x_1' - \alpha_1 - x_2' + \alpha_2 - z_1(Q_1 - \mathfrak{Q}_1) + y_1(R_1 - \mathfrak{R}_1)$$
$$- z_2(\mathfrak{Q}_2 - Q_2) + y_2(\mathfrak{R}_2 - R_2)$$

и два другія для $(V\sin\varphi - V_0\sin\varphi)$ и $(U - U_0)$; при посредствѣ равенствъ (1098) — 1101) выраженія эти получатъ слѣдующій видъ:

$$V\cos\varphi - V_0\cos\varphi_0 = a\mathfrak{X} + f\mathfrak{Y} + e\mathfrak{Z}, \ldots\ldots \quad \mathbf{(1102)}$$

$$V\sin\varphi - V_0\sin\varphi_0 = f\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + h\mathfrak{Z}, \ldots\ldots \quad \mathbf{(1103)}$$

$$U - U_0 = e\mathfrak{X} + h\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}, \ldots\ldots \quad \mathbf{(1104)}$$

гдѣ a, b, c, h, e, f суть нѣкоторыя функціи второй степени отъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, которыя можно опредѣлить нижеслѣдующимъ образомъ.

Составимъ выраженіе разности:

$$S = V(\mathfrak{X}\cos\varphi + \mathfrak{Y}\sin\varphi) + U\mathfrak{Z} - V_0(\mathfrak{X}\cos\varphi_0 + $$

$$+ \mathfrak{Y}\sin\varphi_0) - U_0\mathfrak{Z}; \ldots\ldots \textbf{(1105, 1)}$$

по формуламъ (1102 — 1104) она выразится шестичленомъ:

$$S = a\mathfrak{X}^2 + b\mathfrak{Y}^2 + c\mathfrak{Z}^2 + 2h\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} + 2e\mathfrak{Z}\mathfrak{X} + 2f\mathfrak{X}\mathfrak{Y}, \ldots \textbf{(1105, 2)}$$

а по тѣмъ формуламъ, которыя предшествовали формуламъ (1102 — 1104), она выразится такъ:

$$S = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2) + \frac{H_1}{K_1} + \frac{H_2}{K_2}, \ldots \textbf{(1105, 3)}$$

гдѣ

$$\frac{H_1}{K_1} = (z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z})(P_1 - \mathfrak{P}_1) + (x_1\mathfrak{Z} - z_1\mathfrak{X})(Q_1 - \mathfrak{Q}_1) + $$

$$+ (y_1\mathfrak{X} - x_1\mathfrak{Y})(R_1 - \mathfrak{R}_1); \ldots\ldots \textbf{(1106)}$$

$$H_1 = -\begin{vmatrix} A_1, & -F_1, & -E_1, & z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z} \\ -F_1, & B_1, & -D_1, & x_1\mathfrak{Z} - z_1\mathfrak{X} \\ -E_1, & -D_1, & C_1, & y_1\mathfrak{X} - x_1\mathfrak{Y} \\ z_1\mathfrak{Y} - y_1\mathfrak{Z}, & x_1\mathfrak{Z} - z_1\mathfrak{X}, & y_1\mathfrak{X} - x_1\mathfrak{Y}, & 0 \end{vmatrix} \ldots \textbf{(1107)}$$

и подобное же выраженіе для H_2; слѣдовательно, вышесказанныя величины a, b, c, h, e, f суть коэфиціенты у $\mathfrak{X}^2$, $\mathfrak{Y}^2$, $\mathfrak{Z}^2$, $2\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, $2\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, $2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ въ выраженіи (1105, 3).

Величина S по формулѣ (1105, 3) выражается функціею отъ импульсовъ $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, если H_1 и H_2 будутъ выражены опредѣлителями вида (1107); съ другой стороны S можетъ быть выражено функціею приращеній скоростей центровъ инерціи и приращеній угловыхъ скоростей, функціею, незаключающею импульсовъ; для этого надо исключить изъ H_1 и H_2 моменты импульсовъ: изъ H_1 (1106) — при помощи равенствъ

(1100), изъ H_2 — при помощи равенствъ (1101), кромѣ того, надо исключить импульсы изъ перваго члена выраженія (1105, 3) при помощи равенствъ (1098) (1099); составивъ такое выраженіе для S, увидимъ, что S есть удвоенная живая сила скоростей, пріобрѣтенныхъ тѣлами за время отъ момента t_0 до момента t, а именно $S = S_1 + S_2$, гдѣ:

$$S_1 = M_1\left[(x_1' - \alpha_1)^2 + (y_1' - \beta_1)^2 + (z_1' - \gamma_1)^2\right] + A_1(P_1 - \mathfrak{P}_1)^2 +$$
$$+ B_1(Q_1 - \mathfrak{Q}_1)^2 + C_1(R_1 - \mathfrak{R}_1)^2 - 2D_1(Q_1 - \mathfrak{Q}_1)(R_1 - \mathfrak{R}_1) -$$
$$- 2E_1(R_1 - \mathfrak{R}_1)(P_1 - \mathfrak{P}_1) - 2F_1(P_1 - \mathfrak{P}_1)(Q_1 - \mathfrak{Q}_1), \quad \ldots \textbf{(1108)}$$

и подобное же выраженіе для S_2.

Живая сила есть во всякомъ случаѣ величина положительная, поэтому S имѣетъ величину положительную. Возьмемъ выраженіе (1105, 2) и представимъ его подъ слѣдующимъ видомъ:

$$S = a\left(\mathfrak{X} + \frac{f}{a}\mathfrak{Y} + \frac{e}{a}\mathfrak{Z}\right)^2 + b_1\left(\mathfrak{Y} + \frac{ah - ef}{ab - f^2}\mathfrak{Z}\right)^2 + c_1\mathfrak{Z}^2,$$

$$b_1 = b - \frac{f^2}{a}, \quad c_1 = c - \frac{e^2}{a} - \frac{(ah - ef)^2}{a(ab - f^2)},$$

отсюда можемъ заключить, что $a > 0$, $ab - f^2 > 0$ и что

$$\Delta = abc - ah^2 - be^2 - cf^2 + 2hef > 0;$$

такимъ образомъ мы можемъ убѣдиться, что:

$$\left.\begin{array}{c} a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ bc - h^2 > 0, \\ ca - e^2 > 0,\ ab - f^2 > 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots \textbf{(1109)}$$

Исключивъ изъ равенствъ (1102), (1103) и (1104) импульсы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, получимъ слѣдующее равенство:

$$u\cos(u, G) - u_0\cos(u_0, G) = \frac{\Delta}{n}\mathfrak{Z}, \ldots\ldots \textbf{(1110)}$$

гдѣ:

$$u\cos(u, G) = V(\cos\varphi\cos(G, X) + \sin\varphi\cos(G, Y)) + U\cos(G, Z) \ \textbf{(1111)}$$

$$n\cos(G, X) = fh - eb, \quad n\cos(G, Y) = ef - ha,$$

$$n \cos(G, Z) = ab - f^2,$$

$$n = + \sqrt{(fh - eb)^2 + (ef - ha)^2 + (ab - f^2)^2}.$$

Такъ какъ Δ, n и $\mathfrak{Z}$ суть величины положительныя, и такъ какъ $\mathfrak{Z}$ непрерывно возрастаетъ во время удара, то равенство (1110) выражаетъ, что проэкція скорости u (т. е. геометрической разности между скоростями точекъ O_1 и O_2) на направленіе G непрерывно возрастаетъ во время всего процесса удара.

Направленіе G составляетъ острый уголъ съ осью Z, такъ какъ косинусъ этого угла равенъ положительной величинѣ $(ab - f^2)$, дѣленной на положительную величину n.

Чтобы отдать себѣ отчетъ въ томъ, какое значеніе имѣетъ направленіе G, представимъ себѣ, что импульсъ $\mathfrak{J}$, проэкціи котораго на оси координатъ суть импульсы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, изображенъ длиною, проведенною изъ точки O и разсмотримъ, при какихъ величинахъ и направленіяхъ импульса $\mathfrak{J}$ проэкція скорости u на плоскость XY (т. е. скорость V) можетъ быть равна нулю.

Изъ уравненій (1102) и (1103) слѣдуетъ, что это будетъ при такихъ величинахъ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, которыя удовлетворятъ одновременно двумъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} a\mathfrak{X} + f\mathfrak{Y} + e\mathfrak{Z} + V_0 \cos\varphi_0 = 0 \\ f\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + h\mathfrak{Z} + V_0 \sin\varphi_0 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (1112)$$

Если разсматривать $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ какъ прямолинейныя ортогональныя координаты точекъ пространства, то совокупность уравненій (1112) будетъ выражать нѣкоторую прямую линію.

На этой прямой находятся оконечности всѣхъ такихъ импульсовъ $\mathfrak{J}$, при которыхъ скорость V равна нулю; мы будемъ называть ее «линіею $V = 0$»; нетрудно убѣдиться, что направленіе G параллельно этой линіи.

Чтобы опредѣлить результатъ удара, надо знать законъ измѣненія скоростей V, U и угла φ съ теченіемъ времени, или выраженія скоростей V, U и угла φ въ функціи импульса $\mathfrak{Z}$, который непрерывно возрастаетъ во время процесса удара.

При составленіи этихъ выраженій надо имѣть въ виду, что между дифференціалами импульсовъ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ существуетъ такая зависимость:

$$d\mathfrak{X} = -kd\mathfrak{Z}\cos\varphi, \quad d\mathfrak{Y} = -kd\mathfrak{Z}\sin\varphi, \ldots\ldots \textbf{(1113)}$$

когда V не равна нулю, и такая зависимость:

$$(d\mathfrak{X})^2 + (d\mathfrak{Y})^2 < k^2(d\mathfrak{Z})^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1114)}$$

когда V равна нулю.

Если V_0 не равна нулю, то между дифференціалами импульсовъ существуетъ зависимость (1113) до тѣхъ поръ, пока V не обратится въ нуль; изъ уравненій (1102 — 1104) окажется, что дифференціалы dV, $d\varphi$, dU выражаются такъ:

$$\cos\varphi\, dV - V\sin\varphi\, d\varphi = (e - kf\sin\varphi - ka\cos\varphi)\, d\mathfrak{Z}$$

$$\sin\varphi\, dV + V\cos\varphi\, d\varphi = (h - kb\sin\varphi - kf\cos\varphi)\, d\mathfrak{Z}$$

$$dU = (c - kh\sin\varphi - ke\cos\varphi)\, d\mathfrak{Z}$$

Исключивъ изъ первыхъ двухъ уравненій дифференціалъ $d\mathfrak{Z}$, получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dV}{V} = \frac{e\cos\varphi + h\sin\varphi - kf\sin 2\varphi - ka\cos^2\varphi - kb\sin^2\varphi}{h\cos\varphi - e\sin\varphi - kf\cos 2\varphi + k(a-b)\cos\varphi\sin\varphi}\, d\varphi;$$

интегрируя это уравненіе, найдемъ зависимость между V и φ:

$$\log\frac{V}{V_0} = \psi(\varphi) - \psi(\varphi_0), \ldots\ldots\ldots \textbf{(1115)}$$

а отсюда, обратно, выразимъ φ функціею отъ V:

$$\varphi = \Phi\left(\frac{V}{V_0}, \varphi_0\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1116)}$$

Далѣе, подставимъ выраженіе V въ функціи отъ φ въ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dV}{d\mathfrak{Z}} = e\cos\varphi + h\sin\varphi - kf\sin 2\varphi - ka\cos^2\varphi - kb\sin^2\varphi,$$

которое также проинтегрируемъ; получимъ выраженіе для $\mathfrak{Z}$ въ функціи отъ φ:

$$\mathfrak{Z} = \Psi(\varphi); \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1117)$$

отсюда выразимъ φ функціею отъ $\mathfrak{Z}$, затѣмъ, при помощи равенства (1115), получимъ выраженіе для V въ функціи отъ $\mathfrak{Z}$, а наконецъ, изъ равенства (1110), найдемъ выраженіе для U въ функціи отъ $\mathfrak{Z}$:

$$U = \Theta(\mathfrak{Z}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1118)$$

Имѣя выраженія для скоростей U и V въ функціяхъ отъ $\mathfrak{Z}$, будемъ въ состояніи судить объ томъ, которая изъ нихъ раньше обратится въ нуль.

A) Если U раньше обратится въ нуль, чѣмъ V, то, по формуламъ (1118) (1117) (1115), найдемъ значенія $\mathfrak{Z}_1$, φ_1 и V_1 въ тотъ моментъ τ, когда U обращается въ нуль; затѣмъ, по формуламъ (1102 — 1104), найдемъ значенія $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$ въ этотъ моментъ, а по величинамъ $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ изъ формулъ (1098 — 1101) опредѣлимъ скорости центровъ инерціи и угловыя скорости тѣлъ въ моментъ τ.

B) Если V обратится въ нуль раньше чѣмъ U, то надо узнать, не будетъ ли V оставаться равнымъ нулю во все остальное время удара.

Для этого нужно, чтобы во все остальное время удара импульсы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ удовлетворяли уравненіямъ (1112); а потому дифференціалы импульсовъ должны тогда удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$(ab - f^2)\,d\mathfrak{X} = (fh - eb)\,d\mathfrak{Z},$$

$$(ab - f^2)\,d\mathfrak{Y} = (ef - hq)\,d\mathfrak{Z},$$

изъ которыхъ получимъ:

$$(d\mathfrak{X})^2 + (d\mathfrak{Y})^2 = (d\mathfrak{Z})^2 \operatorname{tg}^2(G, Z);$$

сравнивъ это равенство съ условіемъ (1114), можемъ заключить, что V можетъ оставаться равнымъ нулю во все остальное время удара только въ томъ случаѣ, если

$$\operatorname{tg}^2(G, Z) < k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1119)}$$

B, *a*) Если направленіе G удовлетворяетъ этому условію, то V остается дѣйствительно равнымъ нулю въ теченіи остальной части удара, такъ какъ при этомъ развивается менѣе тренія, чѣмъ тогда, когда V не равно нулю. Значеніе $\mathfrak{Z}_1$ въ тотъ моментъ τ, въ который U обратится въ нуль, опредѣлится изъ равенства (1110), которое дастъ:

$$\mathfrak{Z}_1 = -\frac{n}{\Delta}\, u_0 \cos(u_0,\, G) \ldots\ldots\ldots \textbf{(1120)}$$

Если величина коэфиціента возстановленія ε извѣстна, то, подставивъ въ уравненія (1112) величину $\mathfrak{Z}_1\,(1+\varepsilon)$, найдемъ изъ этихъ уравненій значенія $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$ для момента $t_0 + \mathfrak{T}$ окончанія всего удара, а затѣмъ изъ формулъ (1098—1101) опредѣлимъ остальное.

B, *b*) Когда же направленіе G не удовлетворяетъ условію (1119), тогда продолжаютъ пользоваться интегралами и формулами (1115—1118), причемъ скорость V можетъ сдѣлаться отрицательною.

Въ случаѣ (*A*) разчисленіе акта возстановленія производится слѣдующимъ образомъ. Зная $\mathfrak{Z}_1$, по имѣющимся формуламъ опредѣлимъ, не обращается ли V въ нуль при дальнѣйшемъ возрастаніи $\mathfrak{Z}$ отъ $\mathfrak{Z}_1$ до $\mathfrak{Z}_1\,(1+\varepsilon)$; если не обращается, то вычисляемъ значенія V_2, φ_2, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, соотвѣтствующія величинѣ $\mathfrak{Z}_1\,(1+\varepsilon)$, а далѣе пользуемся формулами (1098 — 1101).

Въ противоположномъ же случаѣ поступаемъ подобно тому, какъ въ случаяхъ *B*.

Къ сказанному должно добавить:

I. Если поверхности тѣлъ вполнѣ гладкія, то $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ должно положить равными нулю, такъ что V и φ останутся неизмѣнными во все время удара.

(*) II. Если поверхности тѣлъ вполнѣ шероховатыя, то предполагается, что въ моментъ τ скорость V успѣла уже обратиться въ нуль и разсчетъ производится такъ, какъ въ случаѣ (B, a).

III. Если разсматривается ударъ твердаго тѣла о неподвижную поверхность, то можно примѣнить предыдущія формулы, предположивъ, что второе тѣло ограничено данною поверхностью и имѣетъ безконечно-большую массу; тогда изъ уравненій (1098 — 1101) останутся только три уравненія (1098) и три уравненія (1100), и т. д. Точно такъ же можно получить формулы удара твердаго тѣла о неподвижную точку, предположивъ ея массу безконечно-большою.

Примѣръ 168-й. Ударъ однороднаго твердаго шара радіуса l о неподвижную плоскость; коэфиціентъ тренія k, коэфиціентъ возстановленія ε.

Положительную ось $Z^{ов}$ направимъ изъ точки прикосновенія черезъ центръ шара, плоскость ZX проведемъ черезъ направленіе скорости v_c паденія центра шара, уголъ паденія означимъ черезъ i (см. черт. 176).

Въ этомъ случаѣ равенства (1098) и (1100) будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$M(x_c' - v_c \sin i) = \mathfrak{X}, \quad My_c' = \mathfrak{Y}, \quad M(z_c' + v_c \cos i) = \mathfrak{Z},$$

$$\frac{2}{5} Ml^2 (P - \mathfrak{P}) = l\mathfrak{Y}, \quad \frac{2}{5} Ml^2 (Q - \mathfrak{Q}) = -l\mathfrak{X},$$

$$R = \mathfrak{R},$$

а равенства (1102 — 1104) — слѣдующія:

$$V \cos\varphi - V_0 \cos\varphi_0 = \frac{7}{2} \frac{\mathfrak{X}}{M}, \quad V \sin\varphi - V_0 \sin\varphi_0 = \frac{7}{2} \frac{\mathfrak{Y}}{M},$$

$$U = -v_c \cos i + \frac{\mathfrak{Z}}{M},$$

гдѣ:

$$V_0 \cos\varphi_0 = v_c \sin i - l\mathfrak{Q}, \quad V_0 \sin\varphi_0 = l\mathfrak{P}.$$

(*) Вычеркнуть въ концѣ предыдущей стр. слова: «такъ что V и φ останутся неизмѣнными во все время удара».

Пока V не обратится въ нуль, дифференціалы dV, $d\varphi$ и $d\mathfrak{Z}$ должны удовлетворять слѣдующимъ уравненіямъ:

$$dV = -\frac{7}{2}\frac{k}{M}d\mathfrak{Z}, \quad d\varphi = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что:

$$V = V_0 - \frac{7}{2}\frac{k}{M}\mathfrak{Z}, \quad \varphi = \varphi_0,$$

такъ что направленіе скорости V не измѣняется.

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ h, e, f равны нулю, то направленіе G параллельно оси $Z^{овъ}$ и неравенство (1119) имѣетъ мѣсто; поэтому, если въ какой либо моментъ удара скорость V обратится въ нуль, то она останется равною нулю до конца процесса удара.

Результатъ удара можетъ имѣть двѣ разновидности:

a) Если

$$V_0 > \frac{7}{2}k(1+\varepsilon)v_c\cos i,$$

то скорость V не обратится въ нуль даже и при концѣ удара; тогда:

$$\mathfrak{Z}_2 = M(1+\varepsilon)v_c\cos i, \quad \frac{\mathfrak{X}_2}{\cos\varphi_0} = \frac{\mathfrak{Y}_2}{\sin\varphi_0} = -k\mathfrak{Z}_2,$$

$$x_c' = v_c\sin i - k(1+\varepsilon)v_c\cos i\cos\varphi_0$$

$$y_c' = -k(1+\varepsilon)v_c\cos i\sin\varphi_0, \quad z_c' = \varepsilon v_c\cos i,$$

$$P = \mathfrak{P} + \frac{5}{2}\frac{y_c'}{l}, \quad Q = \mathfrak{Q} + \frac{5}{2}\frac{v_c\sin i - x_c'}{l}.$$

b) Если

$$V_0 < \frac{7}{2}k(1+\varepsilon)v_c\cos i,$$

то скорость V, начиная съ нѣкотораго момента до конца процесса удара, будетъ равна нулю; въ концѣ удара:

$$\mathfrak{X}_2 = -\frac{2}{7}V_0M\cos\varphi_0, \quad \mathfrak{Y}_2 = -\frac{2}{7}V_0M\sin\varphi_0,$$

$$x_c' = v_c\sin i - \frac{2}{7}V_0\cos\varphi_0 = \frac{5}{7}v_c\sin i + \frac{2}{7}l\mathfrak{Q},$$

$$\mathfrak{y}_c' = -\frac{2}{7} l\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{z}_c' = \varepsilon v_c \cos i, \quad P = \frac{2}{7}\mathfrak{P}, \quad Q = \frac{\mathfrak{x}_c'}{l}.$$

Возьмемъ тѣ случаи, когда $\mathfrak{P} = 0$. Тогда $\varphi_0 = 0$, $V_0 = v_c \sin i - l\mathfrak{Q}$; легко убѣдиться, что тангенсъ угла r отраженія будетъ въ случаяхъ a и b выражаться такъ:

$$(a) \ldots\ldots \varepsilon \operatorname{tg} r = \operatorname{tg} i - k(1 + \varepsilon),$$

$$(b) \ldots\ldots \varepsilon \operatorname{tg} r = \frac{5}{7} \operatorname{tg} i + \frac{2}{7} \frac{l\mathfrak{Q}}{v_c \cos i}.$$

Примѣръ 169-й. Соудареніе двухъ однородныхъ твердыхъ шаровъ; радіусы l_1 и l_2, коэфиціенты тренія и возстановленія k и ε.

Въ этомъ случаѣ D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2, h, e, f, x_1, y_1, x_2, y_2, равны нулю, $z_1 = l_1$, $z_2 = -l_2$, далѣе

$$V\cos\varphi - V_0 \cos\varphi_0 = \frac{7}{2}\mu\mathfrak{X}, \quad V\sin\varphi - V_0\sin\varphi_0 = \frac{7}{2}\mu\mathfrak{Y},$$

$$U - U_0 = \mu\mathfrak{Z}, \quad \mu = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}, \quad U_0 = \gamma_1 - \gamma_2,$$

$$V_0 \cos\varphi_0 = \alpha_1 - \alpha_2 - l_1\mathfrak{Q}_1 - l_2\mathfrak{Q}_2,$$

$$V_0 \sin\varphi_0 = \beta_1 - \beta_2 + l_1\mathfrak{P}_1 + l_2\mathfrak{P}_2,$$

$$dV = -\frac{7}{2}\mu k\, d\mathfrak{Z}, \quad d\varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

$$V = V_0 - \frac{7}{2}\mu k\mathfrak{Z}.$$

Направленіе G параллельно оси $Z^{овъ}$. Здѣсь также возможны двѣ разновидности ударовъ:

a) Если

$$V_0 > -\frac{7}{2} k U_0 (1 + \varepsilon),$$

то импульсы въ моментъ окончанія удара будутъ:

$$\mu\mathfrak{X}_2 = kU_0(1 + \varepsilon)\cos\varphi_0, \quad \mu\mathfrak{Y}_2 = kU_0(1 + \varepsilon)\sin\varphi_0,$$

$$\mu\mathfrak{Z}_2 = -U_0(1 + \varepsilon);$$

b) если же

$$V_0 < -\frac{7}{2}kU_0(1+\varepsilon),$$

то скорость V обратится въ нуль ранѣе окончанія удара и импульсы въ моментъ $(t_0+\vartheta)$ будутъ:

$$\mu\mathfrak{X}_2 = -\frac{2}{7}V_0\cos\varphi_0,\quad \mu\mathfrak{Y}_2 = -\frac{2}{7}V_0\sin\varphi_0,$$

$$\mu\mathfrak{Z}_2 = -U_0(1+\varepsilon).$$

Примѣръ 170-й. Разсмотримъ такой случай столкновенія двухъ тѣлъ, въ которомъ: x_1, y_1, x_2, y_2, D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2 равны нулю, т. е. когда центры инерціи тѣлъ находятся на общей нормали, когда съ этою нормалью совпадаетъ по одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи каждаго тѣла и когда остальныя главныя оси попарно параллельны между собою.

Примѣняя предыдущія формулы, найдемъ, что проэкціи угловыхъ скоростей на ось $Z^{овъ}$ не измѣняются вслѣдствіе удара, что h, e, f равны нулю и что

$$a = \mu + \frac{l_1^2}{B_1} + \frac{l_2^2}{B_2},\quad b = \mu + \frac{l_1^2}{A_1} + \frac{l_2^2}{A_2},$$

$$c = \mu = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2},\quad U = U_0 + \mu\mathfrak{Z},$$

гдѣ

$$l_1 = z_1,\quad -l_2 = z_2.$$

Направленіе G параллельно оси $Z^{овъ}$, такъ что, если въ какой либо моментъ удара скорость V обратится въ нуль, то она останется равною нулю и до конца удара.

Далѣе, найдемъ, что дифференціальныя уравненія, опредѣляющія законъ измѣненія φ и V, таковы:

$$dV = -(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)\,kd\mathfrak{Z},$$

$$Vd\varphi = (a-b)\,k\sin\varphi\cos\varphi\, d\mathfrak{Z}.$$

Интегрируя эти уравненія, получимъ:

$$V\,\mathrm{tg}^n\varphi\sin\varphi = V_0\,\mathrm{tg}^n\varphi_0\sin\varphi_0,\quad n = \frac{b}{a-b},$$

$$\frac{(a-b)k\mathfrak{Z}}{V_0 \sin\varphi_0 \operatorname{tg}^n \varphi_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\operatorname{cotg}^n \varphi}{\cos\varphi \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Изъ того, что произведеніе $V \operatorname{tg}^n \varphi \sin\varphi$ остается постояннымъ, слѣдуетъ, что съ уменьшеніемъ V произведеніе $\operatorname{tg}^n \varphi \sin\varphi$ должно увеличиваться, такъ что, если $n > 0$, — уголъ φ увеличивается, а если $n < 0$, то φ уменьшается; V можетъ обратиться въ нуль при углѣ φ равномъ $\frac{\pi}{2}$ въ первомъ случаѣ и при углѣ φ равномъ нулю — во второмъ.

Если $a = b$, то уголъ φ остается неизмѣнно равнымъ φ_0.

Если V обратится въ нуль ранѣе, чѣмъ $\mathfrak{Z}\mu$ достигнетъ величины $-U_0(1+\varepsilon)$, то прочія проэкціи импульса будутъ имѣть слѣдующія величины при окончаніи удара:

$$\mathfrak{X}_2 = -\frac{V_0 \cos\varphi_0}{a}, \quad \mathfrak{Y}_2 = -\frac{V_0 \sin\varphi_0}{b}.$$

§ 182. Мгновенное измѣненіе живой силы системы матерьяльныхъ точекъ вслѣдствіе приложенія къ нимъ мгновенныхъ силъ.

Система, состоящая изъ матерьяльныхъ точекъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, связанныхъ удерживающими связями $s_1, s_2, \ldots s_p$, находится въ движеніи подъ вліяніемъ данныхъ конечныхъ силъ; положимъ, что въ нѣкоторый моментъ t_0 точки системы подвергаются вліянію мгновенныхъ силъ, дѣйствующихъ въ теченіи ничтожно-малаго промежутка времени $\mathfrak{T}$; означимъ черезъ $v_{0i}, x_{0i}', y_{0i}', z_{0i}'$ скорость точки m_i и проэкціи ея на оси координатъ въ моментъ t_0 и черезъ $\mathrm{v}_i, \mathrm{x}_i', \mathrm{y}_i', \mathrm{z}_i'$ подобныя же величины, относящіяся къ моменту $t_0 + \mathfrak{T}$; пусть $\mathfrak{J}_i$ означаетъ импульсъ мгновенной силы, приложенной къ точкѣ m_i, а $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Z}_i$ — проэкціи этого импульса на оси координатъ.

Измѣненія скоростей точекъ вслѣдствіе дѣйствія этихъ мгновенныхъ силъ выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} m_i(\mathrm{x}_i' - x_{0i}') &= \mathfrak{X}_i + \varkappa_1 \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial x_i} + \varkappa_2 \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial x_i} + \ldots + \varkappa_p \frac{\partial \mathfrak{z}_p}{\partial x_i} \\ m_i(\mathrm{y}_i' - y_{0i}') &= \mathfrak{Y}_i + \varkappa_1 \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial y_i} + \varkappa_2 \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial y_i} + \ldots + \varkappa_p \frac{\partial \mathfrak{z}_p}{\partial y_i} \\ m_i(\mathrm{z}_i' - z_{0i}') &= \mathfrak{Z}_i + \varkappa_1 \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial z_i} + \varkappa_2 \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial z_i} + \ldots + \varkappa_p \frac{\partial \mathfrak{z}_p}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} . \quad (1121, \mathrm{i})$$

(Измѣненіе скорости каждой изъ остальныхъ точекъ выражается тремя подобными же формулами).

Пользуясь этими равенствами, составимъ выраженія: 1) величины разности между живою силою системы въ моментъ $t_0 + \mathfrak{T}$ и въ моментъ t_0 и 2) величины живой силы приращеній или измѣненій скоростей точекъ системы.

Помножимъ равенства (1121, i) соотвѣтственно на x_{0i}', y_{0i}', z_{0i}', сдѣлаемъ то же самое съ равенствами, относящимися къ другимъ точкамъ, сложимъ полученные результаты и примемъ во вниманіе, что скорости x_{0i}', y_{0i}', z_{0i}' должны удовлетворять равенствамъ (493, 1, 2, . . . p) стр. 351-й; получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\mathrm{x}_i' x_{0i}' + \mathrm{y}_i' y_{0i}' + \mathrm{z}_i' z_{0i}') - \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{0i}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} (\mathfrak{X}_i x_{0i}' + \mathfrak{Y}_i y_{0i}' + \mathfrak{Z}_i z_{0i}') - \varkappa_1 \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial t} - \varkappa_2 \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial t} - \ldots - \varkappa_p \frac{\partial \mathfrak{z}_p}{\partial t}; \quad (1122)$$

съ другой стороны, повторивъ тѣ же дѣйствія послѣ умноженія равенствъ (1121) на x_i', y_i', z_i' и принявъ во вниманіе, что и эти скорости удовлетворяютъ равенствамъ (493), получимъ другое равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \mathrm{v}_i^2 - \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\mathrm{x}_i' x_{0i}' + \mathrm{y}_i' y_{0i}' + \mathrm{z}_i' z_{0i}') =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} (\mathfrak{X}_i \mathrm{x}_i' + \mathfrak{Y}_i \mathrm{y}_i' + \mathfrak{Z}_i \mathrm{z}_i') - \varkappa_1 \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial t} - \varkappa_2 \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial t} - \ldots - \varkappa_p \frac{\partial \mathfrak{z}_p}{\partial t} \quad (1123)$$

Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{J}_i\left(\mathrm{v}_i \cos(\mathrm{v}_i, \mathfrak{J}_i) + v_{0i}\cos(v_{0i}, \mathfrak{J}_i)\right) -$$

$$- \varkappa_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} - \varkappa_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} - \ldots - \varkappa_p \frac{\partial \vartheta_p}{\partial t}, \ldots . \textbf{(1124)}$$

гдѣ T_1 означаетъ величину живой силы системы въ моментъ $t_0 + \mathfrak{I}$, а T_0 — величину живой силы въ моментъ t_0.

Изъ равенства (1124) слѣдуетъ, что, если уравненія связей не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то *измѣненіе живой силы равняется суммѣ произведеній, составленныхъ для каждой точки такимъ же образомъ, какъ составлена вторая часть равенства (449) на стр. 285-й.*

Живая сила пріобрѣтенныхъ или потерянныхъ скоростей, которую мы условимся обозначать такъ: T_{01}, можетъ быть вычислена слѣдующимъ образомъ:

$$T_{01} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[(\mathrm{x}_i' - x_{0i}')^2 + (\mathrm{y}_i' - y_{0i}')^2 + (\mathrm{z}_i' - z_{0i}')^2\right] =$$

$$= T_1 + T_0 - \sum_{i=1}^{i=n} m_i \mathrm{v}_i v_{0i} \cos(\mathrm{v}_i, v_{0i}),$$

а потому изъ равенствъ (1122), (1123) найдемъ слѣдующее выраженіе для T_{01}:

$$T_{01} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{J}_i\left(\mathrm{v}_i \cos(\mathrm{v}_i, \mathfrak{J}_i) - v_{0i}\cos(v_{0i}, \mathfrak{J}_i)\right); \ldots . \textbf{(1125)}$$

это равенство выражаетъ, что *живая сила измѣненій скоростей всей системы получится, если возьмемъ проэкцію приращенія скорости каждой точки на направленіе приложеннаго къ ней импульса, помножимъ ее на половину импульса и составимъ сумму всѣхъ этихъ произведеній.*

§ 183. Теоремы Карно.

Примѣнимъ формулы (1124), (1125) къ первому акту удара системы несвободныхъ матерьяльныхъ точекъ о неудерживающую связь $\mathfrak{s} > 0$.

Такъ какъ скорости $\mathfrak{v}_i$ точекъ въ концѣ перваго акта удара должны удовлетворять равенству (1067 bis) (стр. 830), а импульсы $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2, \ldots \mathfrak{J}_n$ реакцій связи $\mathfrak{s}$ равны $JP_1, JP_2, \ldots . JP_n$ и направлены по дифференціальнымъ параметрамъ $P_1, P_2, \ldots P_n$ этой связи, то равенства (1124), (1125) получатъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$T_\tau - T_0 = -\frac{J}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=n} v_{0i} P_i \cos(P_i, v_{0i})\right) -$$

$$- \mu_1 \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial t} - \mu_2 \frac{\partial \mathfrak{s}_2}{\partial t} - \ldots - \mu_p \frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial t},$$

$$T_{0\tau} = -\frac{J}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_{0i} P_i \cos(P_i, v_{0i})\right); \ldots \textbf{(1125 bis)}$$

гдѣ T_τ есть живая сила системы въ моментъ τ, а $T_{0\tau}$ — живая сила измѣненій скоростей за время перваго акта.

Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$T_\tau - T_0 = -T_{0\tau} - J\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} - \mu_1 \frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial t} - \ldots - \mu_p \frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial t}, \ldots \textbf{(1126)}$$

здѣсь:

$$\mu_1 = \int_{t_0}^{\tau} \lambda_1\, dt, \quad \mu_2 = \int_{t_0}^{\tau} \lambda_2\, dt, \ldots . \mu_p = \int_{t_0}^{\tau} \lambda_p\, dt.$$

Если время не входитъ явнымъ образомъ въ выраженія связей, то равенство (1126) получитъ такой видъ:

$$T_\tau - T_0 = -T_{0\tau}; \ldots\ldots\ldots \textbf{(1126, bis)}$$

слѣдовательно, *если система матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, ударяется о связь неудерживающую и если притомъ всѣ связи таковы, что время не входитъ явнымъ образомъ въ ихъ выраженія, то во время перваго акта удара происходитъ потеря живой силы, равная величинѣ живой силы потерянныхъ скоростей.*

На основаніи равенства (1078) величина живой силы потерянныхъ скоростей можетъ быть представлена подъ слѣдующимъ видомъ:

$$T_{\text{от}} = \frac{J^2}{2}\Delta; \ldots \textbf{(1127)} \qquad \Delta\frac{\partial D}{\partial P_{00}} = D.$$

Равенство (1126 bis) выражаетъ слѣдующую теорему, называемую первою теоремою Карно: *при каждомъ ударѣ системы о неупругую связь происходитъ потеря живой силы*; но къ этому надо прибавить: если выраженія связей не заключаютъ времени явнымъ образомъ.

Эта теорема непосредственно примѣняется и къ тому случаю, когда точки системы, связанныя между собою какими либо удерживающими связями, вступаютъ на новую связь, обращающуюся въ удерживающую; если въ моментъ встрѣчи точекъ съ новою связью $s > 0$ скорости v_{0i} удовлетворяютъ неравенству (1064) стр. 828, то происходитъ ударъ, причемъ скорости v_{0i} мгновенно измѣняются въ скорости $\mathfrak{v}_i$, удовлетворяющія равенству (1067 bis). Этотъ ударъ сопровождается потерею живой силы и величина потери равняется живой силѣ потерянныхъ скоростей, если ни старыя связи, ни новая не зависятъ явно отъ времени.

Такъ, напримѣръ, первая теорема Карно примѣняется къ удару, испытываемому твердымъ движущимся тѣломъ при мгновенной остановкѣ одной изъ его точекъ, имѣвшихъ движеніе.

Если система точекъ испытываетъ ударъ на нѣсколькихъ неудерживающихъ связяхъ одновременно и если моментъ окончанія перваго акта удара наступаетъ во всѣхъ ударяемыхъ связяхъ одновременно, то живая сила скоростей, потерянныхъ системою во время перваго акта удара, выразится формулою болѣе сложною, чѣмъ формула (1127).

Положимъ, напримѣръ, что точки системы связаны удерживающею связью $\text{в}_3 = 0$ и что ударъ происходитъ при встрѣчѣ точками неудерживающихъ связей $\text{в}_1 > 0$, $\text{в}_2 > 0$; тогда

$$T_{0\tau} = \frac{1}{2}\left(J_1^2\Delta_{11} + 2J_1 J_2 \Delta_{12} + J_2^2 \Delta_{22}\right), \ldots\ldots \textbf{(1128)}$$

гдѣ:

$$\Delta_{11} = \frac{P_{11} P_{33} - P_{13}^2}{P_{33}}, \quad \Delta_{12} = \frac{P_{12} P_{33} - P_{13} P_{23}}{P_{33}},$$

$$\Delta_{22} = \frac{P_{22} P_{33} - P_{23}^2}{P_{33}};$$

величины P съ двойными значками выражаются, какъ показано въ формулахъ (520) на стр. 353.

Вторая теорема Карно относится къ измѣненію живой силы въ теченіи втораго акта удара системы о неудерживающія связи, а также къ измѣненію живой силы вслѣдствіе взрыва, разрушающаго одну или нѣсколько связей.

Примѣнимъ формулы (1124), (1125) ко второму акту удара системы, связанной удерживающими связями $\text{в}_1 = 0$, $\text{в}_2 = 0, \ldots \text{в}_p = 0$, о связь неудерживающую $\text{в} > 0$.

Такъ какъ въ моментъ τ скорости точекъ системы удовлетворяютъ равенству (1067 bis), то сказанныя формулы получатъ такой видъ:

$$T_1 - T_\tau = \frac{J\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{i=n} \text{v}_i P_i \cos(P_i, \text{v}_i) - \frac{\partial \text{в}}{\partial t}\right) -$$

$$- \mu_1' \frac{\partial \text{в}_1}{\partial t} - \mu_2' \frac{\partial \text{в}_2}{\partial t} - \ldots - \mu_p' \frac{\partial \text{в}}{\partial t},$$

$$T_{\tau 1} = \frac{J\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{i=n} \text{v}_i P_i \cos(P_i, \text{v}_i) + \frac{\partial \text{в}}{\partial t}\right), \ldots\ldots \textbf{(1129)}$$

гдѣ ε есть коэфиціентъ возстановленія неудерживающей связи, T_1 — живая сила въ моментъ окончанія удара, $T_{\tau 1}$ — живая сила измѣненій скоростей за время втораго акта; затѣмъ:

$$\mu_1' = \int_\tau^t \lambda_1 dt, \quad \mu_2' = \int_\tau^t \lambda_2 dt, \ldots \mu_p' = \int_\tau^t \lambda_p dt,$$

гдѣ $t = t_0 + \vartheta$.

Изъ этихъ двухъ равенствъ получимъ:

$$T_1 - T_\tau = T_{\tau 1} - J\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu_1' \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \mu_2' \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \ldots - \mu_p' \frac{\partial \theta_p}{\partial t} \ldots (1130)$$

Если время не входитъ явнымъ образомъ въ выраженія связей, то послѣднее равенство будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$T_1 - T_\tau = T_{\tau 1} \ldots\ldots\ldots (1130, \text{bis})$$

Стало быть, *если система матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, ударяется о связь неудерживающую и если притомъ всѣ связи таковы, что время не входитъ явнымъ образомъ въ ихъ выраженія, то за время втораго акта удара живая сила системы увеличивается; прибыль живой силы равняется живой силѣ измѣненій скоростей за время втораго акта.*

Величина живой силы $T_{\tau 1}$ можетъ быть выражена такъ:

$$T_{\tau 1} = \frac{J^2}{2} \varepsilon^2 \Delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1131)$$

Равенство (1131) выражаетъ слѣдующую теорему: *при второмъ актѣ удара системы о неудерживающую связь является приращеніе живой силы;* но къ этому надо прибавить: если въ выраженія связей время не входитъ явнымъ образомъ.

Эта теорема можетъ быть распространена на измѣненіе живой силы, получаемой системою матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, въ томъ случаѣ, когда какой либо взрывъ разрушаетъ одну изъ связей ($\theta = 0$) и мгновенно сообщаетъ точкамъ системы новыя скорости v_i, удовлетворяющія неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{\partial в}{\partial t} > 0; \ldots\ldots (\mathbf{1065\ bis})$$

если въ уравненія связей время явнымъ образомъ не входитъ, то *вслѣдствіе такого взрыва живая сила системы увеличится;* въ этомъ и состоитъ вторая теорема Карно.

Если система точекъ, связанныхъ удерживающею связью $в_3 = 0$, испытываетъ ударъ о двѣ неудерживающія связи $в_1 > 0$, $в_2 > 0$ одновременно, то живая сила измѣненія скоростей въ теченіи втораго акта выразится слѣдующею формулою:

$$T_{\tau 1} = \frac{1}{2}(J_1^2 \varepsilon_1^2 \Delta_{11} + 2J_1 J_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_{12} + J_2^2 \varepsilon_2^2 \Delta_{22}), \ldots (\mathbf{1132})$$

гдѣ ε_1 и ε_2 суть коефиціенты возстановленія первой и второй неудерживающихъ связей.

Изъ равенствъ (1126) и (1130) можемъ составить слѣдующее равенство:

$$T_1 - T_0 = T_{\tau 1} - T_{0\tau} - J(1+\varepsilon)\frac{\partial в}{\partial t} - \varkappa_1 \frac{\partial в_1}{\partial t} + \ldots + \varkappa_p \frac{\partial в_p}{\partial t}, (\mathbf{1133})$$

гдѣ

$$\varkappa_1 = \int_{t_0}^{t} \lambda_1 \, dt, \quad \varkappa_2 = \int_{t_0}^{t} \lambda_2 \, dt, \ldots \varkappa_p = \int_{t_0}^{t} \lambda_p \, dt.$$

Если въ выраженіяхъ всѣхъ связей время явнымъ образомъ не входитъ, то предыдущее равенство получаетъ слѣдующій видъ:

$$T_1 - T_0 = T_{\tau 1} - T_{0\tau}; \ldots\ldots\ldots (\mathbf{1134})$$

слѣдовательно, *если система точекъ, связанныхъ удерживающими связями, ударяется о связь неудерживающую и если всѣ связи таковы, что время не входитъ явнымъ образомъ въ ихъ выраженія, то разность между живою силою системы въ концѣ удара и живою силою въ началѣ удара равняется разности между живою силою скоростей, возстановленныхъ въ теченіи втораго*

акта удара, и живою силою скоростей, потерянныхъ въ теченіи перваго акта.

Изъ выраженій (1127) и (1131) слѣдуетъ:

$$T_{\tau 1} - T_{0\tau} = -\frac{J^2}{2}\Delta(1-\varepsilon^2) \ldots\ldots\ldots (1135)$$

Изъ (1128) и (1132) слѣдуетъ, что, при ударѣ системы о двѣ связи, разность между живою силою возстановленныхъ скоростей и живою силою потерянныхъ скоростей выразится такъ:

$$-\frac{1}{2}\Big[J_1^2\Delta_{11}(1-\varepsilon_1^2)+2J_1J_2\Delta_{12}(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)+J_2^2\Delta_{22}(1-\varepsilon_2^2)\Big]. \quad (1136)$$

Если связь $\mathfrak{s} > 0$ вполнѣ упруга, такъ что коэфиціентъ возстановленія ε равенъ единицѣ, то разность между живою силою возстановленныхъ скоростей и живою силою потерянныхъ скоростей равна нулю; отсюда слѣдуетъ третья теорема Карно:

При вполнѣ упругомъ ударѣ, потери живой силы не происходитъ.

Въ дѣйствительности, коэфиціенты возстановленія менѣе единицы, а потому можно сказать, что при всякомъ ударѣ происходитъ потеря живой силы.

§ 184. Теорема Уильяма Томсона.

Предположимъ, что система, состоящая изъ n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ между собою p удерживающими связями (гдѣ p не болѣе $3n-2$), находясь въ покоѣ, подвержена какимъ либо даннымъ мгновеннымъ силамъ. Подъ вліяніемъ импульсовъ этихъ силъ точки системы получатъ скорости $v_1, v_2, \ldots v_n$, проэкціи которыхъ на оси координатъ должны удовлетворять такимъ уравненіямъ, какъ три слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m_i x_i' &= \mathfrak{X}_i + \varkappa_1\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial x_i} + \ldots + \varkappa_p\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial x_i} \\ m_i y_i' &= \mathfrak{Y}_i + \varkappa_1\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial y_i} + \ldots + \varkappa_p\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial y_i} \\ m_i z_i' &= \mathfrak{Z}_i + \varkappa_1\frac{\partial \mathfrak{s}_1}{\partial z_i} + \ldots + \varkappa_p\frac{\partial \mathfrak{s}_p}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} ;\ldots (1137, i)$$

а, кромѣ того, еще и равенствамъ (493, 1, 2,... p) см. стр. 351.

Помноживъ равенства (1137) на соотвѣтственныя величины проэкцій скоростей, сложивъ и принявъ во вниманіе равенства (493), получимъ слѣдующее выраженіе удвоенной живой силы, пріобрѣтаемой системою вслѣдствіе дѣйствія данныхъ мгновенныхъ импульсовъ:

$$2T = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (\mathfrak{X}_i x_i' + \mathfrak{Y}_i y_i' + \mathfrak{Z}_i z_i') \ldots (1138)$$

Кромѣ совокупности скоростей $v_1, v_2, \ldots v_n$, система можетъ получить безчисленное множество другихъ совокупностей скоростей, удовлетворяющихъ условіямъ (493), предписываемымъ связями, но неудовлетворяющихъ уравненіямъ (1137); для этого нужно присоединить къ даннымъ импульсамъ еще какіе либо другіе импульсы.

Изъ числа такихъ совокупностей скоростей, допускаемыхъ связями, обратимъ вниманіе на такую совокупность $V_1, V_2, \ldots V_n$, которая не только удовлетворяетъ равенствамъ

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} V_i P_i(\text{в}_1) \cos(P_i(\text{в}_1), V_i) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{i=1}^{i=n} V_i P_i(\text{в}_p) \cos(P_i(\text{в}_p), V_i) = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1139)$$

но, кромѣ того, еще и слѣдующему равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{J}_i V_i \cos(V_i, \mathfrak{J}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{J}_i v_i \cos(v_i, \mathfrak{J}_i); \ldots . (1140)$$

такихъ совокупностей скоростей тоже безчисленное множество, потому что число равенствъ (1139) (1140), служащихъ для опредѣленій $3n$ проэкцій скоростей такой совокупности, менѣе $3n$, такъ какъ, по условію, p не болѣе $(3n - 2)$.

При всякой такой совокупности скоростей $V_1, V_2, \ldots V_n$, живая сила системы будетъ болѣе той, которую сообщаютъ данные импульсы; въ самомъ дѣлѣ, помноживъ равенства (1137) на соотвѣтственныя про-

экціи скоростей $V_1, V_2, \ldots V_n$, сложивъ и принявъ во вниманіе, какъ равенства (1139), такъ и равенство (1140), а наконецъ и (1138), получимъ;

$$Q = 2T, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1141)}$$

гдѣ

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i V_i \cos(v_i, V_i);$$

но, очевидно, что

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(x_i' - X_i')^2 + (y_i' - Y_i')^2 + (z_i' - Z_i)^2\right] =$$

$$= T - Q + T_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1142)}$$

гдѣ X_i', Y_i', Z_i' означаютъ проэкціи на оси координатъ скорости V_i, а T_1 есть живая сила:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i V_i^2;$$

поэтому изъ равенствъ (1141) и (1142) окажется, что:

$$T_1 - T = K, \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1143)}$$

гдѣ K есть величина положительная, стало быть дѣйствительно T_1 болѣе T.

Слѣдовательно, *если сравнивать между собою величины живыхъ силъ системы при всѣхъ совокупностяхъ скоростей, удовлетворяющихъ равенствамъ (1139) и (1140), то наименьшею изъ нихъ окажется величина живой силы тѣхъ скоростей $v_1, v_2, \ldots v_n$, которыя будутъ сообщены данными импульсами $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots \mathfrak{J}_n$ въ дѣйствительности.*

Это — теорема Уильяма Томсона.

Основываясь на этой теоремѣ, можно вычислять дѣйствіе данныхъ импульсовъ на данную покоющуюся систему; для этого должно поступать такимъ образомъ, какъ въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 171-й. Два однородные стержня равной длины $2a$, одинаковой толщины и плотности положены на горизонтальной плоскости

такъ, что концы ихъ образуютъ вершины квадрата A_1, B_1, A_2, B_2 (черт. 177); концы B_1 и B_2 соединены между собою нерастяжимою нитью длины $2a$ или идеальнымъ стержнемъ такой же длины, не имѣющимъ массы; къ концу A_1 перваго стержня приложенъ импульсъ $\mathfrak{X}$ перпендикулярно къ A_1B_2, по направленію, указанному на чертежѣ 177-мъ. Опредѣлить скорости центровъ инерціи C_1, C_2 стержней и ихъ угловыя скорости, сообщаемыя импульсомъ.

Расположимъ оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ какъ показано на чертежѣ 177-мъ, означимъ черезъ ω_1, ω_2 угловыя скорости стержней, черезъ α_1, β_1, α_2, β_2 — проэкціи на оси координатъ скоростей центровъ инерціи C_1, C_2. Проэкціи на оси координатъ скорости точки B_1 перваго стержня выразятся такъ $(\alpha_1 - a\omega_1, \beta_1)$, а проэкціи скорости точки B_2 втораго стержня — такъ $(\alpha_2 - a\omega_2, \beta_2)$; вслѣдствіе неизмѣняемости разстоянія $\overline{B_1B_2}$, скорости этихъ точекъ должны удовлетворять равенству:

$$\alpha_1 - \alpha_2 - a\omega_1 + a\omega_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1144)}$$

Означимъ черезъ M массу каждаго стержня и черезъ Mk^2 — моментъ инерціи вокругъ середины.

Для рѣшенія вопроса будемъ искать такія величины α_1, β_1, α_2, β_2, ω_1, ω_2, которыя удовлетворяютъ равенству (1144) и равенству:

$$\mathfrak{X}\,(\alpha_1 + a\omega_1) = \text{постоянному}$$

и даютъ наименьшее значеніе выраженію:

$$T = \frac{M}{2}\left[\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + k^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)\right].$$

Искомыя величины должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\alpha_1 + \lambda + \mu\mathfrak{X} = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \lambda = 0, \quad \beta_2 = 0$$

$$k^2\omega_1 - \lambda a + \mu a\mathfrak{X} = 0, \quad k^2\omega_2 + \lambda a = 0,$$

гдѣ λ и μ суть вспомогательные множители, которые можно исключить изъ этихъ уравненій, что и сдѣлаемъ.

Изъ этихъ уравненій и изъ равенства (1144) можно выразить α_1, α_2 и ω_3 въ ω_1 (β_1 и β_2 равны нулю), а именно:

$$\omega_2 = \frac{a^2 - k^2}{a^2 + 3k^2}\,\omega_1, \quad \alpha_1 = \frac{3a^2 + k^2}{a^2 + 3k^2}\,\frac{k^2}{a}\,\omega_1, \quad \alpha_2 = -\frac{k^2}{a}\,\omega_2.$$

Для опредѣленія ω_1, подставимъ полученныя выраженія въ равенство (1138), т. е., въ $2T = \mathfrak{X}\,(\alpha_1 + a\omega_1)$; изъ него найдемъ:

$$\omega_1 = \frac{\mathfrak{X}a}{2Mk^2}\,\frac{a^2 + 3k^2}{a^2 + k^2}.$$

§ 185. Теорема Бертрана.

Возвратимся снова къ разсмотрѣнію дѣйствія мгновенныхъ силъ на движущуюся систему матерьяльныхъ точекъ $m_1, m_2, \ldots m_n$, связанныхъ удерживающими связями $s_1, s_2, \ldots s_p$, какъ было условлено въ § 182-мъ но только теперь мы предположимъ, что въ уравненія связей время явнымъ образомъ не входитъ.

Проэкціи скоростей $v_1, v_2, \ldots v_n$, которыми точки системы будутъ обладать по окончаніи дѣйствія мгновенныхъ импульсовъ $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots \mathfrak{J}_n$, опредѣлятся по формуламъ (1121) при помощи равенствъ (493, 1, 2, . . . p) стр. 351-й; пусть T_1 означаетъ живую силу системы при этихъ скоростяхъ, т. е.:

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2.$$

Можно заставить систему получить другую совокупность скоростей $V_1, V_2, \ldots V_n$ при дѣйствіи тѣхъ же импульсовъ и при тѣхъ же начальныхъ скоростяхъ $v_{01}, v_{02}, \ldots v_{0n}$, если въ моментъ t_0 присоединить къ существующимъ связямъ $s_1, s_2, \ldots s_p$ еще какую либо новую связь s или нѣсколько такихъ связей, независящихъ отъ времени; проэкціи новыхъ скоростей выразятся формулами:

$$m_i X_i' = m_i x_{0i}' + \mathfrak{X}_i + \varkappa_1'\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + \ldots + \varkappa_p'\frac{\partial s_p}{\partial x_i} + \varkappa'\frac{\partial s}{\partial x_i} \ldots (1145)$$

и проч., гдѣ X_i', Y_i', Z_i' означаютъ проэкціи скорости V_i.

Исключивъ изъ уравненій (1121) и (1145) данные импульсы и проэкціи начальныхъ скоростей, получимъ рядъ равенствъ слѣдующаго вида:

$$m_i X_i' = m_i x_i' + \varkappa'\frac{\partial s}{\partial x_i} + (\varkappa_1' - \varkappa_1)\frac{\partial s_1}{\partial x_i} + \ldots$$

и проч.; изъ этихъ равенствъ составимъ слѣдующее: $2T_2 = Q$, гдѣ:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i V_i^2, \quad Q = \sum_{i=1}^{i=n} V_i \mathrm{v}_i \cos(V_i, \mathrm{v}_i).$$

Живая сила T_2 меньше живой силы T_1; въ самомъ дѣлѣ, такимъ же образомъ, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, найдемъ, что K (живая сила геометрическихъ разностей между скоростями V_i и скоростями v_i), равняется

$$K = T_2 - Q + T_1,$$

а такъ какъ $Q = 2T_2$, то отсюда слѣдуетъ, что:

$$T_1 = T_2 + K, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1146)$$

т. е., что *всякое новое стѣсненіе свободы движенія системы ведетъ къ тому, что система получитъ меньшую живую силу отъ тѣхъ же импульсовъ*. Въ этомъ заключается теорема Бертрана.

§ 186. Слѣдствія мгновеннаго уничтоженія или разрыва одной изъ связей, удерживавшихъ покоившуюся систему въ положеніи равновѣсія.

Уничтоженіе одной изъ связей влечетъ за собою, во первыхъ, мгновенное измѣненіе реакцій прочихъ связей, во вторыхъ, образованіе ускореній, приводящихъ систему въ движеніе.

Для опредѣленія величинъ реакцій связей до разрыва мы должны взять уравненія равновѣсія системы.

Для опредѣленія величинъ реакцій оставшихся связей немедленно послѣ разрыва, мы должны взять уравненія (518) стр. 352; такъ какъ система въ моментъ разрыва связи находилась въ покоѣ, а слѣдовательно скорости всѣхъ точекъ равнялись нулю, то вмѣсто многочленовъ K (в) будемъ имѣть частныя производныя втораго порядка по t отъ в, а если уравненія связей не заключаютъ явнымъ образомъ t, то K (в) будутъ равны нулю, что значительно упроститъ уравненія (518).

Опредѣливъ новыя значенія множителей изъ уравненій (518), можемъ вычислить изъ уравненій (517) стр. 350 величины проэкцій ускореній точекъ системы; затѣмъ, взявъ производныя отъ уравненій (517) по времени, можемъ вычислить проэкціи начальныхъ ускореній втораго порядка, и т. д. Очевидно, можемъ опредѣлить движеніе, начавшееся послѣ разрыва связи.

Для поясненія, приводимъ примѣры.

Примѣръ 172-й. Тяжелая матерьяльная точка массы m подвѣшена на двухъ нитяхъ длины l (каждая) къ двумъ неподвижнымъ точкамъ, находящимся на одной горизонтальной линіи въ разстояніи $2a$ одна отъ другой. Если одна изъ этихъ нитей будетъ разрѣзана, то какъ измѣнится черезъ это натяженіе другой нити?

Пока нить не разрѣзана, натяженія обѣихъ нитей одинаковы и равны

$$\frac{mgl}{2\sqrt{l^2-a^2}};$$

когда же одна изъ нитей будетъ уничтожена, тогда натяженіе другой опредѣлится по формулѣ (382) стр. 232-й и окажется равнымъ проэкціи силы тяжести на продолженіе направленія нити (потому что центробѣжная сила равна нулю), т. е.:

$$mg\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l};$$

слѣдовательно, уничтоженіе одной изъ нитей влечетъ за собою уменьшеніе натяженія другой нити въ отношеніи:

$$\frac{2(l^2-a^2)}{l^2}.$$

Примѣръ 173-й. Тяжелый однородный стержень длины $2a$ (масса $=M$, моментъ инерціи вокругъ центра инерціи $=Mk^2$) подвѣшенъ на двухъ вертикальныхъ нитяхъ длины b, которыя верхними концами прикрѣплены къ двумъ неподвижнымъ точкамъ A и B (черт. 178), находящимся на одной горизонтальной линіи въ разстояніи $2a$ одна отъ другой; нижніе концы нитей AD и BE прикрѣплены къ концамъ стержня, такъ что послѣдній покоится въ горизонтальномъ положеніи, причемъ натяженіе каждой нити равняется половинѣ вѣса стержня. Опредѣлить, какъ измѣнится натяженіе нити AD вслѣдствіе разрыва нити BE?

Означимъ черезъ λ величину реакціи нити AD послѣ уничтоженія другой нити. Составимъ дифференціальныя уравненія движенія стержня:

$$Mx_c''=0,\quad My_c''=Mg-\lambda,\quad Mk^2\omega''=\lambda a$$

и уравненіе связи, удерживающей точку D въ неизмѣнномъ разстояніи b отъ точки A:

$$(x_c + a - a\cos\omega)^2 + (y_c - a\sin\omega)^2 = b^2;$$

возьмемъ вторую производную отъ первой части этого уравненія по t и приравняемъ ее нулю, послѣ чего замѣнимъ: x_c', y_c', ω', x_c и ω — нулями, y_c — величиною b, а вторыя производныя — равными имъ величинами изъ предыдущихъ дифференціальныхъ уравненій; тогда окажется, что

$$\lambda = Mg\frac{k^2}{a^2 + k^2}.$$

Примѣръ 174-й. Однородный твердый шаръ (масса M) разрѣзанъ на двѣ половины діаметральною плоскостью; два полученные такимъ образомъ полушара сложены вмѣстѣ по плоскостямъ разрѣза въ формѣ шара, обвязаны нитью и образовавшійся шаръ положенъ на горизонтальную плоскость такимъ образомъ, чтобы плоскость разрѣза была вертикальна. Въ этомъ положеніи давленіе шара на плоскость будетъ равно его вѣсу. Опредѣлить, какъ измѣнится давленіе полушаровъ тотчасъ послѣ разрѣза нити, которою они обвязаны, предполагая, что треніе между сферическими поверхностями и плоскостью вполнѣ препятствуетъ скольженію.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія каждаго полушара. Къ нему приложены: сила тяжести, реакція λ плоскости и треніе $F = k\lambda$. Центръ инерціи C (черт. 179) полушара находится на линіи ON въ разстояніи равномъ $\frac{3}{8}R$ отъ O (см. примѣръ 79, стр. 444). Моментъ инерціи полушара вокругъ оси $Z^{овъ}$ (перпендикулярной къ плоскости чертежа и проходящей черезъ точку O) равенъ половинѣ момента инерціи цѣлаго шара, поэтому моментъ инерціи полушара $\left(\text{масса } \frac{M}{2}\right)$ вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ C инерціи, равенъ:

$$M\left(\frac{1}{5} - \frac{9}{128}\right)R^2 = MR^2\frac{83}{640}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія полушара будутъ:

$$\frac{M}{2}x_c'' = k\lambda,\quad \frac{M}{2}y_c'' = \frac{M}{2}g - \lambda,$$

$$M\frac{83}{640}R^2\omega'' = \frac{3}{8}R\lambda - Rk\lambda.$$

Точка O должна получить движеніе по горизонтальному направленію, поэтому проэкція ея ускоренія на ось $Y^{овъ}$ должна быть равна

нулю ($y_0'' = 0$); составимъ выраженія проэкцій на оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ ускоренія центра C инерціи и выраженіе проэкціи ускоренія на ось $X^{овъ}$ точки K (x_K''), причемъ примемъ во вниманіе, что угловая скорость равна нулю.

$$x_c'' = x_0'', \quad y_c'' = \frac{3}{8} R\omega'', \quad x_K'' = x_0'' - R\omega''.$$

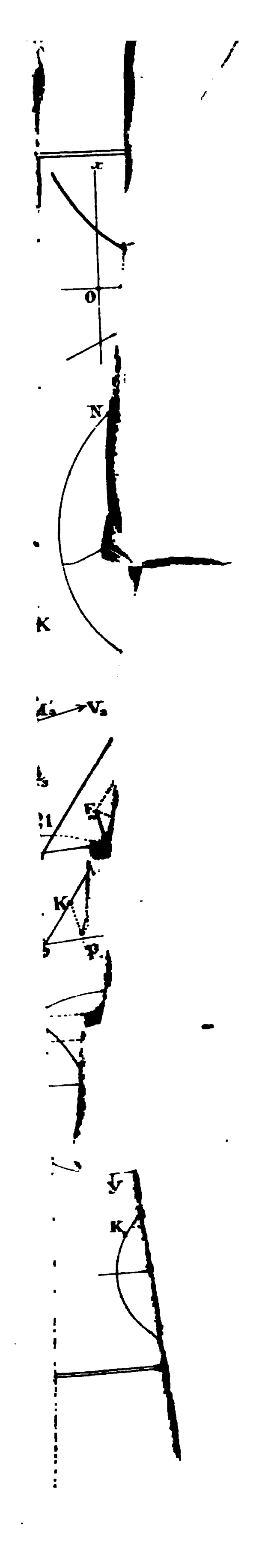
При катаніи безъ скольженія точка K будетъ описывать циклоиду и начальное положеніе K будетъ точкою возврата этой циклоиды, а потому $x_K'' = 0$; поэтому изъ послѣднихъ равенствъ и изъ дифференціальныхъ уравненій получимъ:

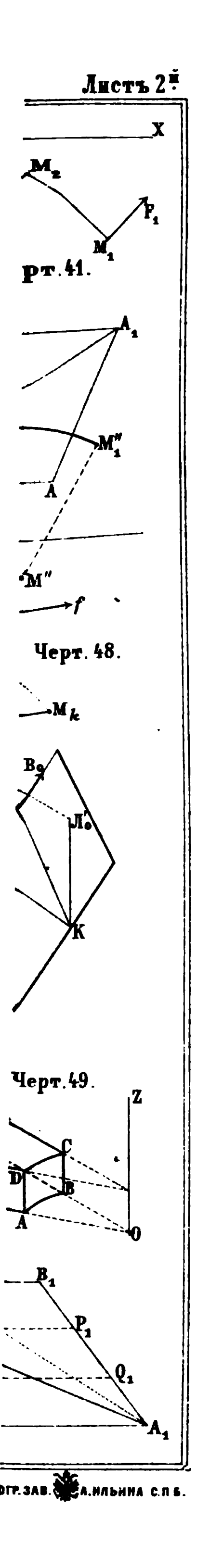
$$k - \left(\frac{3}{8} - k\right)\frac{320}{83} = 0, \quad \frac{M}{2} g - \lambda = \frac{3}{8} k\lambda;$$

откуда:

$$k = \frac{120}{403}, \qquad \lambda = \frac{M}{2} g \frac{403}{448},$$

слѣдовательно, послѣ разрыва нити давленіе уменьшится въ отношеніи (403 : 448).





ОГР. ЗАВ. А. ИЛЬИНА С.П.Б.

